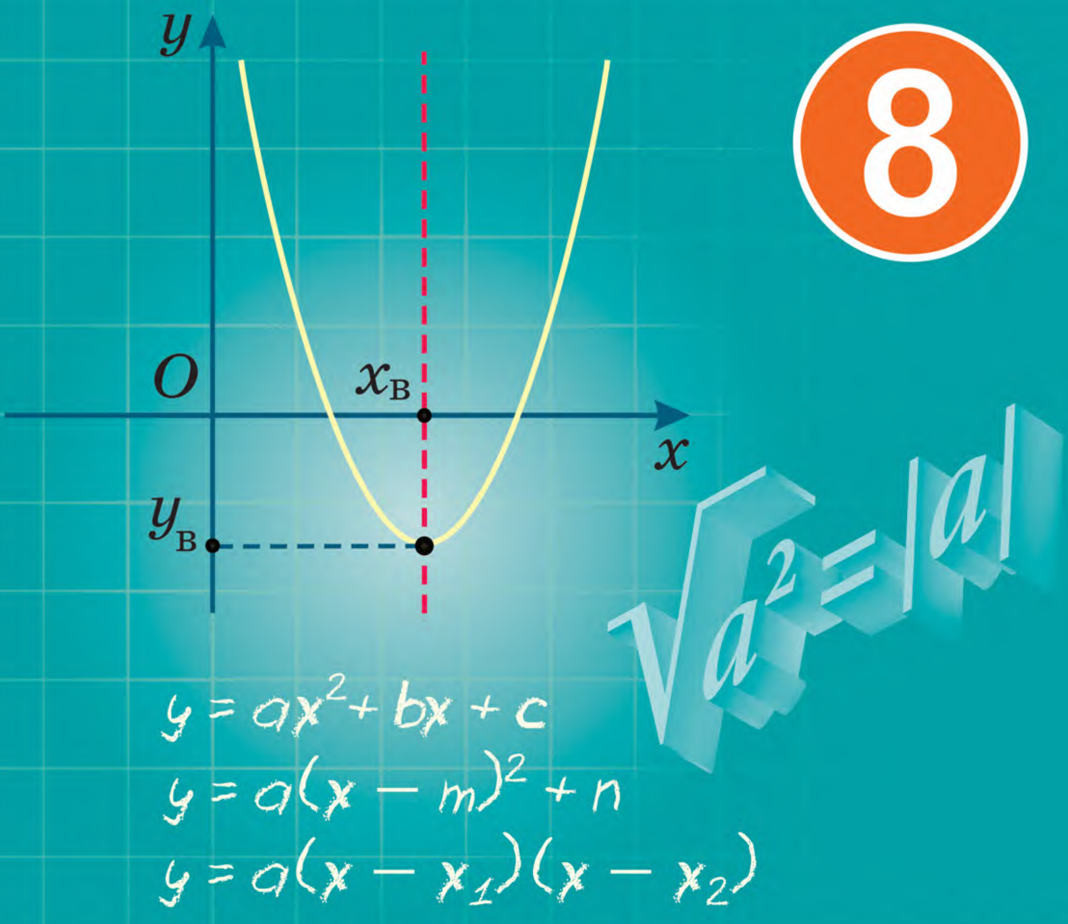
И. Г. Арефьева О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

8



Арифметический квадратный корень

$\sqrt{a} = b$, если $b \geqslant 0$, $b^2 = a$

a — подкоренное выражение, $a \geqslant 0$.

$(\sqrt{a})^2 = a$, где $a \geqslant 0$	$(\sqrt{7})^2 = 7$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$	$\sqrt{\frac{c^2}{25}} = \left\lvert \frac{c}{5} \right\rvert = \frac{\lvert c \rvert}{5}$

Квадратный корень из произведения

$\sqrt{64 \cdot 0{,}25} = \sqrt{64} \cdot \sqrt{0{,}25} =$ $= 8 \cdot 0{,}5 = 4$	$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, где $a \geqslant 0, b \geqslant 0$	$\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} =$ $= \sqrt{64} = 8$

Квадратный корень из частного

$\sqrt{2\frac{23}{49}} = \sqrt{\frac{121}{49}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{49}} =$ $= \frac{11}{7} = 1\frac{4}{7}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, где $a \geqslant 0, b > 0$	$\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = \sqrt{16} = 4$

Таблица квадратов натуральных чисел от 10 до 99

Единицы / Десятки	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$

Неполные квадратные уравнения

$ax^2 + bx = 0;\ a \neq 0,\ b \neq 0$	$3x^2 + x = 0;\ x(3x+1) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 3x + 1 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$
$ax^2 + c = 0;\ a \neq 0,\ c \neq 0$	$4x^2 - 9 = 0;\ (2x-3)(2x+3) = 0;$ $\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 0, \\ 2x + 3 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = 3, \\ 2x = -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1{,}5, \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$
$ax^2 = 0;\ a \neq 0$	$-12x^2 = 0;\ x^2 = 0;\ x = 0.$

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$D = b^2 - 4ac$$

Если $D > 0$, то уравнение имеет два корня $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$.

Если $D = 0$, то уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

Если $D < 0$, уравнение не имеет корней.

Теорема Виета

$$x^2 + px + q = 0,\ D > 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

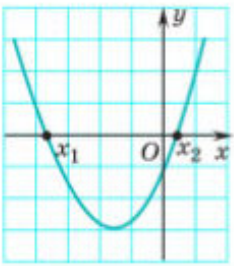
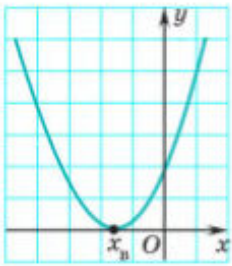
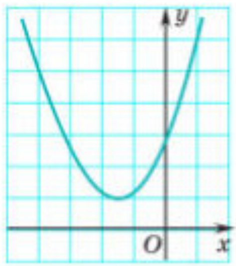
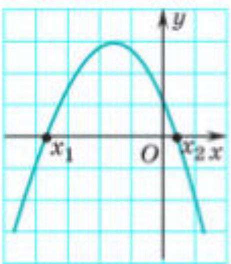
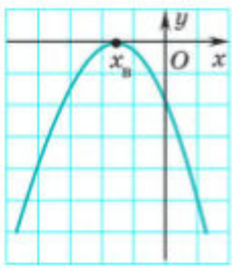
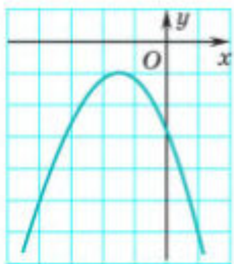
Квадратичная функция

$y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа и $a \neq 0$

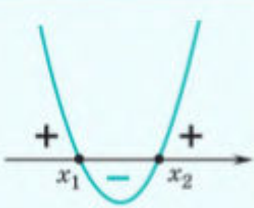
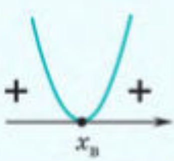
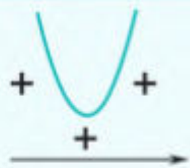
Координаты вершины параболы:

$$x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}, \quad y_{\text{в}} = ax_{\text{в}}^2 + bx_{\text{в}} + c \text{ или } y_{\text{в}} = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

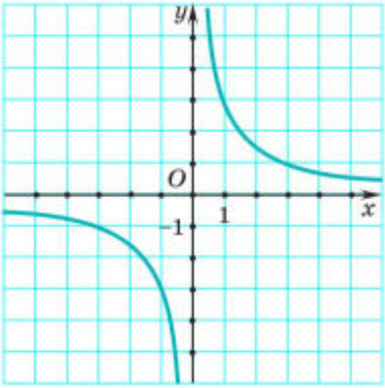
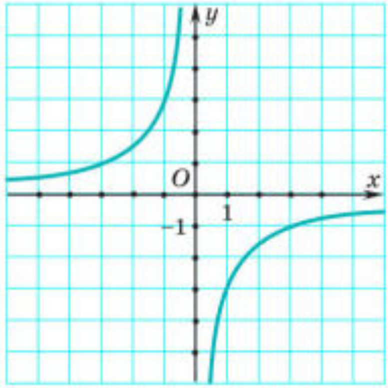
Если квадратичная функция представлена в виде $y = a(x - m)^2 + n$, то точка $(m; n)$ является вершиной параболы.

	$D > 0$ $x_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$	$D = 0$ $x = x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$	$D < 0$ Нет нулей
$a > 0$			
$a < 0$			

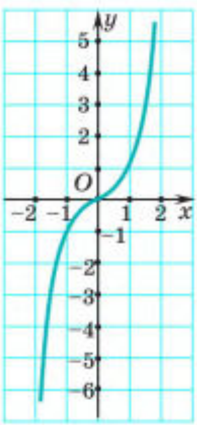
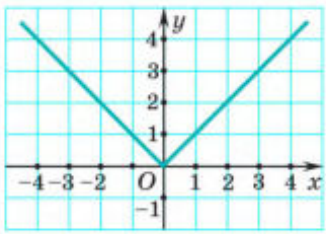
Квадратные неравенства

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			

Обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

<table>
<tr><th>$k > 0$</th><th>$k < 0$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">$D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</td></tr>
</table>

Функции $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$, $y = |x|$

<table>
<tr><th>$y = \sqrt{x}$</th><th>$y = x^3$</th><th>$y = |x|$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>$D = [0; +\infty)$</td><td>$D = (-\infty; +\infty)$</td><td>$D = (-\infty; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$E = [0; +\infty)$</td><td>$E = (-\infty; +\infty)$</td><td>$E = [0; +\infty)$</td></tr>
</table>

И. Г. Арефьева   О. Н. Пирютко

АЛГЕБРА

Учебное пособие для 8 класса
учреждений образования,
реализующих образовательные программы
общего среднего образования,
с русским языком обучения и воспитания

Допущено
Министерством образования
Республики Беларусь

2-е издание, исправленное и дополненное

Минск
«Адукацыя і выхаванне»
2024

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.144я721
А80

Р е ц е н з е н т
кафедра высшей алгебры и защиты информации
механико-математического факультета Белорусского государственного
университета (доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой *В. В. Беняш-Кривец*)

Арефьева, И. Г.

А80 Алгебра : учебное пособие для 8-го класса учреждений образования, реализующих образовательные программы общего среднего образования, с русским языком обучения и воспитания / И. Г. Арефьева, О. Н. Пирютко. — 2-е издание, исправленное и дополненное. — Минск : Адукацыя і выхаванне, 2024. — 272 с. : ил.

ISBN 978-985-03-4081-8.

Предыдущее издание было выпущено в издательстве «Народная асвета» в 2018 г.

УДК 512(075.3=161.1)
ББК 22.144я721

ISBN 978-985-03-4081-8

Как работать с учебным пособием

Уважаемые восьмиклассники! По этому учебному пособию вы продолжите изучать алгебру. Пособие состоит из четырех глав, каждая из которых разделена на параграфы, где вы встретите следующие условные обозначения:

— задания на повторение для подготовки к изучению нового материала;

— новый теоретический материал и методы его применения;

— алгоритмы;

— важные правила и утверждения;

— основные примеры с решениями и подробным описанием последовательности действий;

— устные вопросы и задания;

— задания для работы в классе;

— задания для домашней работы;

— задания для повторения;

— материал, предназначенный для изучения учебного предмета на повышенном уровне.

В каждом параграфе полужирным шрифтом выделены утверждения и термины, определения которых необходимо знать.

Каждая глава учебного пособия заканчивается разделами «Итоговая самооценка», «Практическая математика», «Увлекательная математика». В них вы найдете перечень требований к усвоению теоретического материала и практические задания для самопроверки, задачи на применение математики в различных областях жизни, а также задачи для тех, кто увлекается математикой.

Для повторения изученного ранее материала в учебном пособии размещен раздел «Повторение курса алгебры 7-го класса». Для обобщения и закрепления материала можно использовать раздел «Повторение курса алгебры 8-го класса».

Дополнительные материалы к учебному пособию «Алгебра» для 8-го класса можно найти на сайте http://eior.by (Единый информационно-образовательный ресурс). Выберите в меню «8 класс», «Алгебра». В соответствующей теме нажмите кнопку «Дополнительные материалы».

Желаем успехов!

Повторение курса алгебры 7-го класса

Степень с целым показателем и ее свойства

Свойства степени с целым показателем

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$;
3) $(a^m)^n = a^{mn}$;
4) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$;
6) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Стандартным видом числа называют его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.

1. Пользуясь определением степени с целым показателем, вычислите:

а) 5^{-2}; 2^{-3}; 9^{-1}; 6^{-2}; 1^{-7};

б) $(-7)^{-2}$; $(-5)^{-3}$; $(-3)^{-1}$; $(-2)^{-2}$; $(-1)^{-4}$;

в) -4^{-2}; -3^{-3}; -8^{-1}; -5^{-2}; -1^{-8};

г) 7^0; -13^0; $(-15)^0$.

2. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$; б) $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$; в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

г) $(-0{,}2)^{-3}$; д) $(-2{,}5)^{-2}$; е) $\left(-\frac{2}{9}\right)^{0}$.

3. При $a = 0{,}5$, $b = \frac{1}{3}$ найдите значение выражения:

а) $a^{-1} + b^{-1}$; б) $(a + b)^{-1}$; в) $a^{-2} - b^{-2}$; г) $(a - b)^{-2}$.

4. Установите порядок действий и найдите значение выражения:

а) $9 \cdot 18^{-1}$; б) $100 : (-5)^{-2}$; в) $0{,}64 \cdot 0{,}4^{-2}$;

г) $-3^{-4} \cdot 27$; д) $0{,}1 : (-0{,}5)^{-3}$; е) $(-2)^{-5} : \frac{1}{8}$;

ж) $(-0{,}75)^{-3} : \frac{4}{9}$; з) $-0{,}2^{-4} \cdot 0{,}16$; и) $0{,}3 : (-0{,}1^4)$.

5. Сравните с нулем значение выражения:

а) $-(-3)^{-5}$; б) $-(-5)^{-6}$;

в) $(-3)^0 \cdot 6 - 5$; г) $-(-1{,}7)^{-6} \cdot (-2)^3$.

6. Пользуясь свойствами степени с целым показателем, вычислите:

а) $5^{-4} \cdot 5^2$; б) $0{,}5^{-7} \cdot 0{,}5^6$; в) $(-3)^{-5} \cdot (-3)^7$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 2^4$; д) $2^{-8} : 2^{-6}$; е) $(-0{,}4)^{-9} : \left(-\frac{2}{5}\right)^{-7}$;

ж) $\frac{3^{-2}}{3^2}$; з) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-6} : \left(1\frac{1}{3}\right)^{-5}$; и) $(10^{-3})^{-1}$;

к) $(8^{-5})^0$; л) $((-2)^{-3})^{-1}$; м) $((-5)^{-1})^{-3}$.

7. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $2b^2 \cdot \frac{1}{8}b^{-3}$ при $b = 32^{-1}$; б) $27(c^{-2})^3 \cdot 81(c^{-3})^2$ при $c = 3$.

8. Используя свойства степени с целым показателем, найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{2}{7}\right)^5 \cdot 7^5$; б) $\frac{7^2}{28^2}$; в) $5^{-4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$;

г) $\frac{10^{-4}}{5^{-4}}$; д) $1{,}2^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4$; е) $3^{-5} : 1{,}5^{-5}$.

9. Выберите рациональный способ решения для нахождения значения выражения:

а) $125 \cdot 5^{-5}$; б) $100 \cdot 10^{-7}$; в) $16^{-3} : 2^{-6}$;

г) $(8^2 \cdot 2^{-8})^{-1}$; д) $6^{-12} \cdot (6^{-5})^{-3}$; е) $(4^{-12} \cdot 2^{25})^{-5}$;

ж) $\frac{7^{-10}}{7^{-3} \cdot 7^{-5}}$; з) $\frac{5^{-3} \cdot 25^{-4}}{5^{-9}}$; и) $\frac{(6^{-2})^3}{36^{-2}}$;

к) $\frac{81^{-4}}{(3^{-5})^4}$; л) $\frac{5^{-5}}{25^{-3} \cdot 5^3}$; м) $\frac{0{,}5^2}{0{,}125^{-3} \cdot 4^{-5}}$.

10. Вычислите, выбрав рациональный путь решения:

а) $\frac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$; б) $\frac{6^{-10}}{81^{-2} \cdot 16^{-3}}$; в) $\frac{14^5 \cdot 2^{-7}}{28^{-2} \cdot 7^8}$; г) $\frac{10^{-2} \cdot 15^{-4}}{30^{-6}}$.

11. Известно, что $3^m = a$. Выразите через a:

а) 3^{m+1}; б) 3^{m-1}; в) 3^{2m}; г) 3^{3m+1}.

12. Докажите, что значение выражения:

а) $10^{18} + 2$ делится на 3;

б) $10^{23} + 10^{15} + 7$ делится на 9.

13. Докажите, что значение выражения не зависит от n:

а) $5^{2n+7} : 5^{2n-1}$; б) $\frac{8^{2n+2}}{4^{3n+1}}$; в) $\frac{21^{n+3}}{3^{n+1} \cdot 7^{n+2}}$.

14. Представьте выражение в виде степени с основанием, равным натуральному числу:

а) $2^n \cdot 8$; б) $7^{m+1} : 49$; в) $(3^{n+6})^3 : 3^{2n}$.

15. Запишите в стандартном виде числа:

12 300 050; 17; 0,000158; 9 000 000;
7586,258; 13,2046; 6 900 000; 0,03026.

16. Представьте в стандартном виде каждое из чисел и найдите его порядок:

$302 \cdot 10^{-6}$; $3687 \cdot 10^{9}$; $0,034 \cdot 10^{-8}$;

$0,00057 \cdot 10^{12}$; $1428,33 \cdot 10^{-7}$; $650,123 \cdot 10^{5}$.

17. Найдите квадрат и куб числа, запишите полученный результат в стандартном виде:

а) $7 \cdot 10^8$; б) $1,2 \cdot 10^{-5}$.

18. Найдите, во сколько раз масса Луны меньше массы Земли, если масса Земли равна $5,98 \cdot 10^{24}$ кг, а масса Луны равна $7,35 \cdot 10^{22}$ кг.

19. Найдите, на сколько порядков:

а) число 895 000 000 больше, чем число 800 000;

б) число 0,00000087 меньше, чем число 0,0052.

20. Выразите:

а) $3,7 \cdot 10^4$ т в граммах;

б) $5,83 \cdot 10^{12}$ кг в тоннах;

в) $9,8 \cdot 10^{-7}$ км в миллиметрах;

г) $5,6 \cdot 10^{-11}$ см в метрах.

Полученные результаты представьте в стандартном виде.

Выражения и их преобразования

Формулы сокращенного умножения

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Основные способы разложения многочленов на множители:

- вынесение общего множителя за скобки;
- использование формул сокращенного умножения;
- группировка слагаемых.

21. Выполните действия и запишите полученный результат в виде одночлена стандартного вида:

а) $7a^3b \cdot a^2b^6$; б) $(-3a^8b)^4$;

в) $(-2ab^4)^2 \cdot abc$; г) $(-10a^6b^4)^3 : (5a^{17}b)$.

Найдите коэффициент и степень полученного результата.

22. Приведите к стандартному виду $\left(2\frac{1}{3}a^4b^8\right)^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}a^5b^{12}\right)$.

23. Найдите сумму и разность многочленов $3x - 5y^2 - 1$ и $2x + 5y^2 - 3$.

24. Упростите выражение, раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые:

а) $18x - (x - 1) - (x + 6)$;

б) $3b - (b - 3) + (5b + 10)$;

в) $3x^2 - 4x + (5 + 9x - 2x^2)$;

г) $6ab + 5a - (7ab + 5a - 4)$;

д) $-3(x - 2y) - (2x + 3y) - 5x$;

е) $2(5a - 3b) - 7(6a + b)$;

ж) $5(a - 3b) - 2(4a + 5b) + 3b$;

з) $8m - 3(n + 2m) + 6(-n + m)$.

25. Решите уравнение:

а) $5x - (3x - 1) = 23$; б) $4 - (5 - x) - (3x - 6) = 0$;

в) $3(y - 5) - 4(y - 4) = 8$; г) $8(y - 5) + 2(5y - 4) = 10$.

26. Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $-4a(a + 9)$; б) $(y - 2)(3y + 9)$;

в) $6a^2 - 2a(3a - b)$; г) $(n - 1)(n - 2) + 3n$;

д) $(b - 2)(b + 3) + 2b(1 - b)$; е) $(a - 8)(2a + 1) - (a + 1)(a - 6)$.

27. Упростите выражение $14a - (4a - 1)(3 - 2a)$ и найдите его значение при $a = -\frac{1}{4}$.

28. Решите уравнение:

а) $(3x - 1)(5x + 4) - 15x^2 = 17$;

б) $5 - x(x - 3) = (6 - x)(x + 2)$.

29. Преобразуйте в многочлен:

а) $(-b + 6)^2$; б) $(-k - 1)^2$;

в) $(-5a + 2b)^2$; г) $\left(-7a + \frac{1}{7}b\right)^2$.

30. Используйте формулы сокращенного умножения и правила раскрытия скобок для упрощения выражения:

а) $(a - b)(a + b) - a(a + 2)$; б) $(x + 1)^2 + 2x(4x - 1)$;

в) $a(a - 2b) - (a - b)^2$; г) $(m + 5)^2 - (m + 4)(m - 4)$;

д) $(a - 4)(a + 4) - (a - 4)^2$; е) $(b - 4)(b + 3) - (b - 6)^2$;

ж) $16a^2 - (4a + 1)(4a - 1)$; з) $(3x - 4y)^2 - (3x + 4y)^2$;

и) $(5a - 2b)^2 - (2a - 5b)^2$; к) $(-a - 2b)^2 + (a - 2b)^2$.

31. Упростите выражение $(3a - 7b)^2 - (-7a + 3b)^2$ и найдите его значение при $a = 2{,}8$, $b = 2{,}2$.

32. Решите уравнение $(x + 6)^2 - (x - 5)(x + 5) = 79$.

33. Разложите многочлен на множители:

а) $9a - 15b$; б) $3m + mn$;

в) $5ab - 5ac$; г) $6a^2 - 24ab$;

д) $x^5 + x^2$; е) $28a^2b - 7ab$;

ж) $3a^2 - 12a^4 + 9a^6$; з) $10x^4y^2 + 25x^2y - 5x^2y^3$.

34. Разложите многочлен на множители способом группировки:

а) $a^2 + 7a + ab + 7b$;
б) $x^2 - 2x + x - 2$;
в) $5m - 10n + 2n^2 - mn$;
г) $4x^2 - 20xy + 5xy - 25y^2$.

35. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 - 10a + 25$;
б) $16x^2 + 8x + 1$;
в) $40ab + 16a^2 + 25b^2$;
г) $m^8 + 4n^2 - 4m^4n$.

36. Разложите на множители двучлен:

а) $n^2 - 16$;
б) $25 - 9a^2$;
в) $36a^2 - 81b^4$;
г) $m^2n^2 - 1$;
д) $9a^{12} - 25$;
е) $x^{18} - y^6$.

37. Представьте многочлен в виде произведения:

а) $10a^2 - 10$;
б) $5a^3 - 5a$;
в) $3b^3 - 3bc^2$;
г) $-4x^5 + 4x^3 - x$;
д) $a - 5b + a^2 - 25b^2$;
е) $mk^6 - mk^4 - k^6 + k^4$.

38. Разложите на множители, применив различные способы:

а) $(m - n)^2 - km + kn$;
б) $a - 2b + 4(2b - a)^2$;
в) $(2x + 3y^3)^2 - 9y^6$;
г) $0{,}36b^4 - (1 - 0{,}8b^2)^2$;
д) $(3a - 1)^2 - (a + 1)^2$;
е) $(2x - 1)^2 - (4 - 7x)^2$.

39. Упростите выражение и найдите его значение:

а) $a(a - b) + b(b - a)$ при $a = 6{,}3$, $b = 2{,}3$;

б) $a^2 + ab - 5a - 5b$ при $a = 6{,}6$, $b = 0{,}4$;

в) $(a - 3b)^2 - (3b + a)^2$ при $ab = 0{,}25$;

г) $6m^2 + 12mn + 6n^2$ при $m = 56$, $n = 44$;

д) $x^2 - 2xy + y^2 + 8$ при $x - y = 5$.

40. Используя комбинацию различных способов, разложите на множители многочлен $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$.

Линейные уравнения. Линейные неравенства. Линейная функция

Уравнения вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называются **линейными.**

Линейное уравнение с одной переменной $ax = b$ может:

- иметь единственный корень,
- не иметь корней,
- иметь бесконечно много корней.

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, где a и b — числа, а x — переменная, называются **линейными неравенствами с одной переменной.**

Зависимость между двумя переменными, при которой каждому значению одной переменной **(аргументу)** соответствует единственное значение другой переменной **(функции)**, называется **функциональной зависимостью** или **функцией.**

Функция вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, а x и y — переменные, называется **линейной функцией.**

Графиком линейной функции является прямая. В формуле $y = kx + b$ угловой коэффициент прямой k показывает угол наклона прямой к оси абсцисс; b — ордината точки пересечения прямой с осью ординат.

41. Решите уравнение:

а) $2 - 2(x - 1) = 14$;

б) $-3(x + 3) + 24 = 9$;

в) $3x + 2 = 12 - 3(3x + 3)$;

г) $5(5x + 3) - 10 = -7(4 - 3x)$;

д) $7(x - 3) - 4(x + 1) = 3x + 2$;

е) $5x - 12 = 2(2{,}5x - 1) - 10$.

42. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{x+2}{9} - \frac{x-1}{18} = 1$;　　б) $\frac{8-x}{2} - \frac{3-x}{6} = \frac{x+7}{15}$.

43. Найдите нуль функции:

а) $f(x) = -x + 15$; б) $f(x) = \frac{2}{3}(x - 1) - 5$;

в) $f(x) = -0{,}1(2x + 5) - 7$; г) $f(x) = -3(7 - x) - 2(x - 4)$.

44. Решите уравнение:

а) $(2x + 3)^2 - 10 = 2x(2x + 5)$;

б) $(x - 2)(x - 3) - 12 = (x - 6)(x + 1)$.

45. Покажите, что уравнение $\frac{2x+1}{3} - \frac{x+5}{6} = \frac{x-4}{2}$ не имеет корней.

46. Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций, не выполняя построения графиков:

а) $y = 5x - 1$ и $y = -x + 3$;

б) $y = 2 - 3(x - 6)$ и $y = 5x + 2$;

в) $y = \frac{x+3}{3} - \frac{x-4}{7}$ и $y = 1$.

47. Известно, что $c < d$ — верное числовое неравенство. Используя свойства неравенств, запишите верное неравенство, которое получится, если:

а) к обеим частям неравенства прибавить число 8;

б) из обеих частей неравенства вычесть число 1,2;

в) обе части неравенства умножить на –5;

г) обе части неравенства разделить на $\frac{1}{6}$;

д) обе части неравенства разделить на –1.

48. Решите линейное неравенство и укажите два каких-либо числа, являющихся его решениями:

а) $-\frac{x}{7} > 3$; б) $\frac{x}{4} \geqslant -5$; в) $-\frac{3}{7}x > 15$.

49. Решите линейное неравенство и укажите два каких-либо числа, являющихся его решениями:

а) $2(3x - 2) - 3(2x - 3) \leqslant 15$;

б) $-5(x + 1) + 4(2x + 3) > 5x + 2$.

50. Найдите все значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения:

а) $y = \frac{1}{2}(3x - 1) - 10;$ б) $y = -\frac{2}{3}(4x + 7) + 8.$

51. Решите неравенство $\frac{x-1}{3} - 2x \leqslant \frac{3x+1}{4}$ и найдите его наименьшее целое решение.

52. Не выполняя построения графиков, определите, при каких значениях аргумента график функции $f(x) = \frac{x-2}{3} - x$ расположен ниже графика функции $f(x) = \frac{2x-1}{5} - \frac{13x-1}{15}$.

53. Решите неравенство:

а) $(x - 7)^2 \leqslant x(x - 14);$

б) $(2x - 5)^2 - 0{,}5x < (2x - 1)(2x + 1) - 15.$

54. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$(x - 6)^2 \geqslant (x + 6)(x - 6) + 0{,}5.$$

55. Решите неравенство

$$(4x - 3)^2 + (7x + 1)^2 < (5x - 4)(13x + 1).$$

56. Дана линейная функция $y = 3 - 4x$.

а) Найдите значение функции, если $x = 10$; $x = -0{,}5$; $x = 1{,}02$.

б) Найдите значение аргумента, при котором $y = 15$; $y = 0$; $y = -3{,}5$.

в) Выясните, какая из точек $A(0; -1)$; $B(-2; -5)$; $C(5; -17)$ принадлежит графику функции.

57. Постройте графики функций $y = 2x - 3$; $y = -x + 5$; $y = \frac{x}{2}$ и $y = -2$. Для каждой из функций найдите: а) область определения; б) множество значений; в) нули; г) значения аргумента, при которых функция принимает положительные и отрицательные значения; д) угловой коэффициент прямой; е) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат.

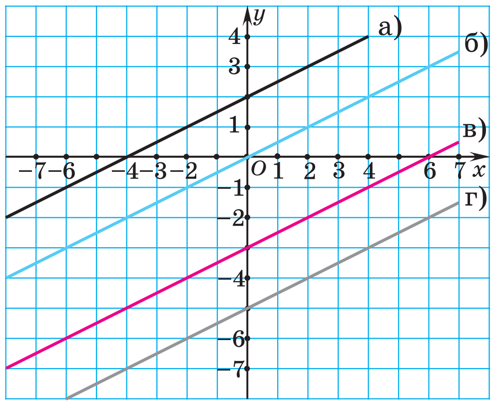


Рис. 1

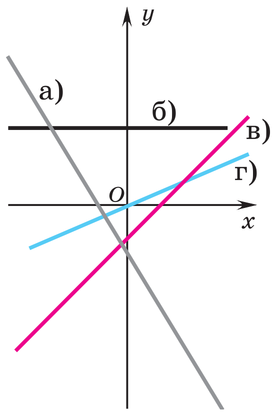


Рис. 2

58. На рисунке 1 изображены графики функций $y = 0{,}5x$, $y = 0{,}5x + 2$, $y = 0{,}5x - 3$, $y = 0{,}5x - 5$. Установите соответствие между функциями и их графиками.

59. Дана линейная функция $y = 4x + b$. Найдите значение b, при котором график этой функции:

а) проходит через начало координат;

б) проходит через точку $P(-2;\ 1)$;

в) пересекает ось Oy в точке с ординатой 5;

г) проходит через точку пересечения графиков функций $y = 0{,}5x + 1$ и $y = x - 1$.

60. На рисунке 2 изображены графики функции вида $y = kx + b$. Для каждой из функций определите знаки коэффициентов k и b.

61. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{1}{3}x - 4\right) - \frac{x^2}{6} + 8$.

Системы линейных уравнений

Уравнение вида $ax + by = c$, где x и y — переменные, a, b и c — некоторые числа, называется **линейным уравнением с двумя переменными.**

Упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$ называется **решением уравнения $ax + by = c$**, если при подстановке этих чисел в уравнение получается верное числовое равенство, т. е. числовое равенство $ax_0 + by_0 = c$ верное.

Если требуется найти все пары чисел $(x;\ y)$, являющиеся одновременно решениями и первого, и второго уравнения, то говорят, что задана система двух линейных уравнений с двумя переменными $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — некоторые числа, а x и y — переменные.

Системы линейных уравнений с двумя переменными можно решать способом подстановки и способом сложения.

62. Найдите координаты точек пересечения с осями координат графика уравнения:

а) $2x + 7y = 14$; б) $x - 4y = 18$.

63. Постройте графики уравнений системы и определите число решений системы:

а) $\begin{cases} 2x - y = 6, \\ -x + \frac{1}{2}y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3y = -1, \\ 2x - 6y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 2. \end{cases}$

64. Решите систему уравнений способом подстановки:

а) $\begin{cases} x + 3y = 8, \\ 2x - y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 4y = 20, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$

65. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3(2x - 7y) + 5y = 62, \\ 2(x + 3y) = 2 + 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{5y}{2} = 3, \\ 2x - 7y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{x - y}{3} - \frac{x + y}{2} = -8, \\ 7x + y = -4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{3x - 7}{4} - \frac{2y - 3}{5} = 1, \\ \frac{2x - y}{2} - 1 = y - 2. \end{cases}$

66. Прямая $y = kx + b$ проходит через точки $T(-2;\ 7)$ и $K(3;\ 8)$. Запишите уравнение этой прямой.

67. Не выполняя построения, найдите координаты точки пересечения графиков уравнений $5y - 3x = 10$ и $2{,}5y + 0{,}5x = 3$.

68. Пекарня получила заказ от крупного гипермаркета на выпечку пирогов и тортов. Каждый пирог стоит 15 р., а каждый торт — 20 р. Менеджер, принимавший заказ, не записал, сколько изделий каждого наименования нужно выпечь, но помнил, что всего нужно сделать 130 изделий на общую сумму 2100 р. Сколько пирогов и сколько тортов надо выпечь, чтобы выполнить заказ?

69. Готовясь к уроку математики, восьмиклассник просмотрел видеоролик по соответствующей теме, размещенный на едином информационно-образовательном ресурсе (eior.by), а затем решил загрузить на компьютер два файла с дополнительными материалами. В первую секунду загрузилось $\frac{1}{4}$ первого файла и $\frac{1}{3}$ второго файла, что составило 340 Кбайт. За вторую секунду загрузилось $\frac{1}{3}$ оставшейся части первого файла, что на 60 Кбайт меньше половины оставшейся части второго файла. Найдите размер каждого файла.

70. По трудовой путевке на Всебелорусскую молодежную стройку в Брестскую крепость студенческие отряды приезжают из различных регионов Беларуси. Часть студентов добирается только автобусом, а часть — только электричкой. Можно ли уложиться точно в 500 р., выделенных для 50 участников из одного региона, если билет на автобус стоит 11 р., а на электричку — 6 р.?

Глава 1

КВАДРАТНЫЕ КОРНИ И ИХ СВОЙСТВА. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Квадратный корень из числа. Арифметический квадратный корень

1.1. Найдите площадь квадрата, длина стороны которого равна: а) 0,7 см; б) 0,2 м.

1.2. Найдите значения выражений: 7^2; $(-7)^2$; $1{,}2^2$; $(-1{,}2)^2$; $\left(\frac{1}{3}\right)^2$; $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$.

1.3. Сравните значения выражений a^2 и $(-a)^2$ если: a — положительное число; a — отрицательное число; $a = 0$.

Рассмотрим задачу. Площадь боксерского ринга (рис. 3) равна 36 м^2. Какова длина его стороны, если он имеет форму квадрата?

Решение. Обозначим сторону квадрата через x м, тогда площадь квадрата равна x^2 м^2. Получим уравнение: $x^2 = 36$. Так как $6^2 = 36$ и $(-6)^2 = 36$, то это уравнение имеет два корня: 6 и –6. По условию задачи подойдет только число 6.

Ответ: длина стороны ринга равна 6 м.

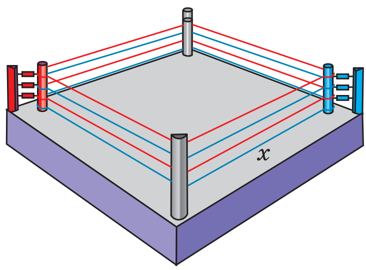


Рис. 3

При решении уравнения $x^2 = 36$ мы нашли два числа, квадрат каждого из которых равен 36. Каждое из этих чисел называется квадратным корнем из числа 36.

Определение

Квадратным корнем из числа *a* называется число, квадрат которого равен a.

Например, квадратные корни из числа 0,25 — это числа 0,5 и –0,5, так как $0{,}5^2 = 0{,}25$ и $(-0{,}5)^2 = 0{,}25$.

Из числа 0 существует только один квадратный корень — это число 0.

Квадратный корень из числа –100 не существует, так как квадрат любого числа есть число неотрицательное.

Так как квадраты противоположных чисел равны, то из положительного числа существует два квадратных корня. Один из них — положительный — называется **арифметическим квадратным корнем** из этого числа.

Арифметический квадратный корень из нуля равен нулю.

Определение

Арифметическим квадратным корнем из числа *a* называется неотрицательное число, квадрат которого равен *a*.

$\sqrt{a} = b$

$b \geqslant 0,$

$b^2 = a$

Например, 6 — арифметический квадратный корень из числа 36, поскольку $6 > 0$ и $6^2 = 36$.

Арифметический квадратный корень из числа *a* обозначается $\sqrt{a}$ и читается: «арифметический квадратный корень из числа *a*».

Можно записать: $\sqrt{36} = 6$. Знак «$\sqrt{\ }$» называют знаком квадратного корня или радикалом (от лат. *radix* — корень).

При чтении выражений, содержащих знак «$\sqrt{\ }$», слово «арифметический» часто опускают. Например, выражение $\sqrt{49}$ читают: «квадратный корень из 49».

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют еще **извлечением квадратного корня из числа.**

Пример. Выполните извлечение квадратного корня из числа: а) 121; б) 0,49; в) $\frac{1}{4}$.

Решение. а) $\sqrt{121} = 11$; б) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$; в) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

$\sqrt{25} = 5; \ \sqrt{81} = 9$

$\sqrt{0} = 0; \ \sqrt{1} = 1$

$\sqrt{0{,}64} = 0{,}8; \ \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$

Определение квадратного корня из числа

1. Найдите квадратные корни из числа: а) 256; б) 1600.	а) Числа 16 и −16 — квадратные корни из числа 256, так как $16^2 = 256$ и $(-16)^2 = 256$. б) Числа 40 и −40 — квадратные корни из числа 1600, так как $40^2 = 1600$ и $(-40)^2 = 1600$.

2. Найдите квадратные корни из числа: а) $\frac{25}{36}$; б) 0,04.	а) Числа $\frac{5}{6}$ и $-\frac{5}{6}$ — квадратные корни из числа $\frac{25}{36}$, так как $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ и $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$. б) Числа 0,2 и –0,2 — квадратные корни из числа 0,04, так как $0{,}2^2 = 0{,}04$ и $(-0{,}2)^2 = 0{,}04$.
3. Верно ли, что уравнение: а) $x^2 = 100$; б) $x^2 = -100$; в) $x^2 = 0$ — имеет 2 корня?	а) Верно, корни этого уравнения 10 и –10, так как $10^2 = 100$ и $(-10)^2 = 100$. б) Неверно, так как квадрат любого числа есть число неотрицательное. Уравнение $x^2 = -100$ не имеет корней. в) Неверно, так как число нуль является квадратом только одного числа. Уравнение имеет единственный корень — число 0.
Определение арифметического квадратного корня из числа	
4. Докажите, что: а) $\sqrt{81} = 9$; б) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$; в) $\sqrt{10\,000} = 100$.	а) $\sqrt{81} = 9$, так как $9 > 0$ и $9^2 = 81$; б) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$, так как $0{,}1 > 0$ и $0{,}1^2 = 0{,}01$; в) $\sqrt{10\,000} = 100$, так как $100 > 0$ и $100^2 = 10\,000$.
5. Найдите значение квадратного корня: а) $\sqrt{2{,}25}$; б) $\sqrt{\frac{9}{64}}$.	а) $\sqrt{2{,}25} = 1{,}5$, так как $1{,}5 > 0$ и $1{,}5^2 = 2{,}25$; б) $\sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$, так как $\frac{3}{8} > 0$ и $\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$.

6. Выполните извлечение квадратного корня, если это возможно: а) $\sqrt{0,36}$; б) $\sqrt{-25}$; в) $\sqrt{160\,000}$.	а) $\sqrt{0,36} = 0,6$. б) Выполнить действие невозможно, так как не существует числа, квадрат которого равен отрицательному числу. в) $\sqrt{160\,000} = 400$.

Соедините части предложений так, чтобы получились верные утверждения:
а) квадратным корнем из числа a называется;
б) арифметическим квадратным корнем из числа a называется;
1) неотрицательное число, квадрат которого равен a;
2) число, квадрат которого равен a.

1.4. Выберите верные утверждения:
а) числа 9 и –9 являются квадратными корнями из числа 81;
б) число –10 является арифметическим квадратным корнем из числа 100;
в) число 8 является арифметическим квадратным корнем из числа 64;
г) число 0,5 является арифметическим квадратным корнем из числа 2,5.

1.5. Среди чисел 16; 1; –36; 0,01; –4; 0; 0,0025 выберите те, из которых невозможно извлечь квадратный корень. Объясните свой выбор.

1.6. Выберите уравнения, имеющие два корня:

а) $x^2 = 49$; б) $x^2 = 0$; в) $x^2 = 0,25$;

г) $x^2 = -81$; д) $x^2 = \frac{9}{49}$; е) $x^2 = 2\frac{1}{4}$.

Найдите корни этих уравнений.

1.7. Прочитайте выражение:

а) $\sqrt{25}$; б) $\sqrt{900}$; в) $\sqrt{0,36}$; г) $\sqrt{\frac{16}{49}}$.

1.8. С помощью определения арифметического квадратного корня докажите, что:

а) $\sqrt{121} = 11$; б) $\sqrt{1} = 1$; в) $\sqrt{1,96} = 1,4$;

г) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$; д) $\sqrt{3\frac{1}{16}} = 1\frac{3}{4}$.

1.9. Выберите все верные равенства:

а) $\sqrt{9} = -3$; б) $\sqrt{0} = 0$; в) $\sqrt{1{,}44} = 0{,}12$;

г) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$; д) $\sqrt{\frac{1}{64}} = 0{,}125$; е) $\sqrt{0{,}01} = 0{,}1$.

Приведите по два примера извлечения квадратного корня из трехзначного числа; обыкновенной дроби; десятичной дроби.

1.10. Найдите значение квадратного корня:

а) $\sqrt{4}$; б) $\sqrt{36}$; в) $\sqrt{900}$;

г) $\sqrt{100}$; д) $\sqrt{250\,000}$; е) $\sqrt{10\,000}$;

ж) $\sqrt{0{,}04}$; з) $\sqrt{0{,}49}$; и) $\sqrt{1{,}21}$;

к) $\sqrt{1{,}69}$; л) $\sqrt{0{,}0001}$; м) $\sqrt{0{,}0081}$.

1.11. Выполните извлечение квадратного корня:

а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{16}{9}}$; г) $\sqrt{\frac{225}{49}}$;

д) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; е) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$; ж) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$; з) $\sqrt{4\frac{21}{25}}$.

1.12. Найдите значение выражения $a - \sqrt{a}$, если:

а) $a = 25$; б) $a = 0$; в) $a = 1600$; г) $a = 1$;

д) $a = 0{,}49$; е) $a = 1{,}21$; ж) $a = \frac{4}{9}$; з) $a = 1\frac{11}{25}$.

1.13. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел (форзац 1), найдите значение квадратного корня:

а) $\sqrt{289}$; б) $\sqrt{961}$; в) $\sqrt{2401}$; г) $\sqrt{9409}$;

д) $\sqrt{2025}$; е) $\sqrt{3249}$; ж) $\sqrt{32\,400}$; з) $\sqrt{168\,100}$;

и) $\sqrt{6{,}25}$; к) $\sqrt{39{,}69}$; л) $\sqrt{73{,}96}$; м) $\sqrt{0{,}3364}$.

1.14. Сравните числа:

а) $\sqrt{121}$ и $\sqrt{100}$; б) $\sqrt{625}$ и $\sqrt{676}$; в) $\sqrt{16}$ и 8;

г) $\frac{1}{6}$ и $\sqrt{0{,}36}$; д) 1 и $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; е) $\frac{1}{2}$ и $\sqrt{\frac{25}{81}}$;

ж) $\sqrt{0{,}16}$ и $\sqrt{\frac{4}{25}}$; з) $\sqrt{2{,}25}$ и $\sqrt{1\frac{15}{49}}$; и) $\sqrt{\frac{1}{36}}$ и $\frac{1}{36}$.

1.15. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{36} + \sqrt{49}$; б) $\sqrt{100} - \sqrt{64}$; в) $\sqrt{0{,}09} + \sqrt{0{,}01}$;

г) $\sqrt{2{,}25} - \sqrt{2{,}56}$; д) $\sqrt{25} + \sqrt{\frac{1}{9}}$; е) $-\sqrt{64} - \sqrt{\frac{1}{16}}$;

ж) $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{25}{81}}$; з) $\sqrt{\frac{25}{36}} - \sqrt{\frac{9}{16}}$; и) $18 : \sqrt{81}$;

к) $\sqrt{225} \cdot \sqrt{\frac{4}{25}}$; л) $-\sqrt{2,56} : \sqrt{256}$; м) $\sqrt{2\frac{46}{49}} \cdot \sqrt{196}$.

1.16. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, найдите значения выражений $\sqrt{a}$; $\sqrt{100a}$; $\sqrt{0,0001a}$, если:
а) $a = 1369$; б) $a = 2704$.

1.17. Найдите значения выражений $\sqrt{x} - \sqrt{y}$; $\sqrt{x} - y$; $x - \sqrt{y}$; $\sqrt{x - y}$ при $x = 1,69$, $y = 1,44$.

1.18. Вычислите:

а) $2\sqrt{64} + \sqrt{25}$; б) $\sqrt{81} - \frac{1}{3}\sqrt{144}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{0,0025}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{0,04}} + 5\sqrt{0,16}$; д) $-\sqrt{\frac{16}{25}} - \frac{3}{7} \cdot \sqrt{1\frac{24}{25}}$; е) $\frac{0,1\sqrt{81}}{\sqrt{100}}$;

ж) $15 \cdot \sqrt{\frac{49}{81}} \cdot \sqrt{\frac{9}{25}}$; з) $\frac{\sqrt{0,01}}{\sqrt{0,0001} + \sqrt{0,0009}}$; и) $-\frac{\sqrt{2,25}}{3\sqrt{0,04}}$.

1.19. Найдите значение выражения $\sqrt{2a - 1}$ при:
а) $a = 5$; б) $a = 0,5$;
в) $a = 0,58$; г) $a = 2\frac{11}{49}$.
Можно ли найти значение данного выражения при $a = -4$?

1.20. Сравните значения выражений $\sqrt{m^2 - n^2}$ и $m - n$ при:
а) $m = 5$, $n = 4$; б) $m = 1,3$, $n = 1,2$; в) $m = 1$, $n = \frac{8}{17}$.

1.21. Найдите значение выражения $-\sqrt{p} - \sqrt{k^3}$ при:
а) $p = 9$, $k = 4$; б) $p = 0$, $k = 1$; в) $p = 0,0324$, $k = 0,01$.
Подберите такие значения переменных p и k, при которых значение данного выражения равно 0; –5.

1.22. При $x = 24$, $y = 25$ найдите значение выражения:

а) $\sqrt{y - x}$; б) $x \cdot \sqrt{y}$; в) $\sqrt{y^2 - x^2}$;

г) $\sqrt{(x - y)^2}$; д) $\sqrt{(y - x) : y}$; е) $-\sqrt{(x + 1) \cdot y}$.

1.23. Вычислите:

а) $0,7 - \frac{1}{3}\sqrt{1,44}$; б) $\frac{1}{26}\sqrt{1,69} - 0,1$;

в) $-\frac{1}{7}\sqrt{196}-1{,}5\sqrt{36}$;

г) $1000\sqrt{0{,}0324}-\frac{5}{34}\sqrt{289}$;

д) $\frac{3}{8}\cdot\sqrt{2{,}56}+\sqrt{225}:\sqrt{\frac{1}{9}}$;

е) $\frac{1}{6}\sqrt{5{,}76}-\sqrt{196}:0{,}2$;

ж) $31\cdot\sqrt{0{,}01}-15:\sqrt{6{,}25}$;

з) $95:\sqrt{3{,}61}+12\cdot\sqrt{0{,}25}$.

1.24. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2-\sqrt{0{,}0016}}$;

б) $\sqrt{3+\sqrt{0{,}0576}}$;

в) $\sqrt{\sqrt{1{,}69}-\sqrt{0{,}0081}}$;

г) $\sqrt{\sqrt{4{,}84}+\sqrt{0{,}0025}}$.

1.25. Примените формулу разности квадратов двух выражений и вычислите:

а) $\sqrt{145^2-144^2}$;

б) $\sqrt{3{,}13^2-3{,}12^2}$;

в) $\sqrt{\left(\frac{25}{49}\right)^2-\left(\frac{24}{49}\right)^2}$;

г) $\sqrt{\left(6\frac{3}{8}\right)^2-\left(5\frac{5}{8}\right)^2}$.

1.26. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) двух выражений и вычислите:

а) $\sqrt{2{,}3^2+2\cdot2{,}3\cdot6{,}7+6{,}7^2}$;

б) $\sqrt{\left(7\frac{1}{5}\right)^2-2\cdot7\frac{1}{5}\cdot3{,}2+3{,}2^2}$;

в) $\sqrt{2{,}26^2-2{,}26\cdot2{,}02+1{,}01^2}$;

г) $\sqrt{\left(3\frac{3}{4}\right)^2+4{,}2\cdot3{,}75+2{,}1^2}$.

1.27. Из двух равных квадратов сложили прямоугольник. Площадь одного квадрата равна 225 см^2. Найдите периметр прямоугольника.

1.28. Обьем цилиндра (рис. 4) вычисляется по формуле $V=\pi r^2h$. Выразите из этой формулы r — радиус основания цилиндра.

1.29. Один из занавесов сцены Национального академического Большого театра оперы и балета Республики Беларусь имеет форму прямоугольника площадью 288 м^2, ширина которого составляет $\frac{1}{2}$ длины. Найдите, сколько метров бархатной тесьмы потребуется, чтобы украсить занавес по периметру.

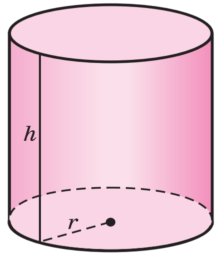


Рис. 4

1.30. Площадь Государственного флага в Минске представляет собой круг площадью около 7850 м^2, в центре которого располагается 70-метровая стела-флагшток с белорусским флагом на вершине. Вокруг площади вдоль пешеходной дорожки расположены стелы с картой Республики Беларусь, текстом гимна, гербами областей и г. Минска (рис. 5). Найдите приблизительную длину этой дорожки (число π округлите до сотых).

Рис. 5

1.31. Найдите значение выражения:

а) $-0{,}17 \cdot \sqrt{10\,000} + \dfrac{4}{\sqrt{2{,}56}} - 5{,}5 \cdot \sqrt{324}$;

б) $\sqrt{1{,}44} \cdot \sqrt{6{,}25} - \sqrt{2^3 + 17}$;

в) $\sqrt{26^2 - 24^2} + \sqrt{1\dfrac{11}{25}} - 0{,}8 \cdot \sqrt{30{,}25}$;

г) $\sqrt{5\dfrac{44}{49}} - \dfrac{2}{\sqrt{1{,}96}} + \sqrt{8^2 + 80}$.

1.32. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\sqrt{7\dfrac{58}{81}}}$; б) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{6561}}}$; в) $\sqrt{46 + \sqrt{13 - \sqrt{16}}}$;

г) $\sqrt{3\sqrt{729}}$; д) $\sqrt{6\dfrac{2}{3}\sqrt{9\sqrt{625}}}$; е) $\sqrt{1 + \sqrt{118 - 3\sqrt{324}}}$.

1.33. Найдите значения числа a, при которых уравнение $x^2 = a - 2$:

а) имеет два корня;

б) имеет только один корень;

в) не имеет корней.

1.34. Верно ли, что при любых значениях числа b уравнение $x^2 = 4b^2 + 4b + 1$ имеет два корня?

1.35. Пользуясь определением арифметического квадратного корня, выберите все верные равенства:

а) $\sqrt{25} = 5$; б) $\sqrt{1} = -1$; в) $\sqrt{1{,}69} = 1{,}3$;

г) $\sqrt{0{,}16} = 0{,}04$; д) $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$; е) $\sqrt{3\frac{1}{16}} = 3{,}5$.

1.36. Найдите значение квадратного корня:

а) $\sqrt{9}$; б) $\sqrt{36}$; в) $\sqrt{400}$; г) $\sqrt{4900}$;

д) $\sqrt{0{,}25}$; е) $\sqrt{0{,}0004}$; ж) $\sqrt{1{,}96}$; з) $\sqrt{2{,}25}$;

и) $\sqrt{\frac{1}{16}}$; к) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; л) $\sqrt{\frac{64}{9}}$; м) $\sqrt{\frac{100}{81}}$;

н) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; о) $\sqrt{3\frac{22}{49}}$; п) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$; р) $\sqrt{5\frac{20}{121}}$.

1.37. Найдите значение выражения $x + \sqrt{x}$, если:

а) $x = 0$; б) $x = 1$; в) $x = 25$;

г) $x = 0{,}49$; д) $x = 6400$; е) $x = \frac{9}{121}$;

ж) $x = 1\frac{7}{9}$; з) $x = 1\frac{24}{25}$; и) $x = 3\frac{1}{16}$.

1.38. Вычислите:

а) $\sqrt{16} + \sqrt{9}$; б) $\sqrt{121} - \sqrt{81}$; в) $\sqrt{0{,}16} + \sqrt{0{,}04}$;

г) $\sqrt{1{,}21} - \sqrt{1{,}44}$; д) $-\sqrt{25} - \sqrt{\frac{1}{4}}$; е) $\sqrt{\frac{9}{25}} + \sqrt{\frac{49}{100}}$;

ж) $\sqrt{\frac{9}{49}} - \sqrt{\frac{25}{64}}$; з) $7 : \sqrt{196}$; и) $-\sqrt{625} \cdot \sqrt{6\frac{19}{25}}$;

к) $\sqrt{0{,}01} : \sqrt{100}$; л) $\sqrt{324} : \sqrt{0{,}36}$; м) $\sqrt{0{,}25} : \sqrt{2{,}25}$.

1.39. Пользуясь таблицей квадратов натуральных чисел, найдите значения выражений $\sqrt{x}$; $\sqrt{10\,000x}$; $\sqrt{0{,}01x}$, если:

а) $x = 4225$; б) $x = 1444$.

1.40. Найдите значения выражений $\sqrt{m} + \sqrt{n}$; $\sqrt{m} + n$; $m + \sqrt{n}$; $\sqrt{m + n}$ при $m = 5{,}76$, $n = 0{,}49$.

1.41. Найдите значение выражения:

а) $3\sqrt{81} - \frac{1}{2}\sqrt{36}$; б) $-\frac{2}{\sqrt{0{,}09}}$;

в) $\sqrt{1\frac{9}{16}} + \frac{2}{7}\sqrt{0{,}49}$; г) $\frac{\sqrt{2{,}25} + 2\sqrt{1{,}21}}{\sqrt{400}}$.

1.42. Найдите, если это возможно, значение выражения $\sqrt{4m+3}$ при:

а) $m = 11{,}5$; б) $m = \frac{1}{4}$; в) $m = 0{,}06$;

г) $m = -1$; д) $m = -0{,}75$; е) $m = -0{,}5$.

1.43. Найдите значение выражения $\sqrt{b^2 + c^2}$ при:

а) $b = 8$, $c = 6$; б) $b = 0$, $c = -3$;

в) $b = 0{,}3$, $c = 0{,}4$; г) $b = \frac{15}{17}$, $c = \frac{8}{17}$.

1.44. Вычислите:

а) $1{,}8 + \frac{1}{7}\sqrt{0{,}49}$; б) $-\frac{1}{19}\sqrt{361} - 100\sqrt{2{,}25}$;

в) $25 \cdot \sqrt{0{,}04} - 12 : \sqrt{3{,}24}$; г) $\frac{3}{13} \cdot \sqrt{6{,}76} + \sqrt{256} : 0{,}4$.

1.45. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3 - \sqrt{0{,}0121}}$; б) $\sqrt{\sqrt{0{,}36} + \sqrt{0{,}0016}}$;

в) $\sqrt{\sqrt{0{,}04} - \sqrt{0{,}0016}}$; г) $\sqrt{\sqrt{0{,}49} + \sqrt{0{,}0121}}$.

1.46. Примените формулы сокращенного умножения и вычислите:

а) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; б) $\sqrt{8{,}5^2 - 8{,}4^2}$;

в) $\sqrt{\left(15\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 15\frac{1}{4} \cdot 6{,}25 + 6{,}25^2}$;

г) $\sqrt{\left(8\frac{1}{7}\right)^2 + 2 \cdot 8\frac{1}{7} \cdot 3\frac{6}{7} + \left(3\frac{6}{7}\right)^2}$.

1.47. Ширина прямоугольника составляет 65 % его длины. Найдите периметр прямоугольника, если его площадь равна 41,6 м^2.

1.48. Два квадратных земельных участка A и B площадью 1,21 а и 0,25 а соединены так, как показано на рисунке 6. Определите, сколько метров изгороди потребуется, чтобы огородить по периметру получившийся участок.

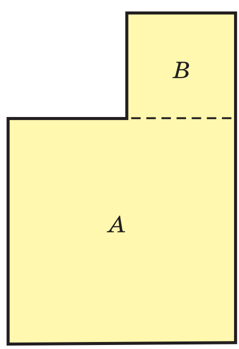


Рис. 6

1.49. Для проведения математического фестиваля изготовили куб, на покраску которого ушло 2,7 кг краски. Площадь поверхности куба вычисляется по формуле $S = 6a^2$, где a — длина ребра куба (рис. 7). Найдите a, зная, что расход краски составляет 200 г на один квадратный метр.

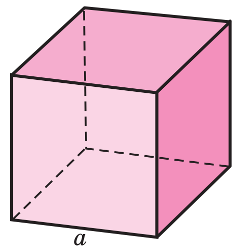


Рис. 7

1.50. Найдите значение выражения

$$\frac{38}{\sqrt{3{,}61}} - 2\frac{11}{14} \cdot \sqrt{1\frac{27}{169}} - 2 \cdot \sqrt{8^2 + 15^2}.$$

1.51. Найдите значение выражения $a - 63a^{-2}$, если $a = 3$.

1.52. Решите уравнение $(2x - 1)^2 - 2(x - 3) = (x + 5)(4x - 3)$.

1.53. Из чисел 5; –1,3; $\frac{4}{9}$; 0; –1; 12,98; 37; $-\frac{6}{7}$ выберите: а) натуральные числа; б) целые числа; в) рациональные неположительные числа. Приведите примеры чисел, которые являются целыми, но не являются натуральными; являются рациональными, но не являются целыми.

1.54. Постройте график функции $y = -x + 6$. С помощью графика найдите: а) нуль функции; б) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; в) координаты точки пересечения графика функции с осью ординат. Для функции $y = 2x + 5$ выполните задания а)—в) без построения графика.

1.55. Магазин закупает фрукты по оптовой цене 2 р. 20 к. за килограмм, а продает с наценкой 15 %. Хватит ли покупателю 7 р. 50 к., чтобы купить 3 кг фруктов в этом магазине?

1.56. Среди сотрудников ООО «Белроботоотехника» 23 человека получили высшее экономическое образование в БГЭУ, 15 человек окончили БГУ, 5 человек окончили оба эти ВУЗа, получив два высших образования. Среднее специальное образование имеют 3 сотрудника. Сколько человек работает в ООО «Белроботоотехника»? Сколько процентов сотрудников окончили только БГЭУ?

§ 2. Множество иррациональных чисел. Множество действительных чисел

1.57. Представьте числа 5,2; 6; –2; $3\frac{2}{3}$ в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число.

1.58. Выберите верные утверждения:

а) $2 \in \boldsymbol{N}$; б) $-1{,}2 \notin \boldsymbol{Z}$; в) $\frac{2}{3} \notin \boldsymbol{Q}$.

1.59. Представьте обыкновенные дроби $\frac{2}{25}$; $\frac{2}{3}$; $1\frac{3}{4}$; $\frac{5}{12}$ в виде десятичных.

Всякое рациональное число (целое или дробное) можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число, а любую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби — конечной или бесконечной периодической дроби.

Для того чтобы найти длину стороны квадрата, площадь которого равна, например, 2 см^2, 3 м^2 или 15 см^2, необходимо вычислить квадратный корень из этих чисел. Возникает вопрос: какому числовому множеству принадлежат числа вида $\sqrt{x}$, где число x не является квадратом некоторого рационального числа (такие, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$ и т. п.)?

Рассмотрим, например, число $\sqrt{2}$.

Предположим, что это число рациональное, т. е. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь и $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

По определению арифметического квадратного корня получим: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, $\frac{m^2}{n^2} = 2$, тогда $2n^2 = m^2$. Число $2n^2$ является четным, значит, числа m^2 и m тоже четные.

Запишем число m в виде $m = 2k$, где $k \in \boldsymbol{N}$. Равенство $2n^2 = m^2$ примет вид $2n^2 = (2k)^2$, или $2n^2 = 4k^2$, а значит, $n^2 = 2k^2$, т. е. число n — четное.

Таким образом, числитель и знаменатель дроби $\frac{m}{n}$ — четные числа, значит, дробь $\frac{m}{n}$ сократима. Получили противоречие с предположением. Следовательно, число $\sqrt{2}$ не является рациональным.

Не существует рационального числа, квадрат которого равен 2.

Такие числа, как $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, называют *иррациональными*. Их нельзя записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби.

Для вычисления значений корней такого вида, например $\sqrt{3}$, можно поступить так:

$1 < \sqrt{3} < 2$, так как $1^2 < 3 < 2^2$,

$1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, так как $1{,}7^2 < 3 < 1{,}8^2$,

$1{,}73 < \sqrt{3} < 1{,}74$, так как $1{,}73^2 < 3 < 1{,}74^2$. Далее получим:

$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$,

$1{,}7320 < \sqrt{3} < 1{,}7321$,

$1{,}73205 < \sqrt{3} < 1{,}73206$ и т. д.

Получили бесконечную непериодическую десятичную дробь $\sqrt{3} = 1{,}73205...$.

Иррациональные числа — бесконечные непериодические десятичные дроби. Множество иррациональных чисел обозначают буквой *I*.

К иррациональным числам относится, например, число $\pi = 3{,}1415...$. Бесконечная непериодическая десятичная дробь 2,1211211121111... (количество цифр 1 после каждой цифры 2 увеличивается на одну) также является иррациональным числом.

Объединение множеств рациональных и иррациональных чисел называют множеством действительных чисел и обозначают буквой *R*.

С помощью кругов Эйлера (рис. 8) можно изобразить соотношения между числовыми множествами.

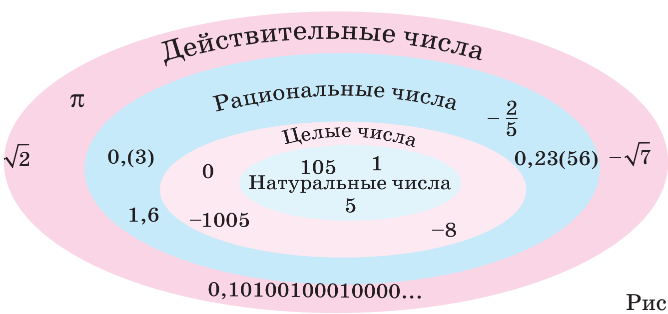


Рис. 8

Так же как и рациональные числа, действительные числа изображают на координатной прямой. Обычно на координатной прямой отмечают приближенное значение иррационального числа (рис. 9).

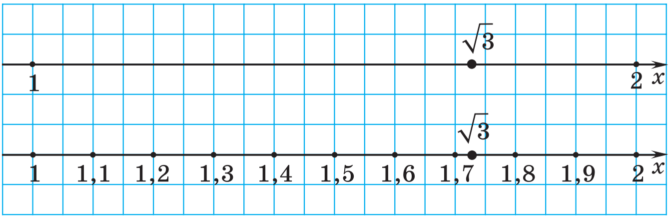


Рис. 9

При сравнении иррациональных чисел рассматривают их десятичные приближения, пока не появится различие в цифрах какого-либо разряда.

Например, сравним $\sqrt{10} = 3{,}1622776...$ и $\pi = 3{,}1415...$. Так как цифра сотых у первого числа больше, чем у второго, то $\sqrt{10} > \pi$.

Иррациональные числа	
1. Какие из данных чисел являются иррациональными: а) $\sqrt{3}$; б) $-\frac{3}{7}$; в) 3,525225222... (десятичные знаки записываются по правилу: количество цифр 2, следующих за каждой цифрой 5, увеличивается на одну)?	а) $\sqrt{3}$ — иррациональное число. б) $-\frac{3}{7} = \frac{-3}{7}$ — число рациональное, так как может быть представлено в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, а n — натуральное число. в) 3,525225222... — иррациональное число, так как представляет собой бесконечную непериодическую десятичную дробь.
Действительные числа	
2. Является ли верным утверждение: а) $-3 \in \boldsymbol{Q}$;	а) Утверждение верное, так как число -3 является рациональным.

б) $7{,}2 \in \boldsymbol{R}$; в) $\sqrt{9} \in \boldsymbol{I}$?	б) Утверждение верное, так как 7,2 — число рациональное, а множество рациональных чисел является подмножеством множества действительных чисел, $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$. в) Утверждение неверное, так как $\sqrt{9} = 3 \in \boldsymbol{N}$.
3. Можно ли числа $\frac{2}{13}$; $\sqrt{5}$ представить в виде бесконечных периодических десятичных дробей? Представьте, если это возможно.	Запишем дробь $\frac{2}{13}$ в виде частного: $\frac{2}{13} = 2 : 13$ — и выполним деление. После цифры 6 в частном цифры начнут повторяться: $\frac{2}{13} = 0{,}(153846)$, т. е. число $\frac{2}{13}$ можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. $\sqrt{5}$ — иррациональное число, а поэтому не представимо в виде бесконечной периодической десятичной дроби.
4. Сравните числа π и $\frac{22}{7}$ (число Архимеда).	$\pi = 3{,}1415...$. $\frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} = 3{,}1428571...$. Так как у второго числа цифра тысячных больше, то $\pi < \frac{22}{7}$.

1. Какие из следующих утверждений верные: а) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; б) $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; в) $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{Z}$; г) $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{R}$; д) $\boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R}$?

2. Верно ли, что не существует рационального числа, квадрат которого равен: а) 3; б) 0,09; в) 1,6?

1.60. Из чисел –1,8; 12; $\frac{4}{7}$; $\sqrt{5}$; 0; 2,13; –13; $-\frac{3}{11}$; 78; π; –6,7 выберите: а) натуральные; б) целые; в) рациональные; г) иррациональные. Какому числовому множеству принадлежат все эти числа?

1.61. Выберите верные утверждения:

а) $-6 \in \boldsymbol{Z}$; б) $0 \in \boldsymbol{N}$; в) $\sqrt{13} \in \boldsymbol{I}$;

г) $-\frac{2}{13} \in \boldsymbol{R}$; д) $5{,}6 \in \boldsymbol{Q}$; е) $-\sqrt{11} \in \boldsymbol{R}$.

1.62. Верно ли, что:

а) $-75 \notin \boldsymbol{Z}$; б) $\sqrt{51} \notin \boldsymbol{Q}$; в) $-\sqrt{7} \notin \boldsymbol{N}$;

г) $0 \notin \boldsymbol{Z}$; д) $\frac{3}{7} \notin \boldsymbol{I}$; е) $8{,}9 \notin \boldsymbol{R}$?

1.63. Какие из чисел $\sqrt{16}$; $\sqrt{1}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{0{,}49}$; $\sqrt{3{,}6}$ являются иррациональными?

1.64. Приведите по два примера числа a, для которого известно, что:

а) $a \in \boldsymbol{Z}$, но $a \notin \boldsymbol{N}$; б) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{Z}$;

в) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{I}$; г) $a \in \boldsymbol{R}$, но $a \notin \boldsymbol{Q}$.

1.65. Из чисел $\frac{5}{9}$; $\sqrt{15}$; $\frac{23}{41}$; $\sqrt{0{,}2}$ выберите те, которые можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат выбранные числа?

1.66. Одна из точек на координатной прямой (рис. 10) соответствует числу $\sqrt{90}$. Укажите эту точку.

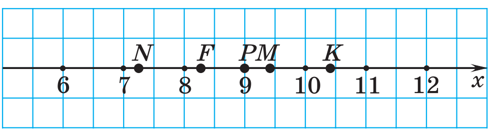


Рис. 10

1.67. На координатной прямой отметьте приближенные значения чисел $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ $\sqrt{7}$ (в качестве единичного отрезка возьмите 10 клеток тетради).

1.68. На координатной прямой постройте точки $A(3)$; $B\left(-\frac{1}{2}\right)$; $C\left(\sqrt{2}\right)$; $D(-2{,}5)$; $E\left(-\sqrt{3}\right)$.

1.69. Назовите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{15}$.

1.70. Какие из чисел $\sqrt{18}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{30}$ на координатной прямой находятся между числами 5 и 6?

1.71. Найдите целое число, находящееся на координатной прямой между числами $\sqrt{73}$ и $\sqrt{92}$.

1.72. Найдите все целые числа, находящиеся на координатной прямой между числами:

а) $\sqrt{31}$ и $\sqrt{89}$; б) $-\sqrt{17}$ и $\sqrt{26}$; в) $-\sqrt{120}$ и $-\sqrt{8}$.

1.73. Верно ли, что:

а) $\sqrt{29}+\sqrt{41}>11$; б) $\sqrt{79}+\sqrt{13}<13$?

1.74. Сравните числа:

а) $\sqrt{26}$ и 5; б) $\sqrt{3}$ и 1,7;

в) π и 3,141; г) $\frac{\pi}{2}$ и $\sqrt{2}$.

1.75. Расположите в порядке убывания числа 4, $\sqrt{6}$ и $\sqrt{17}$.

1.76. Найдите все целые:

а) положительные решения неравенства $3x \leqslant \sqrt{37}$;

б) отрицательные решения неравенства $-2x \leqslant \sqrt{63}$.

1.77. Зная, что $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените значение выражения:

а) $2\sqrt{5}+\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$.

1.78. Докажите, что число $\sqrt{7}$ является иррациональным.

1.79. Верно ли, что: а) число 8 является рациональным; б) число $\sqrt{15}$ является иррациональным; в) число 0 является натуральным; г) число $\frac{2}{7}$ является действительным; д) число $\sqrt{81}$ является иррациональным? Приведите примеры чисел, которые являются рациональными, но не являются целыми; являются действительными, но не являются рациональными.

1.80. Из чисел $\frac{7}{11}$; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{19}$; $\sqrt{4{,}9}$ выберите те, которые нельзя представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Какому числовому множеству принадлежат выбранные числа?

1.81. На координатной прямой отметьте приближенные значения чисел $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{15}$; $-\sqrt{3}$; $-\sqrt{10}$; $-\sqrt{15}$ (в качестве единичного отрезка возьмите 2 клетки тетради).

1.82. На координатной прямой постройте точки $A(2)$; $B(-0{,}8)$; $C\left(-\sqrt{2}\right)$; $D(3{,}5)$; $E\left(\sqrt{5}\right)$.

1.83. Назовите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{3}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{17}$.

1.84. Найдите все целые числа, находящиеся на координатной прямой между числами $\sqrt{45}$ и $\sqrt{102}$.

1.85. Сравните числа:

а) $\sqrt{35}$ и 6; б) $\sqrt{2}$ и 1,4; в) π и 3,1415.

1.86. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{13}$, $\sqrt{7}$ и 3.

1.87. Зная, что $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ и $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, оцените значение выражения $2\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

1.88. Докажите, что число $\sqrt{5}$ является иррациональным.

1.89. Верно ли, что если $a < b$, то:

а) $a + 3 < b + 3$; б) $-5a < -5b$;

в) $a - 4 < b - 4$; г) $\frac{a}{9} < \frac{b}{9}$?

1.90. Вычислите:

а) $(7^{-2})^{-4} : (7^{-3})^{-3}$; б) $(2{,}5^{8})^{0} \cdot 2{,}5^{-1}$; в) $\frac{9^{-4} \cdot 9^{-15}}{27^{-12}}$.

1.91. Найдите значения переменной, при которых значение произведения $(3x - 1)(3x + 1)$ не превосходит значения суммы $9x^2 + 5x$.

1.92. В Минске установлены контейнеры для сбора макулатуры (рис. 11). На них есть информация о том, что 60 кг собранной макулатуры спасают от вырубки одно дерево. Если каждый восьмиклассник вашей школы сдаст по 3 кг макулатуры, то сколько деревьев будет спасено? Сколько деревьев смогут спасти все учащиеся вашей школы, если каждый из них сдаст по 5 кг макулатуры?

Рис. 11

§ 3. Свойства квадратных корней

1.93. Найдите значение выражения:

а) $0{,}5^6 \cdot 2^6$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-7} \cdot 3^{-7}$; в) $\frac{6^5}{12^5}$.

1.94. Вычислите: $|-12|+|5{,}5|-|-0{,}7|$.

1.95. При каких значениях a верно равенство:

а) $|a| = a$; б) $|-a| = -a$?

Рассмотрим задачи. 1) Какова сторона участка газона квадратной формы, если его площадь равна площади прямоугольного участка со сторонами a и b (рис. 12)?

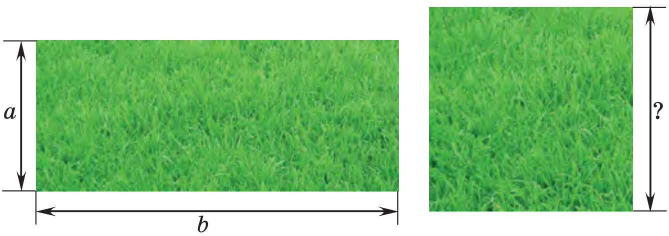


Рис. 12

Поскольку по условию задачи площадь квадрата равна площади прямоугольника, т. е. равна произведению a и b, то сторона квадрата равна $\sqrt{ab}$.

2) ОАО «Керамин» (г. Минск) выпускает более 100 коллекций плитки. Новоселы выбрали квадратную плитку трех видов: со стороной a, со стороной b, а также плитку большего размера, площадь которой равна сумме площадей плиток первых двух видов (рис. 13). Какова сторона большой квадратной плитки?

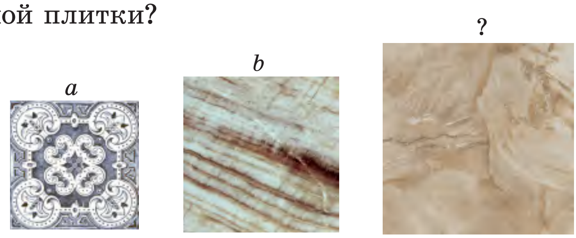


Рис. 13

Площадь большой плитки равна $a^2 + b^2$, а сторона плитки равна $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Решение многих задач приводит к выражениям, содержащим под знаком корня сумму, произведение и другие выражения. Выражения, стоящие под знаком корня, называются **подкоренными**.

Например, для корней $\sqrt{2{,}25}$, $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{4a^2+4ab+b^2}$ подкоренными выражениями соответственно являются $2{,}25$, ab, a^2+b^2, $4a^2+4ab+b^2$.

$\sqrt{a}$,
a — подкоренное выражение,
$a \geqslant 0$

Подкоренные выражения принимают только неотрицательные значения.

Например, выражения $\sqrt{-25}$ и $\sqrt{-a^2-1}$ не имеют смысла, так как корня из отрицательного числа не существует во множестве действительных чисел.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, где $a \geqslant 0$

По определению арифметического квадратного корня, если $\sqrt{a} = x$, то $x^2 = a$, значит, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = x^2 = a$, т. е. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Например, $\left(\sqrt{25}\right)^2 = 25$;

$\left(\sqrt{3{,}59}\right)^2 = 3{,}59$;

$\left(\sqrt{2\frac{6}{19}}\right)^2 = 2\frac{6}{19}$.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

$$\left(\sqrt{0{,}7}\right)^2 = 0{,}7$$

$$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^2 = 9 \cdot 5 = 45$$

Для вычисления значений корней и выполнения действий с корнями применяются свойства.

Свойство 1. Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$,
где $a \geqslant 0$,
$b \geqslant 0$

Докажем это свойство для корня из произведения двух множителей.

Доказательство. Пусть $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = t$. Покажем, что $\sqrt{ab} = t$, т. е. 1) $t \geqslant 0$ и 2) $t^2 = ab$.

1) По определению арифметический квадратный корень из числа есть число неотрицательное, значит, $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b} \geqslant 0$, а так как произведение двух неотрицательных множителей есть число неотрицательное, то $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$, значит, $t \geqslant 0$.

2) По свойству степени с целым показателем получим: $t^2 = \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$.

Таким образом, $t \geqslant 0$ и $t^2 = ab$, значит, $\sqrt{ab} = t$. Так как $t = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Пример 1. Вычислите: $\sqrt{144 \cdot 625}$.

Решение. $\sqrt{144 \cdot 625} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{625} = 12 \cdot 25 = 300$.

$$\sqrt{36 \cdot 25} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = 6 \cdot 5 = 30$$
$$\sqrt{0{,}04 \cdot 81} = \sqrt{0{,}04} \cdot \sqrt{81} = 0{,}2 \cdot 9 = 1{,}8$$

Свойство 2. Квадратный корень из частного равен частному корней из делимого и делителя, если делимое — неотрицательное число, а делитель — положительное.

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$
где $a \geqslant 0$, $b > 0$

Доказательство этого свойства аналогично предыдущему. Проведите его самостоятельно.

Пример 2. Вычислите: $\sqrt{\dfrac{1225}{0{,}25}}$.

Решение. $\sqrt{\dfrac{1225}{0{,}25}} = \dfrac{\sqrt{1225}}{\sqrt{0{,}25}} = \dfrac{35}{0{,}5} = 70$.

$$\sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5} = 2{,}6$$
$$\sqrt{\frac{0{,}04}{36}} = \frac{\sqrt{0{,}04}}{\sqrt{36}} = \frac{0{,}2}{6} = \frac{1}{30}$$

Свойства квадратных корней применяются как слева направо, так и справа налево:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$; $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$, где $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Пример 3. Вычислите:

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$; б) $\dfrac{\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{2}}$.

Решение.

а) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$;

б) $\dfrac{\sqrt{0{,}5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{0{,}5}{2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$.

$$\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32 \cdot 2} = \sqrt{64} = 8$$
$$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

Свойство 3. Квадратный корень из квадрата числа равен модулю этого числа.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Доказательство. По определению модуля

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Если $a \geqslant 0$, то по определению квадратного корня из числа: $\sqrt{a^2} = a$, так как $a \geqslant 0$ и $a^2 = a^2$.

Если $a < 0$, то по определению квадратного корня из числа: $\sqrt{a^2} = -a$, так как $-a > 0$ и $(-a)^2 = a^2$.

Получили $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0; \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$

Таким образом, $\sqrt{a^2} = |a|$.

Например, $\sqrt{6^2} = |6| = 6$;

$\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$;

$\sqrt{25m^2} = |5m| = 5|m|$; $\sqrt{\dfrac{c^2}{9}} = \dfrac{|c|}{3}$.

$$\sqrt{11^2} = |11| = 11$$

$$\sqrt{(-13)^2} = |-13| = 13$$

$$\sqrt{36a^2} = |6a| = 6|a|$$

$$\sqrt{\frac{x^2}{49}} = \left|\frac{x}{7}\right| = \frac{|x|}{7}$$

Квадратный корень из произведения	
1. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{0{,}0625 \cdot 1{,}44}$; б) $\sqrt{104^2 - 40^2}$; в) $\sqrt{27 \cdot 75}$.	а) $\sqrt{0{,}0625 \cdot 1{,}44} =$ $= \sqrt{0{,}0625} \cdot \sqrt{1{,}44} =$ $= 0{,}25 \cdot 1{,}2 = 0{,}3$; б) $\sqrt{104^2 - 40^2} =$ $= \sqrt{(104+40)(104-40)} =$ $= \sqrt{144 \cdot 64} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{64} =$ $= 12 \cdot 8 = 96$; в) $\sqrt{27 \cdot 75} = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 25 \cdot 3} =$ $= \sqrt{9^2 \cdot 25} = 9 \cdot 5 = 45$.
2. Вычислите: а) $\sqrt{1{,}5} \cdot \sqrt{6}$; б) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{1{,}6} \cdot \sqrt{100}$.	а) $\sqrt{1{,}5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{1{,}5 \cdot 6} = \sqrt{9} = 3$; б) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{1{,}6} \cdot \sqrt{100} =$ $= \sqrt{0{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 100} = \sqrt{16} = 4$.

Квадратный корень из частного	
3. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{\frac{5625}{0{,}09}}$; б) $\sqrt{\frac{0{,}0036}{0{,}25}}$.	а) $\sqrt{\frac{5625}{0{,}09}} = \frac{\sqrt{5625}}{\sqrt{0{,}09}} = \frac{75}{0{,}3} = 250$; б) $\sqrt{\frac{0{,}0036}{0{,}25}} = \frac{\sqrt{0{,}0036}}{\sqrt{0{,}25}} = \frac{0{,}06}{0{,}5} =$ $= \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$.
4. Вычислите: а) $\frac{\sqrt{0{,}63}}{\sqrt{0{,}07}}$; б) $\frac{\sqrt{0{,}1}}{\sqrt{0{,}729}}$.	а) $\frac{\sqrt{0{,}63}}{\sqrt{0{,}07}} = \sqrt{\frac{0{,}63}{0{,}07}} = \sqrt{9} = 3$; б) $\frac{\sqrt{0{,}1}}{\sqrt{0{,}729}} = \sqrt{\frac{0{,}1}{0{,}729}} = \sqrt{\frac{100}{729}} =$ $= \frac{10}{27}$.
Квадратный корень из квадрата числа	
5. Найдите значение выражения: а) $\sqrt{(-3{,}47)^2}$; б) $-2 \cdot \sqrt{2{,}5^2}$; в) $15 : \sqrt{(-3)^2}$.	а) $\sqrt{(-3{,}47)^2} = \|-3{,}47\| = 3{,}47$; б) $-2 \cdot \sqrt{2{,}5^2} = -2 \cdot \|2{,}5\| =$ $= -2 \cdot 2{,}5 = -5$; в) $15 : \sqrt{(-3)^2} = 15 : \|-3\| =$ $= 15 : 3 = 5$.
6. Упростите выражение: а) $\sqrt{y^2}$, если $y > 0$; б) $\sqrt{p^2}$, если $p < 0$; в) $\sqrt{m^8}$; г) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1}$, если $a < \frac{1}{2}$.	а) $\sqrt{y^2} = \|y\|$; если $y > 0$, то $\|y\| = y$, значит, $\sqrt{y^2} = y$; б) $\sqrt{p^2} = \|p\|$; если $p < 0$, то $\|p\| = -p$, значит, $\sqrt{p^2} = -p$; в) $\sqrt{m^8} = \sqrt{(m^4)^2} = \|m^4\| = m^4$; г) $\sqrt{4a^2 - 4a + 1} = \sqrt{(2a-1)^2} =$ $= \|2a - 1\|$. Если $a < \frac{1}{2}$, то $\|2a - 1\| = -(2a - 1) = 1 - 2a$, значит, $\sqrt{4a^2 - 4a + 1} = 1 - 2a$.

1. При каких значениях a и b верно равенство $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$?
2. Верно ли, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ при любых значениях a?
3. Верно ли, что $\sqrt{\frac{p}{k}} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{k}}$?
4. Объясните, почему $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$.
5. При каких значениях m верно равенство $\sqrt{m^2} = -m$?

1.96. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{49}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{4,5}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{2}\right)^2$;
г) $\left(-\sqrt{\frac{7}{9}}\right)^2$; д) $\left(2\sqrt{3}\right)^2$; е) $\left(0,1\sqrt{5}\right)^2$.

1.97. Найдите квадрат числа:

а) $\sqrt{53}$; б) $8\sqrt{2}$; в) $-\sqrt{3,4}$; г) $-3\sqrt{\frac{5}{6}}$.

1.98. Найдите значение выражения:

а) x^2 при $x = \sqrt{5}$; $-\sqrt{2}$; $5\sqrt{7}$;
б) $\frac{x^2}{3}$ при $x = \sqrt{3}$; $-2\sqrt{6}$; $4\sqrt{15}$;
в) $-\frac{1}{7}x^2$ при $x = \sqrt{14}$; $-3\sqrt{7}$; $0,1\sqrt{21}$.

1.99. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{7}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(6\sqrt{3}\right)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2$.

1.100. Вычислите, используя свойство квадратного корня из произведения:

а) $\sqrt{49 \cdot 81}$; б) $\sqrt{16 \cdot 121}$; в) $\sqrt{0,36 \cdot 25}$;
г) $\sqrt{2,25 \cdot 64}$; д) $\sqrt{144 \cdot 1,21}$; е) $\sqrt{9 \cdot 0,25 \cdot 64}$.

1.101. Вычислите рациональным способом:

а) $\sqrt{1,69 \cdot 0,09 \cdot 0,16}$; б) $\sqrt{0,04 \cdot 1,96 \cdot 225}$;
в) $\sqrt{0,0001 \cdot 16 \cdot 6,25}$; г) $\sqrt{0,0025 \cdot 3,24 \cdot 36}$.

1.102. Найдите значение выражения, используя свойство квадратного корня из частного:

а) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{625}}$; в) $\sqrt{\frac{169}{64}}$;
г) $\sqrt{\frac{10\,000}{121}}$; д) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; е) $\sqrt{2\frac{7}{81}}$.

1.103. Вычислите:

а) $\sqrt{64\cdot 9}-\sqrt{25\cdot 81}$; б) $\sqrt{\frac{64}{9}}+\sqrt{\frac{25}{81}}$.

1.104. Сравните значения выражений $\sqrt{x\cdot y}$ и $\sqrt{\frac{x}{y}}$, если:

а) $x = 64$, $y = 121$; б) $x = -36$, $y = -0{,}01$;

в) $x = \frac{4}{9}$, $y = 1\frac{7}{9}$; г) $x = -0{,}04$, $y = -2{,}56$.

Можно ли найти значения данных выражений, если числа x и y разных знаков?

1.105. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{0{,}36\cdot 25}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{1{,}21}{400\cdot 0{,}81}}$;

в) $\sqrt{2\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{4}}$; г) $\sqrt{12\frac{1}{4}\cdot 10{,}24}$.

1.106. Найдите значение произведения, используя свойство корня:

а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; б) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}$; в) $\sqrt{14{,}4}\cdot\sqrt{10}$;

г) $\sqrt{80}\cdot\sqrt{0{,}2}$; д) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{2{,}5}$; е) $\sqrt{0{,}3}\cdot\sqrt{10{,}8}$.

1.107. Найдите значение частного, используя свойство корня:

а) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$; б) $\frac{\sqrt{47}}{\sqrt{4700}}$; в) $\frac{\sqrt{216}}{\sqrt{6}}$;

г) $\frac{\sqrt{14{,}7}}{\sqrt{0{,}3}}$; д) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25{,}6}}$; е) $\frac{\sqrt{72{,}2}}{\sqrt{0{,}2}}$.

1.108. Выполните извлечение квадратного корня:

а) $\sqrt{10\cdot 250}$; б) $\sqrt{11\cdot 1100}$; в) $\sqrt{360\cdot 90}$;

г) $\sqrt{48\cdot 75}$; д) $\sqrt{63\cdot 28}$; е) $\sqrt{0{,}4\cdot 4{,}9}$;

ж) $\sqrt{0{,}8\cdot 9{,}8}$; з) $\sqrt{32{,}4\cdot 36{,}1}$; и) $\sqrt{28{,}8\cdot 33{,}8}$.

1.109. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{8}{27}\cdot\frac{50}{81}\cdot 16\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{75}{7}\cdot\frac{8}{11}\cdot 1\frac{1}{21}}$.

1.110. Вычислите:

а) $\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}$; б) $\sqrt{2{,}4}\cdot\sqrt{3\frac{3}{4}}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{17}}\cdot\sqrt{2\frac{3}{7}}\cdot\sqrt{7}$; г) $\sqrt{0{,}375}\cdot\sqrt{10\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}$.

Приведите свой пример, аналогичный выполненным.

1.111. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{18} : \sqrt{50}$; б) $\sqrt{125} : \sqrt{80}$;

в) $\sqrt{7,5} : \sqrt{2,7}$; г) $\sqrt{6,3} : \sqrt{17,5}$.

Приведите свой пример, аналогичный выполненным.

1.112. Найдите, во сколько раз число:

а) $\sqrt{75}$ больше числа $\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{11}$ меньше числа $\sqrt{99}$.

1.113. Вычислите:

а) $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$; б) $-8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$;

в) $3\sqrt{11} \cdot \left(-\sqrt{11}\right)$; г) $6\sqrt{10} \cdot 0,1\sqrt{10}$.

1.114. Определите, являются ли взаимно обратными числа:

а) $\sqrt{5}$ и $\frac{\sqrt{5}}{5}$; б) $2\sqrt{3}$ и $\frac{1}{\sqrt{12}}$; в) $3\sqrt{2}$ и $-3\sqrt{2}$.

1.115. Найдите значения выражений $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ и $\sqrt{a} : \sqrt{b}$, если:

а) $a = 32$, $b = 50$; б) $a = 1,8$, $b = 9,8$; в) $a = 1,7$, $b = \frac{5}{34}$.

Подберите такие значения переменных a и b, при которых значения данных выражений равны.

1.116. Найдите значение выражения, используя свойство корня:

а) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; б) $\sqrt{148^2 - 48^2}$; в) $\sqrt{5^2 - 1,4^2}$;

г) $\sqrt{5,5^2 - 4,4^2}$; д) $\sqrt{0,68^2 - 0,32^2}$; е) $\sqrt{3,73^2 - 2,52^2}$.

1.117. Вычислите:

а) $5\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$; б) $3\sqrt{8} : \left(\frac{1}{6}\sqrt{2}\right)$;

в) $5\sqrt{3} \cdot 0,1\sqrt{12}$; г) $2\sqrt{7} : \left(\frac{3}{14}\sqrt{63}\right)$.

1.118. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{-242 \cdot (-32)}$; б) $\sqrt{2 \cdot (-10) \cdot (-405)}$;

в) $\sqrt{\frac{-27}{-147}}$; г) $\sqrt{\frac{4 \cdot (-8)}{-50}}$.

1.119. Расположите в порядке убывания значения выражений $\left(0,01\sqrt{1000}\right)^2$, $\sqrt{1000} : \sqrt{0,1}$ и $\sqrt{0,1} \cdot \sqrt{1000}$.

1.120. Определите, рациональными или иррациональными числами являются значения выражений a^2, a^3 и $2a\sqrt{3}$ при $a = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

1.121. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$; б) $\sqrt{24} \cdot \sqrt{6} + \sqrt{\frac{5}{9}} \cdot \sqrt{5}$;

в) $\sqrt{20 \cdot 45} - \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$; г) $\sqrt{54} : \sqrt{24} + \sqrt{(-48) \cdot (-75)}$.

1.122. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}}$; в) $\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{24}}$;

г) $\frac{25\sqrt{3} \cdot \sqrt{15}}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{\sqrt{18} \cdot \sqrt{27}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{128}}$; е) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{24}} \cdot \sqrt{\frac{3}{26}}$.

1.123. Сравните значения выражений $\sqrt{m^2 - n^2}$ и $m - n$, если:

а) $m = 45{,}8$, $n = 44{,}2$; б) $m = 1\frac{1}{16}$, $n = \frac{1}{2}$.

Верно ли, что выражения $\sqrt{m^2 - n^2}$ и $m - n$ тождественно равны?

1.124. Вычислите:

а) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} \cdot \sqrt{14}}{21}$; б) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}{10}$; в) $\frac{5\sqrt{51} \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{17}}$;

г) $\frac{15\sqrt{19}}{2\sqrt{95} \cdot \sqrt{5}}$; д) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \sqrt{32}$; е) $\left(5\sqrt{3}\right)^3 \cdot \sqrt{3}$.

1.125. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{43^2}$; б) $3 \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{11}\right)^2}$; в) $\sqrt{(-29)^2}$;

г) $10 \cdot \sqrt{(-5{,}71)^2}$; д) $12 : \sqrt{(-0{,}2)^2}$; е) $\sqrt{(-6)^2} - \sqrt{15^2}$.

Приведите свои примеры, аналогичные выполненным.

1.126. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt{(3a)^2}$; в) $\sqrt{16m^2}$; г) $\sqrt{\frac{4c^2}{9}}$.

1.127. Вычислите, если возможно:

а) $\sqrt{(-5)^2}$; б) $\sqrt{-5^2}$; в) $\left(\sqrt{-5}\right)^2$.

1.128. Проверьте, верны ли равенства:

а) $\sqrt{0{,}3^2} = 0{,}3$; б) $\sqrt{b^2} = b$; в) $\sqrt{(-7)^2} = -7$;

г) $\sqrt{(-11)^2} = 11$; д) $\sqrt{m^4} = m^2$; е) $\sqrt{16x^2} = -8x$.

1.129. Подберите несколько значений переменной a, для которых выполняется равенство:

а) $\sqrt{a^2} = a$; б) $\sqrt{a^2} = -a$.

1.130. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2}$, если $x > 0$; б) $\sqrt{b^2}$, если $b < 0$;

в) $\sqrt{9n^2}$, если $n < 0$; г) $\sqrt{\frac{a^2}{36}}$, если $a \geqslant 0$;

д) $-5\sqrt{n^2}$, если $n > 0$; е) $-2\sqrt{25y^2}$, если $y \leqslant 0$;

ж) $-\sqrt{\frac{p^2}{100}}$, если $p < 0$; з) $-\sqrt{1\frac{9}{16}k^2}$, если $k \geqslant 0$.

1.131. Представьте в виде одночлена выражение:

а) $5a\sqrt{9a^2}$ при $a < 0$; б) $3a^2\sqrt{4a^2}$ при $a \geqslant 0$;

в) $-a\sqrt{0{,}25a^2}$ при $a \leqslant 0$; г) $-a^3\sqrt{81a^2}$ при $a > 0$.

1.132. Упростите выражение:

а) $\sqrt{m^6}$, если $m \geqslant 0$; б) $\sqrt{4y^{10}}$, если $y < 0$;

в) $\sqrt{n^4}$; г) $\sqrt{\frac{b^8}{25}}$;

д) $-3\sqrt{0{,}49n^6}$, если $n > 0$; е) $-7\sqrt{9k^{14}}$, если $k \leqslant 0$;

ж) $-\sqrt{\frac{c^{12}}{36}}$; з) $-\sqrt{\frac{16x^{16}}{81}}$.

1.133. Найдите значения переменной, при которых верно равенство:

а) $\sqrt{a^6} = a^3$; б) $\sqrt{b^{16}} = b^8$;

в) $\sqrt{c^{10}} = -c^5$; г) $\sqrt{x^{12}} = -x^6$.

1.134. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{7^6}$; б) $\sqrt{15^2 \cdot 2^8}$; в) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2}$;

г) $\sqrt{\frac{3^2 \cdot 2^{10}}{5^4}}$; д) $\sqrt{\frac{7^4}{2^8 \cdot 5^6}}$; е) $\sqrt{\frac{13^2 \cdot 5^4}{2^{10}}}$.

1.135. Вычислите:

а) $\sqrt{(-3)^8}$; б) $\sqrt{(-7)^6}$; в) $\sqrt{2^6 \cdot (-10)^2}$;

г) $\sqrt{\dfrac{16^4 \cdot (-3)^6}{(-12)^4}}$; д) $\sqrt{\dfrac{3^2 \cdot (-2)^8}{(-5)^4}}$; е) $\sqrt{\dfrac{7^4}{(-2)^6 \cdot 5^6}}$.

1.136. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{6{,}4 \cdot 10^7}$; б) $\sqrt{16{,}9 \cdot 10^5}$;

в) $\sqrt{0{,}9 \cdot 10^{-3}}$; г) $\sqrt{0{,}025 \cdot 10^{-5}}$.

1.137. Упростите выражение $\sqrt{\frac{1}{9}a^2b^6}$, если a и b — числа:

а) одного знака; б) разных знаков.

1.138. Преобразуйте выражение:

а) $\sqrt{25a^6b^{10}}$, если $a > 0$, $b < 0$; б) $\sqrt{9m^4n^2}$, если $n < 0$;

в) $-\sqrt{0{,}36a^8b^{14}}$, если $b \geqslant 0$; г) $\sqrt{\dfrac{9a^{10}}{49b^{12}}}$, если $a < 0$.

1.139. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(a-7)^2}$ при $a \geqslant 7$;

б) $\sqrt{(a+8)^2}$ при $a < -8$;

в) $\sqrt{(y-3)^2} + \sqrt{(y-5)^2}$ при $3 \leqslant y \leqslant 5$;

г) $\sqrt{(x+4)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$ при $x < -4$.

1.140. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt{(2m-5{,}4)^2} + 5{,}4$ при $-1 \leqslant m \leqslant 1$;

б) $\sqrt{(3n-12{,}1)^2} - 12{,}1$ при $-5 < n < 4$;

в) $\sqrt{(2a-1{,}8)^2} - \sqrt{(3{,}2a+1{,}6)^2} - 2a - 1{,}6$ при $-0{,}4 \leqslant a \leqslant 0{,}5$;

г) $\sqrt{(9b-1)^2} + \sqrt{(2b+3{,}4)^2} - b + 3{,}4$ при $-2{,}8 \leqslant b \leqslant -1{,}8$.

1.141. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{\sqrt{11}}\right)^4$; б) $\left(\sqrt{3\sqrt{2}}\right)^4$; в) $\left(\sqrt{2\sqrt{5}}\right)^4$.

1.142. Вычислите:

а) $\sqrt{70 - \sqrt{\dfrac{44^2 - 26^2}{35}}}$; б) $\sqrt{1\frac{7}{9} \cdot \sqrt{\dfrac{29}{33^2 - 25^2}}}$.

1.143. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{33^2+44^2}$; б) $\sqrt{666^2+888^2}$.

1.144. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ при $a<b$;

б) $\sqrt{4m^2-4mn+n^2}$ при $n\geqslant 2m$;

в) $\sqrt{36b^2+12b+1}+\sqrt{b^2-10b+25}-\sqrt{b^2}$ при $-6\leqslant b\leqslant -1$;

г) $\sqrt{49a^2-14a+1}-\sqrt{a^2-6a+9}+\sqrt{25a^2}$ при $1\leqslant a\leqslant 2$.

1.145. Постройте график функции:

а) $y=\sqrt{(x-3)^2}$ при $x\geqslant 3$;

б) $y=\sqrt{(x+1)^2}$ при $x\leqslant -1$;

в) $y=\sqrt{(x-5)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$ при $1\leqslant x\leqslant 5$.

1.146. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{36}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{8,3}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{3}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{\frac{11}{16}}\right)^2$; д) $\left(3\sqrt{2}\right)^2$; е) $\left(0,1\sqrt{7}\right)^2$.

1.147. Найдите значение выражения:

а) a^2 при $a=\sqrt{7};\ -\sqrt{11};\ 5\sqrt{2}$;

б) $-\frac{a^2}{5}$ при $a=\sqrt{5};\ -\sqrt{15};\ -2\sqrt{10}$.

1.148. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(6\sqrt{6}\right)^2$; б) $\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(7\sqrt{3}\right)^2$.

1.149. Найдите значение выражения, используя свойство квадратного корня:

а) $\sqrt{36\cdot 16}$; б) $\sqrt{25\cdot 0,09}$;

в) $\sqrt{144\cdot 0,49}$; г) $\sqrt{0,01\cdot 0,64\cdot 121}$;

д) $\sqrt{\frac{25}{64}}$; е) $\sqrt{\frac{49}{324}}$;

ж) $\sqrt{\frac{289}{100}}$; з) $\sqrt{3\frac{13}{81}}$.

1.150. Вычислите:

а) $\sqrt{81 \cdot 16} - \sqrt{225 \cdot 4}$; б) $\sqrt{\frac{81}{16}} + \sqrt{\frac{225}{4}}$.

1.151. Сравните значения выражений $\sqrt{m \cdot n}$ и $\sqrt{\frac{n}{m}}$, если:

а) $m = 49$, $n = 25$;

б) $m = 0{,}04$, $n = 121$;

в) $m = -\frac{1}{4}$, $n = -\frac{1}{9}$.

1.152. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{64 \cdot 0{,}49}{81}}$; б) $\sqrt{\frac{1{,}69}{900 \cdot 0{,}25}}$;

в) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 9}$; г) $\sqrt{2{,}25 \cdot \frac{25}{49}}$.

1.153. Вычислите, используя свойства корней:

а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{24}$; в) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{0{,}5}$;

г) $\sqrt{0{,}1} \cdot \sqrt{0{,}4}$; д) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{80}}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{75}}$;

ж) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{2}}$; з) $\frac{\sqrt{700}}{\sqrt{7}}$; и) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{972}}$.

1.154. Выполните извлечение квадратного корня:

а) $\sqrt{250 \cdot 640}$; б) $\sqrt{18 \cdot 50}$;

в) $\sqrt{0{,}9 \cdot 2{,}5}$; г) $\sqrt{12{,}1 \cdot 28{,}9}$.

1.155. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{\frac{5}{19}} \cdot \sqrt{\frac{19}{45}}$; б) $\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{17\frac{6}{7}} \cdot \sqrt{4{,}2}$.

1.156. Вычислите:

а) $\sqrt{48} : \sqrt{75}$; б) $\sqrt{6{,}8} : \sqrt{15{,}3}$.

1.157. Найдите значение выражения:

а) $8\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$; б) $-6\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}$;

в) $-\sqrt{13} \cdot 4\sqrt{13}$; г) $5\sqrt{7} \cdot \left(-0{,}2\sqrt{7}\right)$.

1.158. Найдите значение выражения, используя рациональный способ решения:

а) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; б) $\sqrt{178^2 - 78^2}$;

в) $\sqrt{8{,}2^2 - 1{,}8^2}$; г) $\sqrt{6{,}5^2 - 5{,}2^2}$.

1.159. Вычислите:

а) $7\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}$; б) $5\sqrt{7} : \left(\frac{1}{7}\sqrt{28}\right)$; в) $4\sqrt{8} \cdot 0{,}01\sqrt{18}$.

1.160. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{-32\cdot(-162)}$; б) $\sqrt{\frac{-2\cdot 40}{-245}}$.

1.161. Найдите значение выражения:

а) $\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{24}}+\sqrt{32\cdot 50}$; б) $\sqrt{-27\cdot(-108)}-\sqrt{45}:\sqrt{125}$.

1.162. Вычислите:

а) $\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{32}}$; б) $\frac{6\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{48}\cdot\sqrt{5}}$.

1.163. Сравните значения выражений $\sqrt{a^2-b^2}$ и $a-b$, если:

а) $a=117$, $b=108$; б) $a=24{,}5$, $b=19{,}6$.

1.164. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{31^2}$; б) $6\cdot\sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2}$;

в) $\sqrt{(-13)^2}$; г) $5\cdot\sqrt{(-3{,}62)^2}$.

1.165. Упростите выражение:

а) $\sqrt{y^2}$; б) $\sqrt{(7a)^2}$; в) $\sqrt{25n^2}$; г) $\sqrt{\frac{16x^2}{81}}$.

1.166. Упростите выражение:

а) $\sqrt{c^2}$, если $c>0$; б) $\sqrt{y^2}$, если $y<0$;

в) $\sqrt{25a^2}$, если $a\geqslant 0$; г) $\sqrt{\frac{x^2}{9}}$, если $x<0$;

д) $-2\sqrt{m^2}$, если $m>0$; е) $-5\sqrt{4c^2}$, если $c\leqslant 0$;

ж) $-\sqrt{\frac{n^2}{25}}$, если $n>0$; з) $-\sqrt{2\frac{1}{4}b^2}$, если $b>0$.

1.167. Представьте в виде одночлена выражение:

а) $\sqrt{a^{18}}$, если $a>0$; б) $\sqrt{9b^6}$, если $b\leqslant 0$;

в) $-2\sqrt{4n^{18}}$, если $n\leqslant 0$; г) $-6\sqrt{0{,}01m^{10}}$, если $m\geqslant 0$;

д) $\sqrt{k^8}$; е) $-\sqrt{\frac{x^{16}}{25}}$;

ж) $\sqrt{\frac{c^4}{49}}$; з) $-\sqrt{\frac{36y^{20}}{121}}$.

1.168. Вычислите, используя свойство корня:

а) $\sqrt{5^6}$; б) $\sqrt{(-2)^8}$; в) $\sqrt{3^4\cdot(-15)^2}$; г) $\sqrt{\frac{7^2\cdot(-2)^8}{14^4}}$.

1.169. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{3,6 \cdot 10^{-5}}$; б) $\sqrt{0,049 \cdot 10^{7}}$.

1.170. Упростите выражение $\sqrt{\frac{4}{25} m^4 n^{10}}$, если:

а) $n \geqslant 0$; б) $n < 0$.

Объясните, почему знак значения данного выражения не зависит от знака переменной m.

1.171. Представьте в виде многочлена выражение:

а) $\sqrt{(a-4)^2}$ при $a > 4$;

б) $\sqrt{(b+2)^2}$ при $b < -2$;

в) $\sqrt{(3b+10,2)^2} + 10,2$ при $-3 \leqslant b \leqslant 3$;

г) $\sqrt{(2a-6,4)^2} - 2a + 3,2$ при $1 \leqslant a \leqslant 3$.

1.172. Упростите выражение:

а) $\sqrt{x^2 - 6xy + 9y^2}$ при $x < 3y$;

б) $\sqrt{b^2 - 10b + 25} + \sqrt{b^2 + 14b + 49}$ при $-5,8 < b < 4,4$.

1.173. Постройте график функции:

а) $y = \sqrt{(x-2)^2}$ при $x \geqslant 2$; б) $y = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ при $x \leqslant -3$.

1.174. Используя данные рисунка 14, выберите верное утверждение:

а) $a > 0$;

б) $a < 0$;

в) $a = 0$.

Рис. 14

1.175. Выполните действия: $-2 \cdot 3^{-2} + 5^0$.

1.176. Решите неравенство $(x+7)(x-7) \geqslant x^2 + 5x - 49$.

1.177. Постройте график уравнения $3x + y = 2$.

1.178. Разложите на множители $3a(b-4c) - b + 4c$.

1.179. Представьте трехчлен в виде квадрата двучлена:

а) $a^2 - 10a + 25$; б) $9x^4 + 6x^2 + 1$;

в) $4m^2 - 20mn + 25n^2$; г) $0,01a^6 + 0,4a^3 + 4$.

1.180. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 4y = 9, \\ 3x + 7y = 2 \end{cases}$ способом подстановки.

1.181. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x + 8y = -18, \\ 5x - 18y = 64 \end{cases}$ способом сложения.

1.182. Туристы отправились в поход на Браславские озера. Часть пути они проехали на поезде, часть — на автобусе и еще часть — прошли пешком, преодолев в общей сложности 195 км. Путь, который туристы проехали на автобусе, оказался на 15 км длиннее пути, пройденного пешком, и составил 20 % пути, преодоленного на поезде. Сколько километров туристы прошли пешком?

1.183. Что выгоднее: 40 %-я скидка на товар или акция «Купи два товара и получи третий в подарок»?

§ 4. Применение свойств квадратных корней

1.184. Найдите значение выражения $\frac{3}{7} \cdot 0{,}179 + \frac{3}{7} \cdot 0{,}821$.

1.185. Упростите выражение $-0{,}5ab + 1{,}2a^2 + 4{,}5ab - 1{,}2a^2$.

1.186. Разложите на множители $4a^2 + 4a + 1 - (3a + 5)^2$.

Вынесение множителя за знак корня

Преобразуем выражение $\sqrt{49 \cdot 2}$, применив к нему свойство корня из произведения: $\sqrt{49 \cdot 2} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$. В результате преобразований получили произведение двух множителей: 7 и $\sqrt{2}$. В таком случае говорят, что множитель 7 вынесли за знак корня.

Вынесем множитель за знак корня в выражении $\sqrt{45}$. Для этого число 45 представим в виде произведения двух множителей, один из которых является квадратом некоторого выражения: $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$. Говорят, что множитель 3 вынесли за знак корня.

$$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{25 \cdot 5} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5a^2} = \sqrt{5 \cdot a^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{a^2} = \sqrt{5} \cdot |a|$$

Чтобы вынести множитель за знак корня, нужно:

① Представить подкоренное выражение в виде произведения, содержащего квадрат выражения. ② Применить свойство корня из произведения. ③ Найти корень из квадрата выражения. ④ Записать произведение полученного множителя и корня.	Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{72}$. ① $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2}$; ② $\sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2}$; ③ $\sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = 6 \cdot \sqrt{2}$; ④ $\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Внесение множителя под знак корня

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$-7\sqrt{2} = -\sqrt{7^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{49 \cdot 2} = -\sqrt{98}$$

$$-0{,}5\sqrt{3} = -\sqrt{0{,}25 \cdot 3} = -\sqrt{0{,}75}$$

При вычислениях и преобразованиях иногда нужно выполнять внесение множителя под знак корня.

Внесем в выражении $5\sqrt{3}$ множитель 5 под знак корня:

$5\sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$.

Рассмотрим выражение $a\sqrt{7}$.

Если $a \geqslant 0$, то множитель a можно внести под знак корня. Так как $a = \sqrt{a^2}$, то

$$a\sqrt{7} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{a^2 \cdot 7} = \sqrt{7a^2}.$$

Если $a \leqslant 0$, то $-a \geqslant 0$. Представим a в виде $-(-a)$, получим:

$$a\sqrt{7} = -(-a) \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{(-a)^2 \cdot 7} = -\sqrt{7a^2}.$$

Чтобы внести множитель под знак корня, нужно:

① Представить неотрицательный множитель в виде квадратного корня из квадрата этого множителя. ② Применить свойство корня из произведения «справа налево».	Внесите множитель под знак корня в выражении $5\sqrt{7}$. ① $5\sqrt{7} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7}$; ② $\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{5^2 \cdot 7}$;

③ Записать корень из произведения.	③ $\sqrt{5^2\cdot 7}=\sqrt{25\cdot 7}=\sqrt{175}$; $5\sqrt{7}=\sqrt{175}$.

Например:
а) если m — неотрицательное число, то $m\sqrt{n}=\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{m^2n}$;
б) если $k<0$, то $k\sqrt{l}=-(-k)\sqrt{l}=-\sqrt{(-k)^2}\cdot\sqrt{l}=-\sqrt{(-k)^2 l}=$ $=-\sqrt{k^2l}$.

Преобразование выражений, содержащих корни

Выражения, содержащие корни, называются **иррациональными.**

Рассмотрим примеры преобразований иррациональных выражений.

Пример 1. Вычислите: $\dfrac{\sqrt{(-7)(-14)}}{\sqrt{18\cdot 25}}$.

Решение. 1) Представим подкоренные выражения в виде произведения неотрицательных множителей:

$$\frac{\sqrt{(-7)(-14)}}{\sqrt{18\cdot 25}}=\frac{\sqrt{7\cdot 2\cdot 7}}{\sqrt{2\cdot 9\cdot 25}}.$$

2) Вынесем множители за знак корня: $\dfrac{\sqrt{7\cdot 2\cdot 7}}{\sqrt{2\cdot 9\cdot 25}}=\dfrac{7\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 5\cdot\sqrt{2}}$.

3) Сократим полученную дробь: $\dfrac{7\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 5\cdot\sqrt{2}}=\dfrac{7}{15}$.

Пример 2. Упростите выражение $\sqrt{18}-\sqrt{50}+2\sqrt{0,5}$.

Решение. 1) Вынесем множители за знак корня в первых двух слагаемых, а в третьем — внесем множитель под знак корня:

$$\sqrt{18}-\sqrt{50}+2\sqrt{0,5}=3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}.$$

2) Применим распределительный закон умножения:

$$3\sqrt{2}-5\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot(3-5+1)=\sqrt{2}\cdot(-1)=-\sqrt{2}.$$

Пример 3. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$$

Решение. Воспользуемся формулами сокращенного умножения и получим:

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)=$$
$$=\left(\sqrt{7}\right)^2-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{7}\right)^2+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=$$
$$=7+5+7+5-7+5=22.$$

Пример 4. Разложите на множители:

а) $2\sqrt{11}+11$; б) $\sqrt{14}-\sqrt{21}$.

Решение. а) Представим число 11 в виде $(\sqrt{11})^2$ и получим: $2\sqrt{11}+11 = 2\sqrt{11}+(\sqrt{11})^2 = \sqrt{11}(2+\sqrt{11})$;

б) $\sqrt{14}-\sqrt{21} = \sqrt{7\cdot 2}-\sqrt{7\cdot 3} = \sqrt{7}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{7}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{7}(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

Пример 5. Сократите дробь $\frac{5\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}}$.

Решение. В числителе дроби вынесем общий множитель за скобки и сократим дробь:

$$\frac{5\sqrt{6}-6}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}-(\sqrt{6})^2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}(5-\sqrt{6})}{\sqrt{6}} = 5-\sqrt{6}.$$

Пример 6. Найдите сумму $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

Решение. 1) Представим выражение $7+4\sqrt{3}$ в виде квадрата двучлена:

$$7+4\sqrt{3} = 3+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+4 = (\sqrt{3})^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+2^2 = (\sqrt{3}+2)^2.$$

Тогда получим: $\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} = \sqrt{3}+2$.

2) Выполним преобразования второго слагаемого суммы:

$$7-4\sqrt{3} = 3-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+4 = (\sqrt{3})^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{3}+2^2 = (\sqrt{3}-2)^2.$$

Тогда $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} = |\sqrt{3}-2| = 2-\sqrt{3}$.

3) Найдем сумму:

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2+2-\sqrt{3} = 4.$$

Избавление от иррациональности в знаменателе дроби

Если знаменатель дроби представляет собой корень, то числитель и знаменатель дроби можно умножить на знаменатель дроби, тогда получится дробь, в знаменателе которой нет иррациональности. Например,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{3}{\sqrt{7}+1} = \frac{3(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)} = \frac{3(\sqrt{7}-1)}{6} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

Если знаменатель дроби равен сумме (разности) выражений, содержащих корень, то числитель и знаменатель дроби умножают на разность (сумму) этих выражений (говорят — на сопряженное выражение). Тогда в знаменателе дроби получается рациональное число. Например,

$$\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)}{3} = \sqrt{5}+\sqrt{2}.$$

Вынесение множителя за знак корня	
1. Вынесите множитель за знак корня: а) $\sqrt{150}$; б) $\sqrt{2a^2b^4}$ при $a < 0$.	а) $\sqrt{150} = \sqrt{25 \cdot 6} =$ $= \sqrt{25} \cdot \sqrt{6} = 5\sqrt{6}$; б) $\sqrt{2a^2b^4} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{(b^2)^2} =$ $= \sqrt{2}\,\lvert a \rvert b^2$; при $a < 0$ получим $\lvert a \rvert = -a$, т. е. $\sqrt{2a^2b^4} = -ab^2\sqrt{2}$.
Внесение множителя под знак корня	
2. Внесите множитель под знак корня: а) $4\sqrt{0,5}$; б) $-5b\sqrt{2}$, если $b > 0$; в) $m\sqrt{7}$, если $m < 0$.	а) $4\sqrt{0,5} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{0,5} =$ $= \sqrt{16 \cdot 0,5} = \sqrt{8}$; б) $-5b\sqrt{2} = -\sqrt{5^2} \cdot \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{2} =$ $= -\sqrt{5^2 \cdot b^2 \cdot 2} = -\sqrt{50b^2}$; в) $m\sqrt{7} = -(-m)\sqrt{7} =$ $= -\sqrt{(-m)^2} \cdot \sqrt{7} =$ $= -\sqrt{m^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{7m^2}$.
Преобразование выражений, содержащих корни	
3. Упростите выражение $3\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18}$.	$3\sqrt{2} + \sqrt{50} - \sqrt{18} =$ $= 3\sqrt{2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} =$ $= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

4. Найдите значение выражения: а) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{15}$; б) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}$.	а) $\left(2\sqrt{5}-\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{15}=$ $=\left(2\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{15}=$ $=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{15}=$ $=2\sqrt{15}-9-2\sqrt{15}=-9$; б) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{24}=$ $=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+$ $+\sqrt{4\cdot 6}=5-2\sqrt{6}+2\sqrt{6}=5$.
5. Сократите дробь $\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}$.	$\dfrac{(3-\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}=\dfrac{9-2\cdot 3\cdot\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{7-3\sqrt{5}}=$ $=\dfrac{14-6\sqrt{5}}{7-3\sqrt{5}}=\dfrac{2(7-3\sqrt{5})}{7-3\sqrt{5}}=2$.
Избавление от иррациональности в знаменателе дроби	
6. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби: а) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{15}-3}$.	а) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{(\sqrt{7})^2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$; б) $\dfrac{6}{\sqrt{15}-3}=\dfrac{6\cdot(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15}-3)(\sqrt{15}+3)}=$ $=\dfrac{6(\sqrt{15}+3)}{(\sqrt{15})^2-3^2}=\dfrac{6(\sqrt{15}+3)}{6}=$ $=\sqrt{15}+3$.
7. Упростите выражение $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}$.	Избавимся от иррациональности в знаменателе дроби: $\dfrac{10}{\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{10\sqrt{5}}{5}=2\sqrt{5}$. Получим: $\dfrac{10}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}=$ $=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$.

8. Найдите значение выражения $\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}$.	Избавимся от иррациональности в знаменателе каждой дроби: $\frac{7}{\sqrt{11}-2}=\frac{7(\sqrt{11}+2)}{(\sqrt{11}-2)(\sqrt{11}+2)}=$ $=\frac{7(\sqrt{11}+2)}{11-4}=\frac{7(\sqrt{11}+2)}{7}=$ $=\sqrt{11}+2;$ $\frac{5}{4+\sqrt{11}}=\frac{5(4-\sqrt{11})}{(4+\sqrt{11})(4-\sqrt{11})}=$ $=\frac{5(4-\sqrt{11})}{16-11}=4-\sqrt{11}.$ Тогда $\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{4+\sqrt{11}}=$ $=\sqrt{11}+2+4-\sqrt{11}=6.$

1. Верно ли, что $a\sqrt{a}=\sqrt{a^3}$, если:
а) $a=5$; б) $a=-2$; в) $a=0$; г) $a=-1$?

2. Какие из следующих выражений принимают неотрицательные значения:
а) $\sqrt{(-3)^2}$; б) $\sqrt{(-a)^2}$; в) $\left(\sqrt{a}\right)^2$; г) $a\sqrt{a^3}$?

1.187. Пользуясь алгоритмом, вынесите множитель за знак корня:
а) $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{72}$; г) $\sqrt{45}$;
д) $\sqrt{200}$; е) $\sqrt{108}$; ж) $\sqrt{175}$; з) $\sqrt{245}$.

1.188. Упростите выражение, используя вынесение множителя за знак корня:
а) $4\sqrt{50}$; б) $\frac{1}{3}\sqrt{99}$; в) $0,4\sqrt{75}$; г) $\frac{\sqrt{125}}{15}$;
д) $-0,5\sqrt{8}$; е) $-\frac{3}{4}\sqrt{160}$; ж) $-\frac{\sqrt{96}}{8}$; з) $-3,5\sqrt{32}$.

1.189. Вынесите множитель за знак корня:
а) $\sqrt{7a^2}$; б) $\sqrt{12b^4}$; в) $\sqrt{28m^2n^6}$; г) $\sqrt{0,09ck^4d^8}$.

1.190. Придумайте несколько значений переменной, для которых верно равенство:
а) $\sqrt{5k^2}=k\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3p^2}=-p\sqrt{3}$; в) $\sqrt{2m^4}=m^2\sqrt{2}$.

1.191. Зная, что $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$, вынесите множитель за знак корня в выражении:

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{6b^2}$; в) $\sqrt{32a^6b^4}$;

г) $\sqrt{\frac{9}{16}a^5b^2}$; д) $\sqrt{2{,}88a^8b^{12}}$; е) $\sqrt{3{,}6a^{10}b^{14}}$.

1.192. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{25m^2n}$, если $m < 0$;

б) $\sqrt{18x^6y^3}$, если $x \leqslant 0$;

в) $\sqrt{200a^8b^2}$, если $b < 0$;

г) $\sqrt{2{,}56c^3d^5}$, если $c < 0$, $d < 0$.

1.193. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{a^3}$; б) $\sqrt{-b^5}$; в) $\sqrt{x^7y^8}$; г) $\sqrt{-3k^7}$.

1.194. Пользуясь алгоритмом, внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{7}$; б) $3\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{11}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{27}$;

д) $-2\sqrt{5}$; е) $-3\sqrt{6}$; ж) $-10\sqrt{3}$; з) $-\frac{2}{7}\sqrt{147}$.

1.195. Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{a}$; б) $5\sqrt{3b}$; в) $\frac{1}{3}\sqrt{18x}$;

г) $-7\sqrt{m}$; д) $-6\sqrt{n^3}$; е) $-0{,}1\sqrt{200c}$.

1.196. Верно ли, что значения выражений $\frac{1}{3}\sqrt{63}$ и $2\sqrt{1{,}75}$ равны?

1.197. В выражении $m\sqrt{3}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $m \geqslant 0$; б) $m < 0$.

1.198. Внесите множитель под знак корня:

а) $(a+1)\cdot\sqrt{7}$, если $a > -1$; б) $(b-3)\cdot\sqrt{6}$, если $b \leqslant 3$;

в) $m\sqrt{m}$; г) $n\sqrt{-n}$;

д) $(x-1)\cdot\sqrt{x-1}$; е) $(y-2)\cdot\sqrt{2-y}$.

1.199. Упростите выражение:

а) $2\sqrt{3}+7\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{2}-9\sqrt{2}$;

в) $6\sqrt{5}+\sqrt{5}$; г) $3\sqrt{7}-\sqrt{7}$;

д) $4{,}5\sqrt{2}-0{,}5\sqrt{2}$; е) $0{,}2\sqrt{3}+0{,}8\sqrt{3}$.

1.200. Вычислите:

а) $3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-5\sqrt{2}$; б) $7\sqrt{3}-\sqrt{3}+2\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{7}+6\sqrt{7}-0{,}5\sqrt{7}$; г) $2{,}6\sqrt{5}+3{,}4\sqrt{5}-\sqrt{5}$;

д) $7\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4\sqrt{6}$; е) $5\sqrt{10}+3\sqrt{10}-8\sqrt{10}$.

1.201. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $7\sqrt{2}$ и $3\sqrt{2}$; б) $-5\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}$; в) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

1.202. Упростите выражение, используя вынесение множителя за знак корня:

а) $5\sqrt{7}+\sqrt{28}$; б) $2\sqrt{12}-\sqrt{75}$;

в) $4\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$; г) $2\sqrt{50}-3\sqrt{8}-3\sqrt{2}$;

д) $\sqrt{75}+0{,}1\sqrt{30\,000}-\frac{1}{3}\sqrt{27}$; е) $0{,}2\sqrt{125}+\sqrt{45}-\sqrt{80}$;

ж) $\sqrt{48}+12-4\sqrt{3}$; з) $\sqrt{300}-15-5\sqrt{12}$.

1.203. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{2}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{27}-\sqrt{3}\right)^2$;

г) $\left(\sqrt{0{,}2}+\sqrt{0{,}8}\right)^2$; д) $\left(\sqrt{0{,}9}-\sqrt{0{,}4}\right)^2$; е) $\left(\sqrt{0{,}18}+\sqrt{0{,}08}\right)^2$.

1.204. Докажите, что значение выражения является рациональным числом:

а) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$;

б) $3\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)$;

в) $\left(5\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{63}\right)\cdot\left(2\sqrt{7}\right)$;

г) $\left(\sqrt{54}-\sqrt{6}\right):\sqrt{6}$;

д) $\left(\sqrt{27}+\sqrt{75}\right):\left(4\sqrt{3}\right)$;

е) $\left(9\sqrt{2}-\sqrt{98}+\sqrt{32}\right):\left(3\sqrt{2}\right)$.

1.205. Выполните действия:

а) $\sqrt{32}-2\sqrt{3}-\left(5\sqrt{2}+\sqrt{27}\right)$;

б) $\sqrt{28}-\sqrt{45}-\left(\sqrt{7}-\sqrt{20}\right)$;

в) $8\sqrt{7}-\sqrt{8}-\left(\frac{1}{4}\sqrt{112}+5\sqrt{32}\right)$;

г) $\sqrt{147}-5\sqrt{50}-\left(\frac{1}{32}\sqrt{192}-2\sqrt{200}\right)$.

1.206. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\left(5\sqrt{2}-\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}$;   б) $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{80}-\sqrt{8}\right)-20$;

в) $\left(4\sqrt{3}-\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}-4\sqrt{6}$;   г) $\frac{2}{3}\sqrt{27}-\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$.

1.207. Периметр прямоугольника равен 10 см, а длина одной из его сторон равна $\sqrt{7}$ см. Найдите площадь прямоугольника.

1.208. Выполните умножение:

а) $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+3\right)$;   б) $\left(3\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt{3}-2\right)$;

в) $\left(7\sqrt{2}-3\right)\left(5-2\sqrt{2}\right)$;   г) $\left(5\sqrt{3}+1\right)\left(7-\sqrt{3}\right)$;

д) $\left(2\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$;   е) $\left(3\sqrt{6}-5\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{6}-3\sqrt{2}\right)$.

1.209. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

а) $\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)$;   б) $\left(1-3\sqrt{5}\right)\left(1+3\sqrt{5}\right)$;

в) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)$;   г) $\left(\sqrt{29}-\sqrt{19}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{29}\right)$;

д) $\left(3\sqrt{2}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{11}+3\sqrt{2}\right)$;   е) $\left(2\sqrt{11}+3\sqrt{7}\right)\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{11}\right)$.

1.210. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{3}+1\right)^2$;   б) $\left(2\sqrt{2}-3\right)^2$;   в) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2$;

г) $\left(3\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$;   д) $\left(\sqrt{4{,}5}+\sqrt{2}\right)^2$;   е) $\left(\sqrt{40{,}5}-\sqrt{2}\right)^2$.

1.211. Периметр квадрата равен:

а) $\left(4\sqrt{3}+8\right)$ см;   б) $\left(20-4\sqrt{5}\right)$ см.

Найдите площадь квадрата.

1.212. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{2}-3\right)^2-11$;   б) $\left(5+2\sqrt{3}\right)^2-37$;

в) $9-\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2$;   г) $21-\left(2\sqrt{5}+1\right)^2$.

1.213. При $a=\sqrt{7}-1$ найдите значение выражения:

а) $(a+1)^2$;   б) a^2+2a;   в) $3a^2$.

1.214. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{7}\right)^2+6\sqrt{14}$; б) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{72}$;

в) $\left(\sqrt{6}+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{120}-\left(\sqrt{11}\right)^2$; г) $\left(2\sqrt{5}-5\right)^2+\left(10+\sqrt{5}\right)^2$;

д) $\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(3-2\sqrt{2}\right)$; е) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(7+4\sqrt{3}\right)$.

1.215. Найдите значение выражения $m^2-10m+9$ при:

а) $m=\sqrt{3}+1$; б) $m=5-\sqrt{13}$; в) $m=2\sqrt{5}+9$.

1.216. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{8}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{15}}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{21}}$; г) $\frac{6}{7\sqrt{3}}$.

1.217. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7}+\frac{21}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{18}{\sqrt{3}}-5\sqrt{3}$;

в) $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2}$; г) $\left(\frac{2}{\sqrt{18}}-\sqrt{2}\right):\frac{\sqrt{2}}{3}$.

1.218. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$; б) $\frac{9}{5+\sqrt{7}}$; в) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{13}{2\sqrt{6}+\sqrt{11}}$.

1.219. Найдите значение выражения:

а) $\frac{9}{\sqrt{13}-2}+\frac{3}{4+\sqrt{13}}$; б) $\frac{42}{2\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\frac{24}{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

в) $\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{10}{5-2\sqrt{5}}$; г) $\frac{8}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}-\frac{9}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

1.220. Упростите выражение:

а) $\frac{2}{1-2\sqrt{3}}+\frac{2}{1+2\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$.

1.221. Докажите, что значение выражения

$\left(\frac{18}{\sqrt{7}+1}+\frac{6}{\sqrt{7}-2}-\frac{8}{3-\sqrt{7}}\right)\left(\sqrt{7}+11\right)$ является целым числом.

1.222. Разложите на множители:

а) $5+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{3}-3$; в) $7\sqrt{6}+6$;

г) $\sqrt{3}-\sqrt{6}$; д) $\sqrt{10}+\sqrt{2}$; е) $\sqrt{15}-7\sqrt{3}$.

1.223. Сократите дробь:

а) $\dfrac{\sqrt{11}-11}{\sqrt{11}}$; б) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$; в) $\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{15}+\sqrt{3}}$;

г) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$; д) $\dfrac{\sqrt{7}-2}{\sqrt{14}-2\sqrt{2}}$; е) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

ж) $\dfrac{\sqrt{90}+\sqrt{30}}{\sqrt{45}+\sqrt{15}}$; з) $\dfrac{\sqrt{96}-\sqrt{40}}{\sqrt{24}-\sqrt{10}}$; и) $\dfrac{\sqrt{125}-\sqrt{50}}{\sqrt{180}-\sqrt{72}}$.

1.224. Сократите дробь:

а) $\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{10-4\sqrt{6}}$; в) $\dfrac{9-6\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})^2}$; г) $\dfrac{8+3\sqrt{7}}{(3+\sqrt{7})^2}$.

1.225. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$; б) $\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}$;

в) $\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}+3$; г) $\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}-3\sqrt{2}$.

1.226. Вычислите:

а) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}$;

б) $\sqrt{(8-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{7})^2}$;

в) $\sqrt{(1-\sqrt{6})^2}+\sqrt{(\sqrt{6}-5)^2}$;

г) $\sqrt{(13-\sqrt{19})^2}-\sqrt{(4-\sqrt{19})^2}$.

1.227. Докажите, что значение выражения является целым числом:

а) $\sqrt{(9-4\sqrt{3})^2}+\sqrt{(5-4\sqrt{3})^2}$;

б) $\sqrt{(3-6\sqrt{5})^2}+\sqrt{(19-6\sqrt{5})^2}$.

1.228. Найдите значение выражения:

а) $(1+\sqrt{7})^2+\sqrt{(2\sqrt{7}-10)^2}$;

б) $(2-\sqrt{5})^2-\sqrt{(4\sqrt{5}-9)^2}$;

в) $(\sqrt{77}+7)\cdot\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{11})^2}$;

г) $(3+\sqrt{39})\cdot\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{13})^2}$.

1.229. Упростите выражение:

а) $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$; б) $\sqrt{20-6\sqrt{11}}$;

в) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

д) $\sqrt{14+2\sqrt{33}}$; е) $\sqrt{9+2\sqrt{14}}$;

ж) $\sqrt{49-8\sqrt{3}}$; з) $\sqrt{21-4\sqrt{5}}$;

и) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; к) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$.

1.230. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$;

в) $\sqrt{49-8\sqrt{3}}-\sqrt{49+8\sqrt{3}}$; г) $\sqrt{46+6\sqrt{5}}+\sqrt{46-6\sqrt{5}}$.

1.231. Докажите, что значение выражения

$\sqrt{9-4\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$ является целым числом.

1.232. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\sqrt{28+16\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$.

1.233. Вычислите:

а) $\sqrt{13+30\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$; б) $\sqrt{22+6\sqrt{5+\sqrt{13-\sqrt{48}}}}$.

1.234. Вычислите: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

1.235. Найдите значение выражения $\sqrt{6}+\sqrt{5}-\dfrac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}$.

1.236. Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}.$$

1.237. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$.

1.238. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{8}}+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{16}}+\frac{1}{\sqrt{16}+\sqrt{20}}+\frac{1}{\sqrt{20}+\sqrt{24}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{24}+\sqrt{28}}+\frac{1}{\sqrt{28}+\sqrt{32}}+\frac{1}{\sqrt{32}+\sqrt{36}}.$$

1.239. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{28}$; в) $\sqrt{98}$; г) $\sqrt{300}$;

д) $\sqrt{180}$; е) $\sqrt{147}$; ж) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$; з) $-0{,}1\sqrt{500}$.

1.240. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{3b^2}$; б) $\sqrt{18a^4}$; в) $\sqrt{72k^4p^2}$; г) $\sqrt{0{,}04xy^8z^6}$.

1.241. Зная, что $m \leqslant 0$, $n \geqslant 0$, вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{5n^2}$; б) $\sqrt{7m^2}$; в) $\sqrt{48m^4n^6}$;

г) $\sqrt{\frac{4}{9}m^2n^3}$; д) $\sqrt{24{,}1m^8n^4}$; е) $\sqrt{4{,}3m^{18}n^{10}}$.

1.242. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{36a^2b}$, если $a > 0$;

б) $\sqrt{32m^6n^7}$, если $m \leqslant 0$;

в) $\sqrt{1{,}21x^5y^7}$, если $x < 0$, $y < 0$.

1.243. Вынесите множитель за знак корня:

а) $\sqrt{2x^3}$; б) $\sqrt{-y^3}$; в) $\sqrt{a^5b^4}$.

1.244. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}$; в) $-5\sqrt{2}$;

г) $\frac{1}{3}\sqrt{45}$; д) $-2\sqrt{7}$; е) $-\frac{1}{6}\sqrt{72}$.

1.245. Внесите множитель под знак корня:

а) $2\sqrt{x}$; б) $\frac{1}{5}\sqrt{50y}$; в) $-6\sqrt{a}$; г) $-\frac{1}{3}\sqrt{18b^5}$.

1.246. В выражении $k\sqrt{2}$ внесите множитель под знак корня, если:

а) $k > 0$; б) $k \leqslant 0$.

1.247. Внесите множитель под знак корня:

а) $n\sqrt{5}$, если $n \geqslant 0$; б) $m\sqrt{3}$, если $m < 0$;

в) $x\sqrt{x}$; г) $(a-b)\cdot\sqrt{b-a}$.

1.248. Упростите выражение:

а) $5\sqrt{2}+4\sqrt{2}$; б) $6\sqrt{3}-9\sqrt{3}$;

в) $8\sqrt{7}-\sqrt{7}$; г) $9\sqrt{5}+4\sqrt{5}-14\sqrt{5}$.

1.249. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел:

а) $6\sqrt{3}$ и $4\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$; в) $-2\sqrt{7}$ и $2\sqrt{7}$.

1.250. Упростите выражение:

а) $8\sqrt{5}+\sqrt{125}$; б) $2\sqrt{24}-\sqrt{54}$;

в) $3\sqrt{3}-\sqrt{12}+\sqrt{75}$; г) $5\sqrt{12}-2\sqrt{27}-3\sqrt{3}$;

д) $\sqrt{300}-4\sqrt{48}-\sqrt{75}$; е) $\sqrt{150}-\sqrt{6}-\sqrt{96}$.

1.251. Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{12}-\sqrt{3}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{2}\right)^2$; в) $\left(\sqrt{0,9}-\sqrt{2,5}\right)^2$.

1.252. Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{48}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{180}\right)$;

в) $\left(\sqrt{50}+\sqrt{18}\right):\sqrt{2}$; г) $\left(\sqrt{63}+5\sqrt{7}-\sqrt{28}\right):\left(2\sqrt{7}\right)$.

1.253. Выполните действия:

а) $2\sqrt{12}-\sqrt{128}-\left(\sqrt{75}-5\sqrt{2}\right)$;

б) $\sqrt{80}+\sqrt{27}-\left(\frac{2}{7}\sqrt{245}-\sqrt{45}\right)$.

1.254. Определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $\left(4\sqrt{3}+\sqrt{32}\right)\cdot\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{27}\right)+9$;

в) $\left(3\sqrt{7}+\sqrt{27}\right)\cdot\sqrt{3}-3\sqrt{21}$; г) $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)-2,5\sqrt{8}$.

1.255. Выполните умножение:

а) $\left(\sqrt{6}+2\right)\left(\sqrt{6}-1\right)$; б) $\left(3\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+5\right)$;

в) $\left(2-5\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)$; г) $\left(6\sqrt{11}+5\right)\left(3-\sqrt{11}\right)$;

д) $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$; е) $\left(7\sqrt{7}-2\sqrt{5}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{5}\right)$.

1.256. Периметр прямоугольника равен 12 см, а длина одной из его сторон равна $\left(\sqrt{3}+1\right)$ см. Найдите площадь прямоугольника.

1.257. Примените формулу разности квадратов и вычислите:

а) $(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})$; б) $(1-2\sqrt{3})(1+2\sqrt{3})$;

в) $(\sqrt{2}-\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$; г) $(2\sqrt{7}-\sqrt{13})(2\sqrt{7}+\sqrt{13})$.

1.258. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и упростите выражение:

а) $(\sqrt{2}+3)^2$; б) $(3\sqrt{3}-1)^2$; в) $(\sqrt{6}+\sqrt{11})^2$;

г) $(5\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$; д) $(\sqrt{12,5}+\sqrt{2})^2$; е) $(\sqrt{24,5}-\sqrt{2})^2$.

1.259. Вычислите:

а) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2-4\sqrt{6}$; б) $(\sqrt{5}-\sqrt{15})^2+\sqrt{300}$;

в) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+\sqrt{60}-(2\sqrt{2})^2$; г) $(3\sqrt{7}-2)^2+(6+\sqrt{7})^2$;

д) $(\sqrt{3}+1)^2(4-2\sqrt{3})$; е) $(2\sqrt{5}-3)^2(29+12\sqrt{5})$.

1.260. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{7}{\sqrt{21}}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; г) $-\frac{8}{5\sqrt{2}}$.

1.261. Упростите выражение:

а) $\sqrt{2}-\frac{10}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{15}{\sqrt{5}}+7\sqrt{5}$; в) $\left(\frac{12}{\sqrt{3}}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3}$.

1.262. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{11}{7-\sqrt{5}}$; в) $\frac{8}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{14}{3\sqrt{3}-\sqrt{13}}$.

1.263. Найдите значение выражения:

а) $\frac{8}{\sqrt{11}-3}+\frac{10}{3+\sqrt{11}}$; б) $\frac{3}{1-\sqrt{7}}-\frac{1}{\sqrt{7}+3}$;

в) $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}-\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$.

1.264. Докажите, что значение выражения $\frac{5}{2\sqrt{3}-3}-\frac{5}{2\sqrt{3}+3}$ является рациональным числом.

1.265. Разложите на множители:

а) $\sqrt{7}+7$; б) $\sqrt{2}-2$; в) $7\sqrt{5}+5$; г) $\sqrt{14}-\sqrt{2}$.

1.266. Сократите дробь:

а) $\frac{\sqrt{6}+6}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{14}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{30}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{15}-\sqrt{5}}$.

1.267. Сократите дробь:

а) $\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{3-\sqrt{5}}$; б) $\frac{12+6\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})^2}$; в) $\frac{(1-2\sqrt{3})^2}{26-8\sqrt{3}}$.

1.268. Упростите выражение:

а) $\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}$;

в) $\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}-4$; г) $\sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

1.269. Упростите выражение:

а) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{11-4\sqrt{7}}$; в) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$.

1.270. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$; б) $\sqrt{28-10\sqrt{3}}+\sqrt{28+10\sqrt{3}}$.

1.271. Вычислите: $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$.

1.272. Вычислите: $2-5\frac{5}{6}\cdot 6$.

Рис. 15

1.273. На координатной прямой отмечены числа m и n (рис. 15). Расположите в порядке убывания числа $\frac{1}{m}$; $\frac{1}{n}$ и 1.

1.274. Найдите значение выражения $10^{-9}:10^{-7}:10^{-1}$.

1.275. Разложите на множители $(5x-y)^2-9y^2$.

1.276. Решите уравнение $\frac{3x+8}{2}-\frac{4x+3}{6}=\frac{5x-1}{3}-1$.

1.277. Прямая, являющаяся графиком функции, заданной формулой $y=kx+b$, пересекает оси координат в точках $A(0; 6)$ и $B(-4; 0)$. Найдите k и b.

1.278. Среди решений уравнения $x-6y=25$ найдите такое, которое составлено из двух равных чисел.

1.279. Решите неравенство $4x^2-2x \geqslant (2x-3)(2x+3)$.

1.280. Автослесарь и автомеханик на СТО зарабатывали одинаково. В соответствии с количеством заказов в прошедшем месяце заработок автослесаря уменьшился на 10 %, а в текущем месяце увеличился на 20 %. В то же время заработок автомеханика в прошедшем месяце увеличился на 20 %, а в текущем месяце уменьшился на 10 %. Сравните новые заработки автослесаря и автомеханика.

Выясните, в каких учреждениях образования Беларуси можно получить профессию, связанную с ремонтом и обслуживанием автомобилей.

1.281. В школьной столовой на завтрак предлагаются горячие бутерброды и хот-доги. Каждый посетитель столовой может выбрать или хот-дог, или горячий бутерброд, или и то и другое вместе. Известно, что 68 человек выбрали хот-доги, 35 человек выбрали горячие бутерброды, а 18 человек выбрали и то и другое. Сколько человек завтракали в школьной столовой?

§ 5. Числовые промежутки. Объединение и пересечение числовых промежутков

1.282. Решите неравенство:

а) $-2x > 3$; б) $0{,}1x < 1$;

в) $-x \geqslant 4$; г) $3{,}2x \leqslant -9{,}6$.

1.283. Найдите пересечение и объединение множеств A и B, если $A = \{1;\ 3;\ 5;\ 6\}$, $B = \{1;\ 2;\ 4;\ 6\}$. Верно ли, что $\{3;\ 5\} \subset A$? $\{1;\ 2;\ 6\} \subset B$?

1.284. Какие из чисел $2\frac{1}{3}$; $2{,}3$; $2{,}303$ на координатной прямой лежат левее числа $2\frac{4}{13}$?

Каждой точке, отмеченной на координатной прямой, соответствует действительное число — координата этой точки. Например, $M(-1{,}5)$, $K(-1)$, $O(0)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ и т. д. (рис. 16). И наоборот, каждому действительному числу, например $-\pi$, $\sqrt{3}$, на координатной прямой соответствует точка (рис. 17).

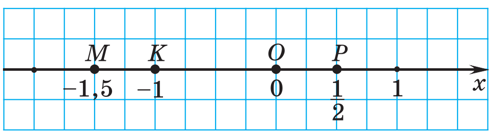


Рис. 16

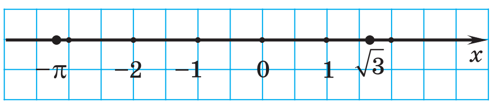
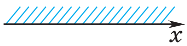
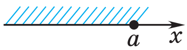
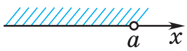
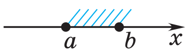
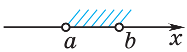
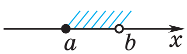
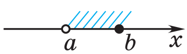


Рис. 17

Говорят, что между множеством точек координатной прямой и множеством действительных чисел установлено взаимно однозначное соответствие. Поэтому множество действительных чисел называют также **числовой прямой**.

В следующей таблице приведены все подмножества множества действительных чисел — части числовой прямой, которые называют **числовыми промежутками**, а также их характеристики.

Название числового промежутка	**Изображение**	**Обозначение**	**Чтение**
Числовая прямая		$(-\infty;\ +\infty)$	Множество всех чисел от минус бесконечности до плюс бесконечности
Числовой луч		$[a;\ +\infty)$	Множество всех чисел от a включительно до плюс бесконечности
		$(-\infty;\ a]$	Множество всех чисел от минус бесконечности до a включительно
Открытый числовой луч		$(a;\ +\infty)$	Множество всех чисел от a (не включая a) до плюс бесконечности
		$(-\infty;\ a)$	Множество всех чисел от минус бесконечности до a (не включая a)
Отрезок		$[a;\ b]$	Множество всех чисел от a включительно до b включительно
Интервал		$(a;\ b)$	Множество всех чисел от a (не включая a) до b (не включая b)
Полуинтервал		$[a;\ b)$	Множество всех чисел от a включительно до b (не включая b)
		$(a;\ b]$	Множество всех чисел от a (не включая a) до b включительно

Пересечение числовых промежутков

Рассмотрим пересечение множеств, которые являются числовыми промежутками. Например, найдем пересечение отрезка [2; 7] и полуинтервала (5; 9]. Отрезок отметим штриховкой выше координатной прямой, а полуинтервал — ниже (рис. 18). Их пересечение, т. е. общая часть, — это часть прямой с двойной штриховкой (и сверху, и снизу). Так отмечен полуинтервал (5; 7].

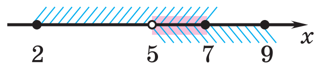


Рис. 18

Запишем пересечение отрезка [2; 7] и полуинтервала (5; 9], используя знак пересечения множеств: $[2;\ 7] \cap (5;\ 9] = (5;\ 7]$.

Объединение числовых промежутков

Найдем объединение двух числовых промежутков: отрезка [2; 7] и полуинтервала (5; 9], т. е. часть прямой, закрытую двумя этими промежутками. Штриховкой сверху или снизу отмечена часть прямой от 2 до 9 (рис. 19). Значит, объединение этих промежутков есть отрезок [2; 9].

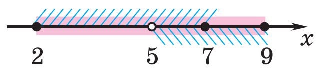


Рис. 19

Используя знак объединения множеств, объединение отрезка [2; 7] и полуинтервала (5; 9] можно записать так: $[2;\ 7] \cup (5;\ 9] = [2;\ 9]$.

Пример 1. Найдите пересечение и объединение промежутков $(-\infty;\ 0]$ и $[0;\ +\infty)$.

Решение. Отметим штриховкой выше прямой числовой луч $(-\infty;\ 0]$, т. е. все точки слева от точки 0 и точку 0 (рис. 20). Штриховкой ниже прямой отметим числовой луч $[0;\ +\infty)$, т. е. все точки справа от точки 0 и точку 0 (см. рис. 20). Общая часть этих лучей содержит только одну точку 0. Значит, пересечение лучей есть множество, состоящее из одной точки $(-\infty;\ 0] \cap [0;\ +\infty) = \{0\}$. Оба луча вместе закрывают всю прямую, значит, объединение этих лучей есть вся числовая прямая $(-\infty;\ 0] \cup [0;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$.

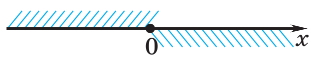


Рис. 20

Пример 2. Найдите пересечение и объединение промежутков $[3;\ +\infty)$ и $[-4;\ +\infty)$.

Решение. Общая часть двух лучей обозначена на прямой двойной штриховкой (рис. 21), поэтому пересечение этих двух лучей есть луч $[3;\ +\infty)$, т. е. $[-4;\ +\infty) \cap [3;\ +\infty) = [3;\ +\infty)$.

Оба луча вместе закрывают часть прямой — луч [–4; +∞). Значит, объединение этих лучей есть луч [–4; +∞), т. е. [–4; +∞) ∪ [3; +∞) = [–4; +∞).

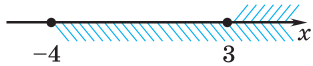


Рис. 21

Пример 3. Найдите пересечение и объединение отрезков [–1; 2] и [5; 9].

Решение. Эти два отрезка не имеют общих точек (рис. 22), их пересечение есть пустое множество: [–1; 2] ∩ [5; 9] = ∅. Оба отрезка вместе закрывают часть прямой, соответствующую двум отрезкам, поэтому объединение этих отрезков [–1; 2] ∪ [5; 9] состоит из всех чисел, принадлежащих хотя бы одному из отрезков [–1; 2] или [5; 9].

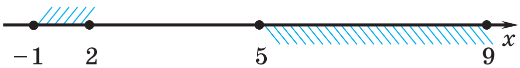
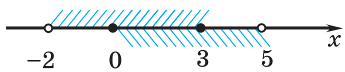
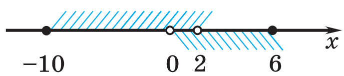
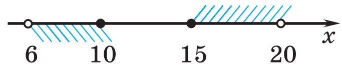
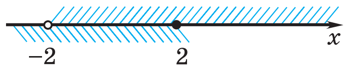


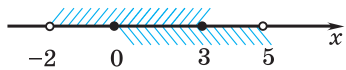
Рис. 22

Числовые промежутки	
1. Установите соответствие между промежутками [5; 9]; (–3,4; 1); [–1,2; +∞); (–∞; 9); (0; 10,5] и их названиями: интервал; числовой луч; открытый числовой луч; отрезок; полуинтервал.	[5; 9] — отрезок; (–3,4; 1) — интервал; [–1,2; +∞) — числовой луч; (–∞; 9) — открытый числовой луч; (0; 10,5] — полуинтервал.
Объединение и пересечение числовых промежутков	
2. Найдите пересечение промежутков: а) (–2; 3] и [0; 5); б) [–10; 2) и (0; 6]; в) [15; 20) и (6; 10]; г) (–∞; 2] и (–2; +∞).	а)  (–2; 3] ∩ [0; 5) = [0; 3]; б)  [–10; 2) ∩ (0; 6] = (0; 2);

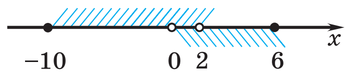
<table>
<tr>
<td></td>
<td>
в) 

$[15;\ 20) \cap (6;\ 10] = \varnothing$;

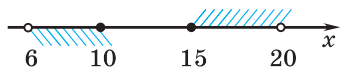
г) 

$(-\infty;\ 2] \cap (-2;\ +\infty) = (-2;\ 2]$.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
3. Найдите объединение промежутков:
а) $(-2;\ 3]$ и $[0;\ 5)$;
б) $[-10;\ 2)$ и $(0;\ 6]$;
в) $(6;\ 10]$ и $[15;\ 20)$;
г) $(-\infty;\ 2]$ и $(-2;\ +\infty)$.
</td>
<td>
а) 

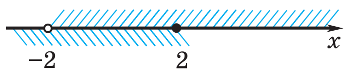
$(-2;\ 3] \cup [0;\ 5) = (-2;\ 5)$;

б) 

$[-10;\ 2) \cup (0;\ 6] = [-10;\ 6]$;

в) 

$(6;\ 10] \cup [15;\ 20) =$
$= (6;\ 10] \cup [15;\ 20)$;

г) 

$(-\infty;\ 2] \cup (-2;\ +\infty) = (-\infty;\ +\infty)$.
</td>
</tr>
</table>

1. Верно ли, что число 2 принадлежит: а) отрезку $[-2;\ 2]$; б) интервалу $(-2;\ 2)$; в) числовому лучу $[-2;\ +\infty)$; г) полуинтервалу $(-2;\ 2]$?
2. Верно ли, что: а) $3 \in (2;\ 4) \cap (3;\ 5)$; б) $-4 \in [-4;\ 4] \cup [1;\ +\infty)$?
3. Установите соответствие между числовыми промежутками: а) $(0{,}4;\ +\infty)$; б) $[-1;\ +\infty)$; в) $[-1;\ 8{,}9]$; г) $[6{,}5;\ 10)$ — и их названиями: 1) числовой луч; 2) отрезок; 3) открытый числовой луч; 4) полуинтервал.

1.285. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:

а) $[-1;\ 3]$; б) $[-5;\ +\infty)$; в) $(-\infty;\ 9)$;
г) $(4;\ 6)$; д) $(-5;\ 0]$; е) $[-3;\ 1)$;
ж) $\left[-\sqrt{3};1\right)$; з) $\left(-\infty;\ \sqrt{2}\right]$; и) $\left(-\sqrt{5};8\right]$.

1.286. Установите соответствие между промежутками $(-\infty;\ 10]$; $(-5;\ +\infty)$; $[-5;\ 10)$; $(-5;\ 10)$; $(-5;\ 10]$; $[-5;\ 10]$ и их изображениями (рис. 23).

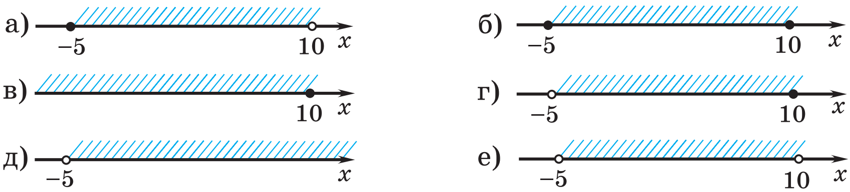


Рис. 23

1.287. Запишите промежутки, изображенные на рисунке 24.

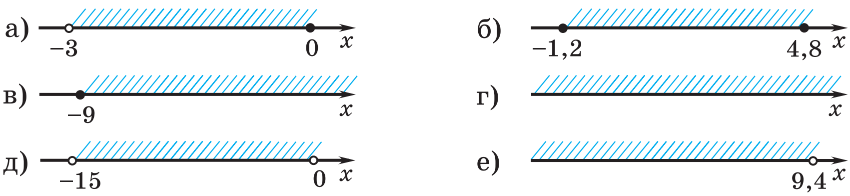


Рис. 24

1.288. Среди чисел $-1{,}2$; -1; $-0{,}8$; 0; $2\frac{1}{3}$; 3; $3{,}1$ выберите те, которые принадлежат промежутку $[-1;\ 3)$.

1.289. Найдите наименьшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-5;\ 6]$; б) $[0;\ 7)$; в) $[6{,}2;\ +\infty)$;

г) $(-5;\ +\infty)$; д) $(8;\ 10]$; е) $[-7{,}1;\ 0)$.

1.290. Назовите два каких-либо целых числа, не принадлежащих промежутку:

а) $(-\infty;\ 7]$; б) $(-3;\ 12)$; в) $[-8{,}3;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 0)$.

1.291. Выберите промежутки, которым принадлежит число 13:

а) $(-\infty;\ 13)$; б) $[5;\ +\infty)$;

в) $(12{,}9;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ 12{,}9]$.

1.292. Выберите промежутки, которым не принадлежит число -6:

а) $[-5{,}9;\ +\infty)$; б) $(-\infty;\ -5{,}9)$;

в) $(-\infty;\ -6)$; г) $(-\infty;\ -6{,}1)$.

1.293. Приведите два примера промежутков, которым:
а) принадлежат только три целых числа;
б) принадлежат ровно одиннадцать целых чисел;
в) принадлежат только отрицательные числа;
г) не принадлежит ни одно целое число.

1.294. Найдите пересечение промежутков:
а) $[-2; 3]$ и $[1; 5]$;
б) $[8; 11]$ и $(9; 13]$;
в) $[0; 5)$ и $[4; 9]$;
г) $(-4; 7)$ и $(2; 13)$.

1.295. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:
а) $(-\infty; 5)$ и $[-3; 7]$;
б) $(-\infty; 0]$ и $[-3; 5)$;
в) $[8; +\infty)$ и $\left(-\sqrt{3}; 14\right)$;
г) $(-2; +\infty)$ и $[3; +\infty)$.

1.296. Приведите два примера промежутков, пересечением которых является промежуток:
а) $[-7; 9]$;
б) $(-3; 7]$;
в) $[-8; +\infty)$;
г) $(-\infty; 0)$.

1.297. Найдите:
а) $[-2; 3] \cap (-1; 5]$;
б) $(-\infty; 4] \cap [4; +\infty)$;
в) $(-8; 9) \cap [9; 10)$;
г) $(4; 7) \cap [4; 7]$;
д) $[-6; 0] \cap \left[\sqrt{5}; 11\right)$;
е) $[-7; +\infty) \cap (0; 6)$.

1.298. Найдите объединение промежутков:
а) $[-3; 2]$ и $[1; 7]$;
б) $[7; 10]$ и $(8; 12]$;
в) $[-6; 1)$ и $[0; 8]$;
г) $(-5; 10)$ и $(3; 12)$.

1.299. Используя координатную прямую, найдите объединение промежутков:
а) $(-\infty; 4)$ и $[-2; 9]$;
б) $\left(-\infty; \sqrt{2}\right]$ и $[-1; 6)$;
в) $[4; +\infty)$ и $(-1; +\infty)$;
г) $(0; +\infty)$ и $(-7; 6]$.

1.300. Приведите два примера промежутков, объединением которых является промежуток:
а) $[-6; 12]$;
б) $[-9; 8)$;
в) $(-\infty; 0]$;
г) $(-\infty; +\infty)$.

1.301. Найдите:
а) $[-4; 8] \cup (-9; 3]$;
б) $(-\infty; 5] \cup [5; +\infty)$;
в) $\left(-3; \sqrt{6}\right) \cup \left[\sqrt{6}; 8\right)$;
г) $(2; 5) \cup [2; 5]$.

1.302. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $(-\infty;\ 7)$ и $(5;\ +\infty)$; б) $(3;\ 7)$ и $[7;\ 9)$;

в) $[5;\ +\infty)$ и $(-1;\ 5)$; г) $(0;\ +\infty)$ и $(1;\ \sqrt{7}]$;

д) $(-3;\ 5]$ и $[-3;\ 5)$; е) $[-\sqrt{2};\ \sqrt{5}]$ и $(-\sqrt{2};\ \sqrt{5})$.

1.303. Известно, что пересечением двух промежутков является число 5. Приведите примеры таких промежутков. Найдите их объединение.

1.304. Для чисел x_1, x_2, x_3 и x_4 известно, что $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Найдите:

а) $(x_1;\ x_3) \cap (x_2;\ x_4)$; б) $(x_1;\ x_3) \cup (x_2;\ x_4)$;

в) $(x_1;\ x_4) \cap (x_2;\ x_3)$; г) $(x_1;\ x_4) \cup (x_2;\ x_3)$.

1.305. Изобразите на координатной прямой числовой промежуток:

а) $[3;\ 7]$; б) $(-\infty;\ 7]$; в) $(-2;\ +\infty)$;

г) $(-3;\ 0)$; д) $[2;\ 5)$; е) $(-\sqrt{7};\ 6]$.

1.306. Запишите промежутки, изображенные на рисунке 25.

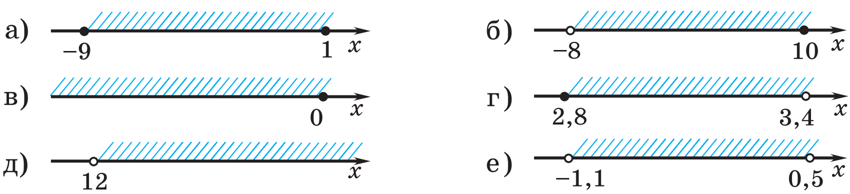


Рис. 25

1.307. Выберите промежутки, которым принадлежит число $-3,4$:

а) $(-\infty;\ -2)$; б) $[-6;\ -3]$; в) $\left[-3\frac{1}{3};\ +\infty\right)$;

г) $(-3,4;\ 0]$; д) $(2;\ 5)$; е) $(-\infty;\ -3,5]$.

1.308. Найдите наибольшее целое число, принадлежащее промежутку:

а) $[-2;\ 9]$; б) $(-3;\ 0]$; в) $(-\infty;\ 6,3]$;

г) $(-\infty;\ 4)$; д) $(-9;\ -3]$; е) $(-15;\ -8,2]$.

1.309. Выберите промежутки, которым принадлежит число –11:

а) $(-\infty; -11{,}5)$; б) $[-11{,}3; +\infty)$;

в) $(-11; +\infty)$; г) $(-\infty; -11]$.

1.310. Выберите промежутки, которые не содержат целых чисел:

а) $(3; 4)$; б) $[-2{,}1; 1{,}3)$;

в) $(0; +\infty)$; г) $(-9{,}2; -8{,}3]$;

д) $[-4{,}3; -4{,}1]$; е) $(-1; 0]$.

1.311. Приведите пример числового промежутка, которому:

а) принадлежат числа 0 и 19;

б) принадлежит число 0, но не принадлежит число 19;

в) принадлежат все неположительные числа.

1.312. Используя координатную прямую, найдите пересечение промежутков:

а) $[-7; 9]$ и $[2; 7]$; б) $(0; 3]$ и $(1; 4]$;

в) $(-\infty; 6)$ и $[-5; 7]$; г) $[1; +\infty)$ и $\left(-\sqrt{5}; 3\right)$.

1.313. Найдите:

а) $[-3; 6] \cap [6; 9)$; б) $[5; +\infty) \cap (6; +\infty)$;

в) $\left[\sqrt{2}; 8\right] \cap (8; 9)$; г) $[4; 9) \cap [4; 9]$.

1.314. Используя координатную прямую, найдите объединение промежутков:

а) $[-3; 10]$ и $[1; 12]$; б) $(0; 2]$ и $(1; 5]$;

в) $\left(-\infty; \sqrt{3}\right)$ и $[-6; 11]$; г) $[0; +\infty)$ и $(-5; 8)$.

1.315. Найдите:

а) $[-2; 5] \cup [5; 8)$; б) $[3; +\infty) \cup (8; 9)$;

в) $[2; 4] \cup (2; 4)$; г) $\left(-2; \sqrt{5}\right] \cup \left[-2; \sqrt{5}\right]$.

1.316. Используя координатную прямую, найдите пересечение и объединение промежутков:

а) $(-\infty; -3)$ и $(-8; +\infty)$; б) $(-2; 9)$ и $[9; 12)$;

в) $[6; +\infty)$ и $(0; 6)$; г) $(-\infty; 12)$ и $\left(0; \sqrt{5}\right)$;

д) $[-7; 12)$ и $(-7; 12]$; е) $\left[0; \sqrt{10}\right]$ и $\left(0; \sqrt{10}\right)$.

1.317. Представьте выражение $\dfrac{(3^{-2})^3}{27^{-3}}$ в виде степени с основанием $\dfrac{1}{3}$.

1.318. Замените знаки $*$ одночленами так, чтобы получились тождества:
а) $* + * + b^2 = (4a + *)^2$;
б) $* - 10ab + * = (* - *)^2$.

1.319. Затраты тренажерного зала окупаются, если тренировки посещают в среднем 125 человек в день. Число посетителей тренажерного зала за последнюю неделю приведено в таблице.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
91	94	140	134	143	138	142

Окупились ли затраты тренажерного зала за эту неделю?

1.320. Решите неравенство:
а) $8x^2 - 2x(4x + 1) \leqslant x$; б) $(x - 5)^2 > x^2 + 3x - 1$.

1.321. Найдите все значения переменной a, при которых равно нулю выражение:
а) $3a$; б) $-8a$;
в) $5(a - 1)$; г) $(a - 3)(a - 5)$.

§ 6. Системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной. Решение двойных неравенств

1.322. Назовите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:
а) $-x > 3$; б) $x \leqslant -1,5$;
в) $-x \geqslant -4,1$; г) $0,2x \leqslant -0,6$.

1.323. Найдите пересечение и объединение множеств A и B, если $A = [-2; 3]$, $B = (-4; 0]$.

1.324. Какие из чисел $2\frac{1}{3}$; 2,03; 2,303003 являются решениями неравенства $x \geqslant 2,3$?

Линейное неравенство $0{,}5x < -2$ имеет решения $x < -4$. На координатной прямой их можно изобразить точками, лежащими левее точки -4 (рис. 26). Эти точки соответствуют числам, принадлежащим открытому числовому лучу $(-\infty; -4)$, значит, все решения этого неравенства принадлежат открытому числовому лучу: $x \in (-\infty; -4)$.

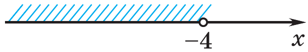


Рис. 26

Для записи решений неравенств можно использовать числовые промежутки.

Пример 1. Запишите в виде числового промежутка решение неравенства $x > 3{,}4$.

Решение. 1) Неравенство $x > 3{,}4$ является строгим, значит, число 3,4 не является его решением, поэтому число 3,4 отметим на координатной прямой пустой точкой (рис. 27).

2) Знак неравенства «>» показывает, что решением неравенства являются все числа, большие числа 3,4. Эти числа расположены на координатной прямой правее числа 3,4. Отметим штриховкой эту часть прямой (см. рис. 27).

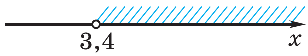


Рис. 27

3) Запишем получившийся числовой промежуток $(3{,}4; +\infty)$, являющийся решением неравенства $x > 3{,}4$.

Пример 2. Запишите в виде числового промежутка решение неравенства $x \leqslant 10$.

Решение. 1) Отметим на координатной прямой число 10 закрашенной точкой (рис. 28), так как неравенство $x \leqslant 10$ нестрогое, а значит, число 10 является его решением.

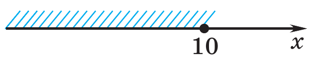
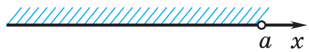


Рис. 28

2) Знак неравенства «⩽» показывает, что решением неравенства являются все числа, расположенные на координатной прямой левее числа 10, и само число 10. Отметим штриховкой эту часть прямой (см. рис. 28).

3) Получившийся числовой луч $(-\infty; 10]$ является решением неравенства $x \leqslant 10$.

В следующей таблице даны различные способы (модели) представления решения неравенств.

Неравенство	**Изображение на координатной прямой**	**Запись решения неравенства в виде числового промежутка**
$x \geqslant a$		$[a; +\infty)$
$x \leqslant a$		$(-\infty; a]$
$x > a$		$(a; +\infty)$
$x < a$		$(-\infty; a)$

Системы неравенств

Рассмотрим задачу. Для консервирования берут огурцы длиной не менее 4,5 см и не более 12 см. Запишите все возможные значения размеров огурцов, пригодных для консервирования.

Решение. Обозначим длину огурца через x см, тогда первое условие можно записать в виде линейного неравенства $x \geqslant 4{,}5$, а второе условие — в виде линейного неравенства $x \leqslant 12$. Поскольку оба условия должны выполняться одновременно, то объединим их в систему неравенств $\begin{cases} x \geqslant 4{,}5, \\ x \leqslant 12. \end{cases}$ Решим ее.

Решением первого неравенства системы является числовой луч $[4{,}5; +\infty)$, решением второго — числовой луч $(-\infty; 12]$. Отметим решения первого и второго неравенств системы на координатной прямой (рис. 29). Так как нужно найти значения переменной, удовлетворяющие и первому, и второму неравенству системы, то найдем пересечение числовых лучей. Это отрезок $[4{,}5; 12]$. Значит, каждому неравенству системы удовлетворяют значения переменной из отрезка $[4{,}5; 12]$. Этот отрезок является решением системы неравенств $\begin{cases} x \geqslant 4{,}5, \\ x \leqslant 12, \end{cases}$ т. е. $x \in [4{,}5; 12]$.

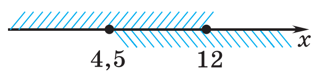
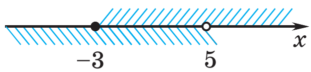


Рис. 29

Решением системы неравенств называется значение переменной, удовлетворяющее каждому неравенству системы. Решить систему неравенств — значит найти множество всех ее решений.

Чтобы решить систему линейных неравенств, нужно:

① Привести каждое из неравенств системы к виду $x > a$; $x < a$; $x \geqslant a$ или $x \leqslant a$. ② На координатной прямой штриховкой отметить решения каждого неравенства системы. ③ Найти **пересечение** числовых промежутков. ④ Записать ответ.	Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x+1 \geqslant -5, \\ 3x < 15. \end{cases}$ ① $\begin{cases} 2x+1 \geqslant -5, \\ 3x < 15; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x \geqslant -6, \\ 3x < 15; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < 5. \end{cases}$ ②  ③ $x \in [-3; 5)$. ④ *Ответ*: $[-3; 5)$.

Пример 3. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x-10>0, \\ 2x-3(2-x) \leqslant 9. \end{cases}$

Решение. ① Преобразуем каждое неравенство системы $\begin{cases} 4x-10>0, \\ 2x-3(2-x) \leqslant 9 \end{cases}$ и получим:

$$\begin{cases} 4x>10, \\ 2x-6+3x \leqslant 9; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2{,}5, \\ 5x \leqslant 15; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2{,}5, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

② Отметим на одной координатной прямой решение первого неравенства системы в виде открытого числового луча $(2{,}5; +\infty)$, а второго — в виде числового луча $(-\infty; 3]$.

③ Общая часть лучей, обозначенная двойной штриховкой на прямой (рис. 30), является решением системы неравенств. Это полуинтервал $(2{,}5; 3]$.

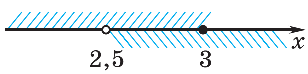


Рис. 30

④ *Ответ*: $(2{,}5; 3]$.

Совокупности неравенств

При подготовке к контрольной работе двое друзей решали линейные неравенства, а третий записывал все решения, которые являлись решениями хотя бы одного из неравенств. Например, один из друзей получил линейное неравенство $x \leqslant 12$, которому соответствует числовой луч $(-\infty;\ 12]$, а другой получил линейное неравенство $x \leqslant 20$, или числовой луч $(-\infty;\ 20]$. Так как третьему другу нужно записать все решения, которые принадлежат или первому, или второму промежутку, то он находит объединение этих числовых лучей:

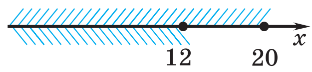


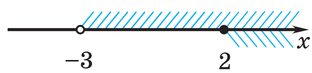
Рис. 31

$$(-\infty;\ 12] \cup (-\infty;\ 20] = (-\infty;\ 20] \text{ (рис. 31).}$$

На уроке учитель похвалил друзей и сказал, что для записи объединения неравенств используют понятие совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 12, \\ x \leqslant 20. \end{array}\right.$ Решение этой совокупности: $x \in (-\infty;\ 20]$.

Решением совокупности неравенств называется значение переменной, удовлетворяющее хотя бы одному из неравенств. Решить совокупность неравенств — значит найти множество всех ее решений.

Чтобы решить совокупность линейных неравенств, нужно:

① Привести каждое из неравенств совокупности к виду $x > a$; $x \geqslant a$; $x < a$ или $x \leqslant a$. ② На координатной прямой штриховкой отметить решения каждого неравенства совокупности. ③ Найти **объединение** числовых промежутков. ④ Записать ответ.	Решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x - 1 \geqslant 5, \\ x + 2 > -1. \end{array}\right.$ ① $\left[\begin{array}{l} 3x - 1 \geqslant 5, \\ x + 2 > -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 3x \geqslant 6, \\ x > -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 2, \\ x > -3. \end{array}\right.$ ②  ③ $x \in (-3;\ +\infty)$. ④ *Ответ*: $(-3;\ +\infty)$.

Пример 4. Решите совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} 3 - 4x > -5, \\ 2{,}4(x - 8) \leqslant 4{,}8. \end{array}\right.$$

Решение. ① Преобразуем каждое неравенство совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 3-4x>-5, \\ 2{,}4(x-8)\leqslant 4{,}8; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} -4x>-8, \\ x-8\leqslant 2; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x<2, \\ x\leqslant 10. \end{array}\right.$$

② Отметим на координатной прямой решение первого неравенства совокупности в виде открытого числового луча $(-\infty;\ 2)$, а второго — в виде числового луча $(-\infty;\ 10]$.

③ Объединение этих лучей (рис. 32) есть числовой луч $(-\infty;\ 10]$, т. е. $x \in (-\infty;\ 10]$.

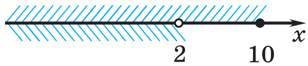


Рис. 32

④ *Ответ*: $(-\infty;\ 10]$.

Решение двойных неравенств

Рассмотрим задачу. На чашечных весах взвешивают арбуз. Если на одну чашу весов положить две гири по 5 кг, а на вторую — арбуз, то перевесит арбуз. Если добавить еще одну гирю массой 2 кг, то перевесят гири. Запишите все значения, которые может принимать масса арбуза.

Решение. Обозначим массу арбуза через x кг и получим двойное неравенство $10 < x < 12$. Отметим на координатной прямой числовой промежуток, соответствующий этому неравенству (рис. 33). Это интервал $(10;\ 12)$, значит, $x \in (10;\ 12)$.

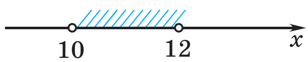


Рис. 33

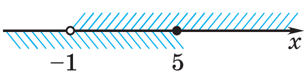
Двойное неравенство $a < x < b$ можно рассматривать как систему неравенств $\begin{cases} x>a, \\ x<b. \end{cases}$

Пример 5. Решите неравенство $-5 < 2x - 3 \leqslant 7$.

Решение. Представим двойное неравенство в виде системы неравенств $\begin{cases} 2x-3>-5, \\ 2x-3\leqslant 7. \end{cases}$ Решим эту систему:

① $\begin{cases} 2x-3>-5, \\ 2x-3\leqslant 7; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x>-2, \\ 2x\leqslant 10; \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-1, \\ x\leqslant 5. \end{cases}$

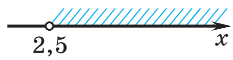
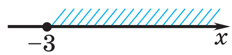
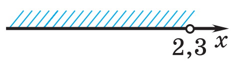
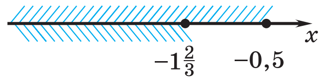
②



③ $x \in (-1;\ 5]$.

④ *Ответ*: $(-1;\ 5]$.

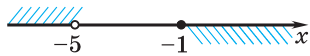
Двойное неравенство $-5 < 2x - 3 \leqslant 7$ можно решить и другим способом. Прибавим к каждой из частей двойного неравенства $-5 < 2x - 3 \leqslant 7$ число 3 и получим неравенство $-2 < 2x \leqslant 10$. Разделим неравенство $-2 < 2x \leqslant 10$ почленно на 2 и придем к неравенству $-1 < x \leqslant 5$. Таким образом, $x \in (-1;\ 5]$.

Линейные неравенства	
1. Запишите решение неравенства в виде числового промежутка: а) $x \leqslant -4$; б) $x > 2,5$; в) $x \geqslant -3$; г) $x < 2,3$.	а)  $x \in (-\infty;\ -4]$; б)  $x \in (2,5;\ +\infty)$; в)  $x \in [-3;\ +\infty)$; г)  $x \in (-\infty;\ 2,3)$.
Системы линейных неравенств	
2. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2,5 - 4x \geqslant 2 - (x - 2), \\ 0,2x + 3 \geqslant 5(x + 1) + 6. \end{cases}$	① $\begin{cases} 2,5 - 4x \geqslant 2 - (x - 2), \\ 0,2x + 3 \geqslant 5(x + 1) + 6; \end{cases}$ $\begin{cases} -3x \geqslant 1,5, \\ -4,8x \geqslant 8; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -0,5, \\ x \leqslant -1\frac{2}{3}. \end{cases}$ ②  ③ $x \in \left(-\infty;\ -1\frac{2}{3}\right]$. ④ *Ответ*: $\left(-\infty;\ -1\frac{2}{3}\right]$.

Совокупности неравенств	
3. Найдите решение совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} 3x \leqslant -3{,}5x - (9 - 2x), \\ 4x \geqslant -4x + 25{,}6. \end{array}\right.$	① $\left[\begin{array}{l} 3x \leqslant -3{,}5x - (9 - 2x), \\ 4x \geqslant -4x + 25{,}6; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 4{,}5x \leqslant -9, \\ 8x \geqslant 25{,}6; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -2, \\ x \geqslant 3{,}2. \end{array}\right.$ ②  ③ Объединение этих лучей есть множество точек, принадлежащих хотя бы одному из числовых лучей, т. е. $x \in (-\infty; -2] \cup [3{,}2; +\infty)$. ④ *Ответ*: $(-\infty; -2] \cup [3{,}2; +\infty)$.
Решение двойных неравенств	
4. Решите неравенство: а) $-4 \leqslant \frac{5x-1}{3} < 1$; б) $-x + 5 < -2x \leqslant 4x + 6$.	а) Умножим неравенство $-4 \leqslant \frac{5x-1}{3} < 1$ почленно на 3 и получим $-12 \leqslant 5x - 1 < 3$. К каждой из частей неравенства $-12 \leqslant 5x - 1 < 3$ прибавим 1 и получим $-11 \leqslant 5x < 4$. Разделим неравенство $-11 \leqslant 5x < 4$ почленно на 5 и придем к неравенству $-2{,}2 \leqslant x < 0{,}8$. *Ответ*: $[-2{,}2; 0{,}8)$. б) Запишем двойное неравенство $-x + 5 < -2x \leqslant 4x + 6$ в виде системы неравенств $\left\{\begin{array}{l} -2x > -x + 5, \\ -2x \leqslant 4x + 6. \end{array}\right.$

Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} -2x > -x + 5, \\ -2x \leqslant 4x + 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -5, \\ x \geqslant -1. \end{cases}$$



Пересечение лучей не содержит ни одной точки, система неравенств не имеет решений, т. е. $x \in \varnothing$.

Ответ: $\varnothing$.

1. Верно ли, что если число является решением системы неравенств, то оно является решением каждого неравенства системы?
2. Верно ли, что если число является решением совокупности неравенств, то оно является решением каждого неравенства совокупности?
3. Может ли множество решений двойного неравенства состоять только из двух чисел?

1.325. Изобразите на координатной прямой и запишите в виде числового промежутка решение неравенства:

а) $x \geqslant 3$; б) $x < 2$; в) $x \leqslant -1$; г) $x > -6$;

д) $x \geqslant 0$; е) $x < -\frac{1}{3}$; ж) $x \leqslant 2{,}7$; з) $x > 3\frac{2}{7}$.

1.326. Запишите неравенства, решения которых представлены на рисунке 34.

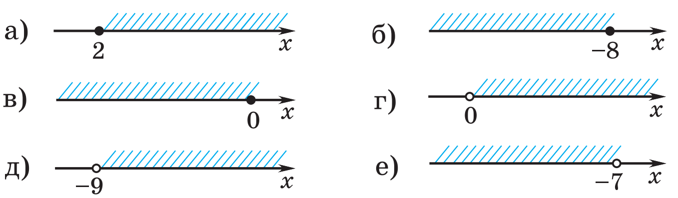


Рис. 34

1.327. Приведите по два примера строгих и нестрогих неравенств и запишите их решения в виде числовых промежутков.

1.328. Из чисел -3; -2; $-\frac{1}{3}$; 0; $\sqrt{2}$; 4; $5{,}6$ выберите те, которые являются решениями системы неравенств $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x > -2. \end{cases}$

1.329. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 1, \\ x < 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x > 4, \\ x > 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x < -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x < -9, \\ x \geqslant 10. \end{cases}$

Для каждой системы неравенств запишите (если это возможно) по два решения, являющихся: целыми числами; десятичными дробями; иррациональными числами.

1.330. Решите систему неравенств, используя алгоритм:

а) $\begin{cases} 8x > -8, \\ -4x \leqslant 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2{,}5x \geqslant -5, \\ -2x > -4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}25x < 1, \\ -2x \geqslant -6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{7}x \leqslant 5, \\ -4x > -12. \end{cases}$

1.331. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x > 4, \\ x \geqslant 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x > -10, \\ x \leqslant -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 6x \geqslant 12, \\ -4x \leqslant -8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{1}{3}x \geqslant 5, \\ -3x \geqslant -45. \end{cases}$

1.332. Из систем неравенств

$\begin{cases} x \leqslant \sqrt{2}, \\ x < \sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant \sqrt{2}, \\ x > \sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant \sqrt{2}, \\ x \geqslant \sqrt{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x > \sqrt{2}, \\ x < \sqrt{2} \end{cases}$

выберите системы:

а) не имеющие решений;

б) множество решений которых состоит только из одного числа.

1.333. Решите систему неравенств и запишите ее наибольшее целое решение:

а) $\begin{cases} \sqrt{13} - x \geqslant 0, \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + \sqrt{15} > 0, \\ 5 - 7x > 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + \sqrt{3} \leqslant 0, \\ 5x + 45 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \sqrt{2}x < \sqrt{18}, \\ 8x - 1 > 0. \end{cases}$

1.334. Придумайте систему двух линейных неравенств, решением которой является: а) промежуток (3; 7]; б) число 8; в) промежуток $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$; г) пустое множество.

1.335. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 3x < 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 1 < 10, \\ 2 - x \leqslant 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 1 > 3x - 5, \\ 5x + 8 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2 < 7x + 1, \\ 11x + 10 > x. \end{cases}$

1.336. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{5-x}$; б) $\sqrt{x} - \sqrt{x+6}$;

в) $\sqrt{x+1} - \sqrt{6-5x}$; г) $\sqrt{1-7x} + \sqrt{-x-6}$.

1.337. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(x-1) - 3(x+4) \leqslant x, \\ 6x - 3 < -17 - (x-5); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 9 - 2x > 4 - 3(x-1), \\ 6x - 4(x-1) > 3 + x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5(x-1) - x > 2x + 3, \\ 2(x+1) \leqslant x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x - (8-x) \geqslant 2x + 7, \\ 3(2x-1) - 2x > 2x - 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3(x+1) - 4(2x+3) \geqslant 12, \\ 5(x-4) + 7x < 6(2x-1); \end{cases}$

е) $\begin{cases} 6(2x-3) - 5(4x-9) > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) \geqslant 3. \end{cases}$

1.338. Найдите значения аргумента, при которых обе функции $y = 3x + 1$ и $y = 5 - 3x$ принимают положительные значения.

1.339. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x + 4 \geqslant 4x, \\ x - \dfrac{x-4}{5} > 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - \dfrac{x}{4} > 2, \\ \dfrac{x-1}{2} \leqslant 1 - \dfrac{x-2}{3}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + \dfrac{x-1}{4} \leqslant 5, \\ 2x > \dfrac{x}{2} - 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{4x+1}{6} + 1 > \dfrac{5x-1}{5}, \\ 2(x+8) - 7(x+2) < 5 - x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+12}{6} < \dfrac{x+2}{3}, \\ 5(x-1) + 7(x+2) \geqslant 3; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x+4}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{6}, \\ 3x \geqslant \dfrac{3x}{2} - \dfrac{x-7}{4}. \end{cases}$

1.340. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{\dfrac{x-4}{5} + 1} + \sqrt{8-x}$;

б) $\sqrt{3 - \dfrac{x}{8}} - \sqrt{\dfrac{2x+5}{3}}$.

1.341. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{7}x \leqslant \sqrt{35}, \\ \dfrac{3x+1}{5} > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} > \dfrac{x}{4}, \\ \sqrt{75} - x \geqslant \sqrt{48}. \end{cases}$

1.342. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5(x-2)(x+2) \leqslant x(5x-1), \\ 4x - 7 > 3 - 6x; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5(x-0{,}4) - 7 < 3x + 2, \\ (x-4)^2 - x^2 \leqslant 10 - 3x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (2x-1)(x+2) > 2x^2, \\ (x-3)^2 \geqslant (x+6)(x-1); \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x-5)^2 + 50 \geqslant (x-3)(x-4) + 15, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7); \end{cases}$

д) $\begin{cases}(x+3)(3-x) > 11-(x-2)^2, \\ \dfrac{3+x}{4} - \dfrac{2x-1}{6} \geqslant 1;\end{cases}$

е) $\begin{cases}2x - \dfrac{x+1}{3} \leqslant \dfrac{x+1}{2}, \\ (x-3)(x+5) \leqslant (x-6)^2 - 51.\end{cases}$

1.343. Найдите все значения переменной x, при которых значение выражения $\frac{4-5x}{20}$ больше значения выражения $5 - \frac{x}{10}$, а значение выражения $2 - 3x$ неотрицательно.

1.344. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств

$$\begin{cases}\dfrac{x+2}{3} - \dfrac{x-8}{2} + 1 > x - \dfrac{2x-1}{6}, \\ 1 - x > \dfrac{1+x}{4}.\end{cases}$$

1.345. Найдите сумму целых решений системы неравенств

$$\begin{cases}0,8(x-3) - 0,3(2-x) \leqslant 3,2, \\ 1,6 - x < \dfrac{2x+1}{5}.\end{cases}$$

1.346. Возможна ли такая ситуация: старший брат за 8 тетрадей, по 50 к. каждая, и 12 карандашей заплатил меньше 10 р., а младший брат за две такие же тетради и 15 таких же карандашей заплатил больше 10 р.?

1.347. Задумано целое число. Если из задуманного числа вычесть 2, то полученное число будет больше $\frac{5}{3}$ задуманного. Если к задуманному числу прибавить 3, то полученное число будет больше $\frac{2}{5}$ задуманного. Какое число могло быть задумано?

1.348. Одна из сторон прямоугольного участка земли на 22 м меньше другой. Какой длины может быть бóльшая сторона, чтобы на ограждение участка пошло не больше 190 м изгороди?

1.349. Основание равнобедренного треугольника равно 9 см, а его периметр меньше 25 см. Какую длину может иметь боковая сторона этого треугольника?

1.350. Члены студенческого педагогического отряда, принимая участие в озеленении территории, прилегающей к корпусам БГПУ, за 5 ч посадили меньше 300 кустов рассады, а за 8 ч — больше 400 кустов рассады. Каждый член отряда сажал одинаковое число кустов рассады в час. Найдите это число, если в отряде 8 человек.

Выясните, студенческие отряды каких профилей действуют на территории Республики Беларусь.

1.351. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x \geqslant 7; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant -3, \\ x < 0; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} x > -9, \\ x < 2; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x \leqslant 3, \\ x \geqslant 5. \end{array}\right.$

1.352. Придумайте совокупность неравенств, решением которой является: а) промежуток $(-\infty; 9]$; б) промежуток $(-4; +\infty)$; в) множество всех действительных чисел.

1.353. Решите совокупность неравенств, используя алгоритм:

а) $\left[\begin{array}{l} 6 - 2x < 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3x + 3 \geqslant 2x - 1, \\ 3x - 2 \geqslant 4x + 2; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} 5(x + 1) > 3x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 > x + 1; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} 4(x + 3) - 17 \leqslant 3(x - 5) + 7x, \\ 4(x - 1) + 5x < 3(x + 5) - 9. \end{array}\right.$

1.354. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x - 2 < \dfrac{x + 1}{2}, \\ \dfrac{x}{6} \geqslant 3; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3 - \dfrac{x - 3}{3} \leqslant x, \\ \dfrac{6x - 1}{3} < 18; \end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{5x - 1}{6} \leqslant \dfrac{2x - 1}{2}, \\ 1 > \dfrac{x + 4}{3}. \end{array}\right.$

1.355. Решите двойное неравенство:

а) $-4 \leqslant 2x < 5$; б) $-7 < x + 3 \leqslant 10$;

в) $6 < -x < 8$; г) $-5 \leqslant 5 - 2x \leqslant 7$;

д) $-2 \leqslant \dfrac{x}{3} < 5$; е) $0 \leqslant \dfrac{-2x}{7} \leqslant 6$.

1.356. Найдите значения переменной, при которых значения двучлена $2 - 5x$ принадлежат промежутку:

а) $(-8; 12]$; б) $[-17; 0)$.

1.357. Найдите значения аргумента, при которых функция $y = 5 - 3x$ принимает значения:

а) больше -2, но меньше 8;

б) не меньше 6, но меньше 10.

1.358. Решите двойное неравенство двумя способами:

а) $2{,}1 < 0{,}7x + 3{,}5 < 4{,}2$;

б) $-143{,}4 \leqslant 0{,}6 + 6x < 19{,}2$;

в) $-2{,}7 < 2 - 0{,}1x \leqslant 3{,}84$.

1.359. Решите двойное неравенство:

а) $-3 < \frac{2x-1}{3} \leqslant 0$; б) $-1 \leqslant \frac{5x+1}{4} < 4$;

в) $-2 \leqslant \frac{3x+5}{3} \leqslant 0$; г) $5 < \frac{8-7x}{3} < 9$;

д) $-1 < \frac{1-5x}{1{,}2} \leqslant 0$; е) $-3 \leqslant \frac{3-2x}{0{,}5} < -2$.

1.360. Найдите значения переменной, при которых значение выражения $\frac{1}{7}(1-3x)$ больше 2, но не превосходит 5.

1.361. Найдите значения переменной, при которых значение дроби $\frac{3-x}{5}$ принадлежит промежутку:

а) $[0; 9)$; б) $[-0{,}1; 0{,}9]$.

1.362. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $x - 6 < 2x - 2 \leqslant 3x + 3$; б) $3x - 7 < 6 - x < 10x$;

в) $3x - 4 \leqslant 10 - x < 2x + 5$; г) $5x + 1 \leqslant 7 - x \leqslant 2 - 3x$.

1.363. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = 8 - 3x$ расположен не ниже графика функции $y = 5x - 1$, но ниже графика функции $y = 6x$.

1.364. Найдите наибольшее и наименьшее целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x - \frac{1}{2} < \frac{x+2}{3}, \\ \frac{2x+3}{4} \geqslant \frac{x}{8} + \frac{1}{4}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{x}{4} + \frac{x}{2} \leqslant x + 5, \\ \frac{1}{8}(x+2) < \frac{1}{7}(2-x). \end{cases}$

1.365. Найдите значения числа a, при которых система неравенств $\begin{cases} 2x + 3 \geqslant x + 1, \\ 2x - a \leqslant 2a - x: \end{cases}$

а) не имеет решений;

б) имеет множество решений, состоящее только из одной точки;

в) имеет решением отрезок.

1.366. Для каждого значения числа a решите систему неравенств $\begin{cases} 11x - 9 > 13, \\ x > a. \end{cases}$

1.367. Для каждого значения числа a решите совокупность неравенств $\left[\begin{array}{l} 11x - 9 \geqslant 13, \\ x < a. \end{array}\right.$

1.368. Найдите значения числа a, при которых наибольшим целым решением:

а) системы неравенств $\begin{cases} x < a, \\ x \geqslant -10 \end{cases}$ является число -5;

б) совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x \leqslant a, \\ x < 3 \end{array}\right.$ является число 3.

1.369. Изобразите на координатной прямой и запишите в виде числового промежутка решение неравенства:

а) $x < 2$; б) $x \geqslant \frac{6}{11}$; в) $x > 0$; г) $x \leqslant -1{,}2$.

1.370. Запишите неравенства, решения которых представлены на рисунке 35.

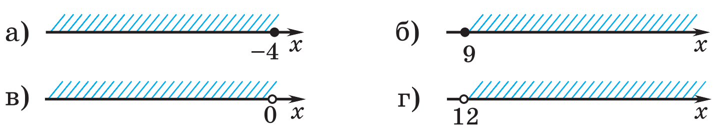


Рис. 35

1.371. Выберите систему неравенств, одним из решений которой является число 7:

а) $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x < 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \leqslant 7, \\ x > 7{,}1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > 6{,}5, \\ x < 8. \end{cases}$

1.372. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x < 8, \\ x < 4; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x > -5, \\ x \geqslant 7; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x > 9. \end{cases}$

Запишите, если это возможно, два каких-либо решения каждой системы неравенств, являющихся целыми числами.

1.373. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} \sqrt{17} - x \geqslant 0, \\ 3x - 11 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + \sqrt{2} > 0, \\ 4 - 9x > 0. \end{cases}$

1.374. Придумайте систему двух линейных неравенств, решением которой:

а) является число 3 и не является число 2;

б) является число $\sqrt{3}$ и число $\sqrt{5}$.

1.375. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x < 6, \\ 5x - 3 \geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 - 3x \leqslant 16, \\ x + 9 < 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 9 \geqslant 4x - 6, \\ 10 + 4x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5 - x < x + 4, \\ 7x - 1 > 1 - 6x; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 4x \leqslant -x + 15, \\ -3x + 4 \geqslant -5; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 7x - 3 < 6x + 2, \\ -2x + 9 \geqslant -x + 4. \end{cases}$

1.376. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{7 - x}$; б) $\sqrt{4x - 1} - \sqrt{x + 5}$.

1.377. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2(3x - 1) \geqslant 10 - 4(2x + 3), \\ 3(x - 3) < 2(x + 4); \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3(x + 1) - 4(2x + 3) \leqslant 12, \\ 5(x - 4) - 7 > 6(3x - 1). \end{cases}$

1.378. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 4x - 2 \leqslant 2{,}5x + 1, \\ 2 - x > \dfrac{x - 2}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{3} \leqslant \dfrac{2}{3}x, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{7} \leqslant \dfrac{2x}{7}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 1 \geqslant \dfrac{x - 1}{4}, \\ \dfrac{x - 1}{3} < \dfrac{x + 1}{5} - \dfrac{1}{15}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 4 \leqslant 1 - \dfrac{x - 1}{4}; \\ 2x - 0{,}5 > \dfrac{x}{2} - 1{,}5. \end{cases}$

1.379. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}(x+3)^2-7>x^2+3x,\\ 7(x-1)\leqslant 8x-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x+5)(x-5)\leqslant x(x+5),\\ \dfrac{x+3}{4}-\dfrac{x-2}{3}>0.\end{cases}$

1.380. Если к задуманному целому числу прибавить 3 и эту сумму разделить на 10, то полученное частное будет больше 5. А если из того же задуманного числа вычесть 7 и эту разность разделить на 6, то полученное частное будет меньше 7. Найдите задуманное число.

1.381. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 12 см, а периметр больше 38 см. Какую длину может иметь основание этого треугольника?

1.382. Оператор мобильной связи предлагает три тарифа. В таблице приведена предусмотренная каждым тарифом ежемесячная абонентская плата, а также стоимость минуты разговора. Сколько минут в месяц нужно разговаривать, чтобы выгодным оказался тариф *А*?

Тариф	Абонентская плата, р.	Стоимость минуты разговора, к.
А	12	8
Б	15	6
В	11	9

1.383. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l}x\leqslant 4,\\ x<1;\end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l}x>6,\\ x\geqslant 5;\end{array}\right.$ в) $\left[\begin{array}{l}x<8,\\ x>-5;\end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l}x\leqslant 3,\\ x\geqslant 7.\end{array}\right.$

1.384. Решите совокупность неравенств, используя алгоритм:

а) $\left[\begin{array}{l}15-3x<0,\\ 4x\leqslant 8;\end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l}2(x-1)-3>3x-5,\\ 3(x+1)-7x\geqslant 8-6x;\end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l}4(x+1)-x\leqslant 2(x-5)-3,\\ 5(x+1)-2\geqslant 5(2x-1)+1.\end{array}\right.$

1.385. Решите двойное неравенство:

а) $-6 < 3x \leqslant 12$; б) $-4 \leqslant x - 5 < 2$;

в) $-5 < -x \leqslant 9$; г) $-1 < 3 - 2x < 7$.

1.386. Найдите значения переменной, при которых значения двучлена $3 - 8x$ принадлежат промежутку $[0; 43]$.

1.387. Решите двойное неравенство:

а) $-0{,}3 \leqslant 0{,}1x - 0{,}1 < 0{,}2$;

б) $-4{,}5 < 1 - 0{,}5x \leqslant 3{,}5$;

в) $0{,}3 < 0{,}5 - 0{,}01x < 0{,}6$.

1.388. Решите двойное неравенство:

а) $-7 < \frac{3x+1}{5} \leqslant 0$; б) $2 \leqslant \frac{2-7x}{3} < 9$.

1.389. Найдите значения переменной, при которых значение дроби $\frac{5-x}{3}$ принадлежит промежутку $(-0{,}7; 0]$.

1.390. Найдите наибольшее и наименьшее целые решения системы неравенств $\begin{cases} x - 3 \leqslant 2 - \frac{x-1}{4}, \\ 2x - 4{,}25 > \frac{x}{2} - 5{,}25. \end{cases}$

1.391. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $6x + 1 < 3x - 5 \leqslant x + 2$; б) $7x + 1 \leqslant 8 - x < 9x - 2$.

1.392. Найдите значения числа a, при которых система неравенств $\begin{cases} 3x \leqslant 15, \\ x > a \end{cases}$ не имеет решений.

1.393. Найдите значения числа a, при которых наименьшим целым решением совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x > a, \\ x \geqslant -7 \end{array}\right.$ является число -7.

1.394. Найдите значение выражения $(32{,}24 : 4 - 2{,}6) \cdot 0{,}1$.

1.395. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел $3{,}6 \cdot 10^{10}$ и $3 \cdot 10^{10}$. Результат запишите в стандартном виде.

1.396. Занятие факультатива по математике продолжалось 1,5 ч. На повторение рациональных приемов устного счета ушло 10 % этого времени. Остальное время решали задачи. В конце занятия выяснилось, что было решено 9 задач. Сколько в среднем времени шло на решение одной задачи?

1.397. Решите уравнение $9x^2 - (3x - 1)^2 = 11$.

1.398. Из равенства $2m - 5n = 10$ выразите:

а) m через n; б) n через m.

1.399. Найдите значение выражения:

а) $2\sqrt{6\frac{1}{4}} + 9\sqrt{1\frac{7}{9}}$; б) $5\sqrt{2,56} - 2\left(\sqrt{5}\right)^2$.

1.400. Разложите на множители:

а) $x^2 + 3x$; б) $4x^2 - 9$; в) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$.

1.401. Вычислите: $\left(2\sqrt{3} + 5\right)^2 + \left(10 - \sqrt{3}\right)^2$.

1.402. На осенней распродаже овощей семья приобрела на зиму 5 мешков картофеля и 2 сетки моркови, всего 160 кг овощей. Их соседи купили 3 таких же мешка картофеля и 1 сетку моркови, причем оказалось, что картофеля они купили на 85 кг больше, чем моркови. Сколько килограммов картофеля было в каждом мешке?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать и уметь применять определение квадратного корня и арифметического квадратного корня из числа;
- знать и уметь применять свойства арифметических квадратных корней для вычисления значений выражений и выполнения преобразований;
- знать определение множества действительных чисел и соотношения между числовыми множествами;
- знать и уметь применять числовые промежутки, их пересечение и объединение для записи числовых множеств и решений неравенств;
- знать определение решения системы и совокупности неравенств;
- уметь решать системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной;
- уметь решать двойные неравенства;
- уметь применять системы и совокупности линейных неравенств с одной переменной при решении задач.

Я проверяю свои знания

1. Изобразите на координатной прямой и запишите в виде числового промежутка решение неравенства:

а) $x > \frac{1}{2}$; б) $x \leqslant 0$; в) $x \geqslant -5$; г) $x < 1{,}8$.

2. Выберите верные утверждения:

а) $\sqrt{2} \in \boldsymbol{I}$; б) $-3 \in \boldsymbol{N}$; в) $0 \in \boldsymbol{Z}$;

г) $\sqrt{3} \in \boldsymbol{R}$; д) $\frac{1}{7} \in \boldsymbol{Q}$; е) $1{,}5 \in \boldsymbol{R}$.

3. Найдите значение выражения:

а) $\frac{1}{4}\sqrt{16} + \sqrt{49}$; б) $-\frac{5}{\sqrt{0{,}04}}$;

в) $8\sqrt{2\frac{1}{4}} - 3\sqrt{5\frac{4}{9}}$; г) $6\sqrt{1{,}21} - 2\left(\sqrt{2}\right)^2$.

4. Решите систему (совокупность) неравенств:

а) $\begin{cases} 5x + 4 > 0, \\ 3x + 1{,}5 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x - 15 \geqslant 0, \\ 12 - 3x > 0; \end{array}\right.$

в) $\begin{cases} x - 1 \leqslant 7x + 2, \\ 11x + 13 \geqslant x + 3; \end{cases}$ г) $\left[\begin{array}{l} 3 - 6x > 15, \\ -3x \leqslant 21. \end{array}\right.$

5. Воспользуйтесь свойствами корней и найдите значения выражений $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ и $\sqrt{x} : \sqrt{y}$, если:

а) $x = 48$; $y = 75$;

б) $x = 1{,}47$; $y = 0{,}27$;

в) $x = 1{,}9$; $y = \frac{5}{38}$.

6. Если из задуманного целого числа вычесть 4 и эту разность разделить на 9, то полученное частное будет меньше 5. А если к этому же задуманному числу прибавить 8 и эту сумму разделить на 11, то полученное частное будет больше 5. Какое число было задумано?

7. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{5} + 2\sqrt{20} - \sqrt{45}$; б) $\frac{15}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{3}$;

в) $\left(2 - \sqrt{17}\right)\left(2 + \sqrt{17}\right)$; г) $\left(\sqrt{7} - \sqrt{3}\right)^2 - 10$.

8. Найдите область определения выражения

$$\sqrt{\frac{x}{5} - \frac{x}{3} + 2} + \sqrt{2x + \frac{1}{2}}.$$

9. Внесите множитель под знак корня:

а) $(c-2)\sqrt{3c-6}$; б) $(n-9)\sqrt{45-5n}$.

10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; б) $\sqrt{\sqrt{28+16\sqrt{3}}}$;

в) $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

Практическая математика

1. В рамках акции «От памятника к памятнику» учащиеся колледжа решили благоустроить Аллею Героев и высадить карликовые туи вдоль дорожки, вымощенной восемью одинаковыми квадратными плитками. Площадь одной плитки равна 36 дм^2. Посадка саженцев планируется по обе стороны дорожки на расстоянии 0,8 м друг от друга (рис. 36). Сколько туй необходимо приобрести, если посадка должна начинаться с начала дорожки?

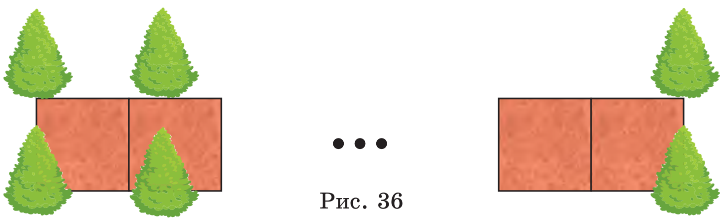


Рис. 36

2. Для ремонта складских помещений планируется приобрести цемент в одной из трех фирм. В таблице указана стоимость мешка цемента и доставки заказа в каждой фирме. Выясните, при покупке какого количества мешков цемента самыми выгодными будут условия фирмы *А*.

Фирма	Стоимость мешка цемента, р.	Стоимость доставки всего заказа, р.
А	7,6	32
Б	7,5	42
В	8	Бесплатно

3. Когда во Владивостоке полдень, в Пекине 10 часов, а в Минске 5 часов утра. Определите:
а) в какое время суток трое друзей, живущих соответственно в Пекине, Минске и Владивостоке, могут одновременно выйти в Интернет, чтобы пообщаться, если каждый из них по «своему» времени с 8 до 14 часов находится на занятиях, а время после 22 часов у каждого из них отводится на сон;
б) в какое «свое» время каждый из них будет поздравлять друзей с Новым годом.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание

а) Найдите информацию о различных способах вычисления квадратных корней из больших чисел.

б) Придумайте для друзей задания на вычисление квадратных корней.

Готовимся к олимпиадам

1. Слово, характеризующее взаимоотношения между людьми, зашифровано с помощью кода: 25 324 441 64 4 1. Расшифруйте это слово.

2. Найдите все значения a, при которых выражения $a+\sqrt{15}$ и $\frac{1}{a}-\sqrt{15}$ принимают целые значения.

Интересно знать. Международная студенческая олимпиада по математике проводится ежегодно, начиная с 1994 г. В ней принимают участие сотни студентов из десятков университетов мира. Белорусские студенты принимают участие в этой олимпиаде с 2001 г. За 2001–2018 гг. команда Беларуси завоевала 40 золотых, 35 серебряных и 20 бронзовых медалей. Победители первых студенческих олимпиад по математике ведут активную научную и педагогическую деятельность.

Глава 2

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 7. Квадратные уравнения. Решение неполных квадратных уравнений

2.1. Решите уравнение:
а) $2x + 9 = 0$; б) $1,2x = 0$; в) $-3,3x = 0$.

2.2. Разложите на множители многочлен:
а) $x^2 - 16$; б) $4x^2 - 49$; в) $2x - x^2$; г) $5x^2 + x$.

2.3. При каких значениях переменных верно равенство:
а) $ab = 0$; б) $a(b - 1) = 0$?

Рассмотрим задачу. Длина страницы книги на 8 см больше ширины, площадь страницы равна 425 см^2. Каковы размеры страницы?

Обозначим ширину страницы через x см, тогда ее длина равна $(x + 8)$ см, а площадь — $x(x + 8)$ см^2. По условию задачи площадь страницы равна 425 см^2. Составим уравнение $x(x + 8) = 425$. Раскроем скобки и перенесем число 425 из правой части в левую, получим уравнение $x^2 + 8x - 425 = 0$. Уравнение такого вида называется **квадратным**. Решение многих задач приводит к квадратным уравнениям.

Определение Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратным уравнением**. Число a называется первым коэффициентом, b — вторым коэффициентом, c — свободным членом.

Например, уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$ является квадратным, в нем первый коэффициент $a = 2$, второй коэффициент $b = -5$, свободный член $c = 3$.

В уравнении $4x^2 - x = 0$ первый коэффициент $a = 4$, второй коэффициент $b = -1$, свободный член $c = 0$.

В уравнении $3x^2 - 2 = 0$ первый коэффициент $a = 3$, второй коэффициент $b = 0$, свободный член $c = -2$.

В уравнении $12x^2 = 0$ первый коэффициент $a = 12$, второй коэффициент $b = 0$, свободный член $c = 0$.

Квадратные уравнения

$6x^2 - x - 4 = 0$; $a = 6$, $b = -1$, $c = -4$

$x^2 + 5x = 0$; $a = 1$, $b = 5$, $c = 0$

$2x^2 - 7 = 0$; $a = 2$, $b = 0$, $c = -7$

$-5x^2 = 0$; $a = -5$, $b = 0$, $c = 0$

Неполные квадратные уравнения

$ax^2 + bx = 0$; $a \neq 0$, $b \neq 0$

$ax^2 + c = 0$; $a \neq 0$, $c \neq 0$

$ax^2 = 0$; $a \neq 0$

Квадратные уравнения, в которых или коэффициент b, или свободный член c, или и b и c равны нулю, называются **неполными квадратными уравнениями.**

Решение неполных квадратных уравнений

1. Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$

Найдем корни уравнения $4x^2 - x = 0$. Разложим многочлен в левой части уравнения на множители и получим: $x(4x - 1) = 0$.

Произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из множителей произведения равен нулю. Справедливо и обратное: если произведение равно нулю, то хотя бы один из множителей равен нулю.

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Знак «$\Leftrightarrow$» означает, что уравнение $a \cdot b = 0$ равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ b = 0. \end{array}\right.$$

Применим это свойство и получим:

$$x(4x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 4x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 0,25. \end{array}\right.$$

Ответ: 0; 0,25.

$x^2 + 5x = 0$;

$x(x + 5) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Ответ: –5; 0.

2. Уравнения вида $ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$

Решим уравнение:

а) $x^2 - 4 = 0$; б) $3x^2 + 48 = 0$.

а) Разложим на множители двучлен в левой части уравнения: $(x - 2)(x + 2) = 0$.

$25x^2 - 1 = 0$;

$(5x + 1)(5x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 1 = 0, \\ 5x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -0,2, \\ x = 0,2. \end{array}\right.$$

Ответ: –0,2; 0,2.

Применим свойство о равенстве нулю произведения и получим:

$$(x-2)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: -2; 2.

б) Поскольку сумма в левой части уравнения $3x^2+48=0$ положительна при любом значении x, то уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

3. Уравнения вида $ax^2 = 0$, где $a \neq 0$

Решим уравнение $5x^2 = 0$. Так как $5 \neq 0$, то произведение равно нулю, если $x^2 = 0$. Уравнение $x^2 = 0$ имеет единственный корень, равный нулю.

Ответ: 0.

$-7x^2 = 0$;

$x^2 = 0$; $x = 0$.

Ответ: 0.

Обобщим полученные результаты:

Неполное квадратное уравнение	Решение уравнения
$ax^2 + bx = 0$, где $a \neq 0$, $b \neq 0$	Уравнение имеет два корня, один из которых равен нулю
$ax^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, $c \neq 0$	Если a и c — числа разных знаков, то уравнение имеет два корня. Если a и c — числа одного знака, то уравнение не имеет корней
$ax^2 = 0$, где $a \neq 0$	Уравнение имеет единственный корень, равный нулю

Определение квадратного уравнения	
1. Какие из данных уравнений являются квадратными: а) $2x^2 - 3x - 2 = 0$; б) $x^2 - x + 2,5 = 0$; в) $5x - 4 = 0$;	а) Уравнение является квадратным, поскольку имеет вид $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$. Его коэффициенты: $a = 2$; $b = -3$; $c = -2$.

г) $4 - 2x^2 + 3x = 0$; д) $x^4 - 21x - 25 = 0$? Определите коэффициенты квадратных уравнений.	б) Уравнение является квадратным с коэффициентами $a = 1$; $b = -1$; $c = 2{,}5$. в) Уравнение $5x - 4 = 0$ — линейное. г) Уравнение квадратное, в нем $a = -2$; $b = 3$; $c = 4$. д) Уравнение не является квадратным, поскольку содержит переменную в четвертой степени.
2. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам: а) $a = 1$; $b = 3$; $c = 7$; б) $a = 5$; $b = -3$; $c = -2$; в) $a = 5$; $b = 0$; $c = 2$; г) $a = 1$; $b = -2$; $c = 0$.	а) $x^2 + 3x + 7 = 0$; б) $5x^2 - 3x - 2 = 0$; в) $5x^2 + 2 = 0$; г) $x^2 - 2x = 0$.
Решение неполных квадратных уравнений	
3. Решите уравнение: а) $5x^2 + 2x = 0$; б) $x^2 - 3 = 0$; в) $-x^2 - 1 = 0$.	а) $5x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(5x + 2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ 5x + 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -0{,}4. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-0{,}4$; 0. б) $x^2 - 3 = 0$; $x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$; $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3}. \end{array}\right.$ *Ответ*: $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$. в) Уравнение не имеет корней, поскольку левая часть уравнения при всех значениях x является отрицательным числом. *Ответ*: нет корней.

4. Найдите корни уравнения $-2x^2 = 0$.	$-2x^2 = 0$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Единственный корень уравнения $x = 0$. *Ответ*: 0.

1. Какие из следующих уравнений являются квадратными:

а) $2 - 3x + x^2 = 0$; б) $-2^2 + 3x = 0$;

в) $-2^2x + 3x^7 = 0$; г) $-5 + 3x + 0x^2 = 0$?

2. Может ли неполное квадратное уравнение иметь:

а) два корня; б) только один корень; в) три корня; г) не иметь корней?

2.4. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

а) $9x^2 + 2x - 4 = 0$; б) $3x^2 + x - 6 = 0$;

в) $2x^2 + 7 = 0$; г) $-8x^2 - x + 7 = 0$;

д) $x^2 + 4x + 3 = 0$; е) $x^3 + 3x^2 - 6 = 0$;

ж) $10x^2 = 0$; з) $5x + 7 = 0$;

и) $6x^2 + 5x = 0$; к) $2x^5 - 3x + 4 = 0$.

Какие из данных уравнений являются неполными квадратными уравнениями?

2.5. Составьте квадратное уравнение по его коэффициентам:

а) $a = 3$; $b = 7$; $c = 2$; б) $a = 1$; $b = -3$; $c = 5$;

в) $a = -9$; $b = 1$; $c = 6$; г) $a = -8$; $b = 3$; $c = 0$;

д) $a = 13$; $b = 0$; $c = -6$; е) $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$.

2.6. Приведите примеры квадратных уравнений, в которых: а) первый коэффициент и свободный член являются противоположными числами; б) второй коэффициент в три раза меньше свободного члена.

2.7. Решите уравнение:

а) $x^2 - 5x = 0$; б) $2x^2 + 7x = 0$; в) $-x^2 + 6x = 0$;

г) $1{,}2x^2 - 0{,}3x = 0$; д) $x^2 - \sqrt{2}x = 0$; е) $x^2 = -2x$;

ж) $5x^2 - x = 3x$; з) $9x = x - x^2$; и) $2x^2 = 3x^2 - x$.

2.8. Решите уравнение:

а) $x^2 - 25 = 0$; б) $9x^2 - 1 = 0$; в) $7x^2 + 5 = 0$;

г) $4x^2 - 49 = 0$; д) $x^2 = 36$; е) $x^2 - 7 = 0$;

ж) $2x^2 = 10$; з) $3x^2 = x^2$; и) $-5x^2 + 15 = 0$.

2.9. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа:

а) –7 и 7; б) –2 и 0; в) $-\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$; г) 0 и 1,5.

2.10. Найдите число, не равное нулю, квадрат которого равен утроенному этому числу.

2.11. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{2}x^2 = 50$; б) $\frac{x^2}{7} - 2x = 0$; в) $\frac{x^2+1}{5} = 2$;

г) $\frac{x}{6} = 7x^2$; д) $\frac{x^2-3x+12}{4} = 3$; е) $\frac{x^2+6x}{2} - 8 = 3x$.

2.12. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и решите уравнение:

а) $(x+2)^2 = 4x+5$; б) $(x+1)^2 = 2x+3$;

в) $(x-5)^2 = 5(9-2x)$; г) $(x-2)^2 - 6x = 3x^2 + 4$;

д) $(3x+1)^2 = 2(3x+1)$; е) $(x+2)^2 = 2(x-1)(x+3)$.

2.13. Найдите положительное число, квадрат которого в девять раз меньше этого числа.

2.14. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

а) $x(5x+3) = x^2 - 4x$; б) $(x+7)(x-2) = 5x$;

в) $(x+4)(x+5) = 20$; г) $x^2 - 3 = (2x-3)(x+1)$;

д) $(x-4)^2 = 17 - 8x$; е) $(x-1)(x+1) = 2x^2 + 5$.

2.15. Решите уравнение:

а) $(x+3)^2 + (x-4)^2 = 25$; б) $(5x-3)^2 - (3x-1)^2 = 8$.

2.16. Найдите значение переменной, при котором:

а) значение двучлена $9x^2 - 1$ равно значению произведения $(2x+1)(3x-1)$;

б) значения выражений $(x+5)(2x-1)$ и $5 - x^2$ противоположны;

в) значение квадрата двучлена $3x + 1$ равно значению суммы $2x + 1$;

г) сумма квадратов двучленов $x + 2$ и $x - 3$ равна 13.

2.17. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{4}(x^2 - 3x) = \frac{1}{3}(x^2 + x)$; б) $\frac{1}{2}(7x - x^2) = \frac{1}{5}(x^2 + 2x)$;

в) $\frac{x^2+10x}{5} - 2x = 45$; г) $\frac{4x^2-1}{3} - \frac{3x^2+8}{5} = 1$;

д) $\dfrac{x^2+6x}{12} - \dfrac{2x+3}{4} = 6;$ е) $\dfrac{(x+4)^2}{2} - (x+2)^2 = 1;$

ж) $\dfrac{(x-2)^2}{2} - \dfrac{(x-3)^2}{3} = 3;$ з) $\dfrac{(x-6)^2}{8} - \dfrac{(x-2)^2}{2} + x = 2{,}5.$

2.18. Найдите корни уравнения:

а) $(4x+7)^2 - 40x = 3x(5x+9) + 49;$

б) $(5+3x)(3x-5) + 16x = (x-5)(5+x).$

2.19. Решите уравнение:

а) $(x^2+3)^2 - (x^2+2)(x^2-8) = 73;$

б) $(x^2+4)^2 - (x^2-5)(x^2+2) = 11.$

2.20. Найдите значение числа a, при котором:

а) корни уравнения $x^2 + (a-7)x + a - 9 = 0$ являются противоположными числами;

б) один из корней уравнения $x^2 + (a-7)x + a - 9 = 0$ равен нулю.

2.21. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

а) $5x^2 - 3x + 2 = 0;$ б) $x^2 + 5x - 1 = 0;$

в) $x^2 - 8 = 0;$ г) $x + 18 = 0;$

д) $2x^2 - 9x = 0;$ е) $x^4 - 7x^3 + 5x^2 = 0.$

Какие из данных уравнений являются неполными квадратными уравнениями?

2.22. Составьте квадратное уравнение, в котором:

а) все коэффициенты равны;

б) первый коэффициент в два раза меньше свободного члена.

2.23. Решите уравнение:

а) $x^2 - 7x = 0;$ б) $3x^2 + 2x = 0;$ в) $x^2 - 36 = 0;$

г) $16x^2 - 25 = 0;$ д) $x^2 = -8x;$ е) $x^2 = 7;$

ж) $2x^2 + x = 5x;$ з) $x^2 + 3 = 0;$ и) $3x = x^2 - 2x.$

2.24. Решите уравнение:

а) $\dfrac{1}{3}x^2 = 27;$ б) $\dfrac{x^2}{5} + 3x = 0;$

в) $\dfrac{x^2-4}{3} = 4;$ г) $\dfrac{x^2+7x+18}{3} = 6.$

2.25. Найдите число, не равное нулю, квадрат которого в четыре раза больше этого числа.

2.26. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

а) $x^2 + 2x = 5x(x - 1)$; б) $(x - 2)(x + 8) = 6x$;

в) $(x + 5)^2 = 10x + 29$; г) $(3x - 1)(3x + 1) = 4x^2 - 2$.

2.27. Решите уравнение:

а) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2 = 5$; б) $(2x + 5)^2 - (4x - 1)^2 = 24$.

2.28. Найдите значение переменной, при котором:

а) значение двучлена $3x^2 - 9$ противоположно значению выражения $(x + 1)^2 - 2x$;

б) значение квадрата двучлена $x + 4$ равно значению произведения $4(2x + 5)$.

2.29. Решите уравнение:

а) $\frac{1}{6}(x^2 - x) = \frac{1}{5}(x^2 + 3x)$; б) $\frac{5x^2 + 9}{6} - \frac{4x^2 - 9}{5} = 3\frac{1}{3}$;

в) $\frac{(x + 1)^2}{4} - \frac{6x - 3}{4} = (x - 1)^2$; г) $\frac{(x - 4)^2}{8} = \frac{(x - 2)^2}{4} + 1$.

2.30. Найдите корни уравнения

$$(5x + 2)(x - 2) - (1 + x)(x - 1) + 3 = 4x.$$

2.31. Найдите значение числа a, при котором корни уравнения $x^2 - (a - 1)x + a - 4 = 0$ являются противоположными числами.

2.32. На координатной прямой отмечены точки $N(x)$ и $K(y)$ (рис. 37). Верно ли, что $|x - y| > 4$?

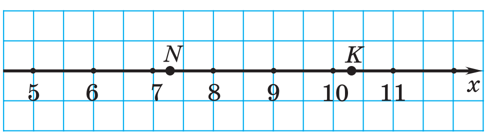


Рис. 37

2.33. Найдите сумму, разность, произведение и частное чисел, записанных в стандартном виде:

а) $6 \cdot 10^9$ и $2 \cdot 10^9$; б) $8 \cdot 10^{-12}$ и $4 \cdot 10^{-12}$.

2.34. Сравните числа a и b, если известно, что $b + 2 = a + \sqrt{5}$.

2.35. Существует ли такое значение аргумента, при котором значения функций $y = x + 1{,}5$ и $y = \frac{5x - 1}{3}$ равны?

2.36. Упростите выражение

$$(7a + b)^2 - (7a - b)^2 - (7ab + 1)^2 + (7ab - 1)^2.$$

2.37. В топливный бак грузового автомобиля МАЗ 4371 с авторефрижератором, арендованного для перевозки замороженной рыбы, залили 300 л дизельного топлива. Проехав 400 км, водитель обнаружил, что в топливном баке осталось 190 л дизельного топлива. Сможет ли он проехать еще 650 км без дозаправки?

§ 8. Формулы корней квадратного уравнения

2.38. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x + 4$; б) $9x^2 - 6x + 1$; в) $25x^2 - 20x + 4$.

2.39. Выделите полный квадрат двучлена в выражении:

а) $x^2 + 4x + 5$; б) $9x^2 - 6x - 1$; в) $25x^2 - 20x - 7$.

2.40. Представьте в виде квадрата число:

а) 36; б) 3; в) d, если $d > 0$.

Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, в котором ни один из коэффициентов не равен нулю, например уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Первый коэффициент данного уравнения равен 1.

Если **первый коэффициент** в квадратном уравнении **равен единице**, то уравнение называется **приведенным.**

1) Выделим в левой части уравнения полный квадрат двучлена: $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$; $(x - 2)^2 - 1 = 0$.

2) Разложим разность квадратов в левой части уравнения на множители и получим: $(x - 2 - 1)(x - 2 + 1) = 0$; $(x - 3)(x - 1) = 0$.

3) Применим свойство о равенстве произведения нулю:

$$(x - 3)(x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 3 = 0, \\ x - 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1; 3.

Любое квадратное уравнение можно преобразовать к равносильному ему приведенному уравнению.

Например, уравнение $2x^2 - x - 2 = 0$ не является приведенным, поскольку первый коэффициент этого уравнения равен 2. Разделим обе части уравнения на 2 и получим уравнение $x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$, которое является приведенным.

Найдем корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Разделим обе части уравнения на a и получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0; \qquad \left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0;$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0; \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} = 0;$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0.$$

В уравнении $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$ обозначим выражение $b^2 - 4ac$ через D. Получим:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2} = 0. \qquad (1)$$

> Выражение $b^2 - 4ac$ называется **дискриминантом*** квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $D > 0$, то $D = \left(\sqrt{D}\right)^2$.

Разложим на множители левую часть уравнения (1):

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\left(\sqrt{D}\right)^2}{4a^2} = 0; \qquad \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0.$$

Применим свойство о равенстве произведения нулю:

$$\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \\ x = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a} \end{array}\right.$$ — формулы

корней квадратного уравнения. В этом случае квадратное уравнение имеет два корня.

Если $D = 0$, то уравнение (1) примет вид $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, т. е. в левой части уравнения — квадрат двучлена. Из равенства квадрата двучлена нулю следует: $x + \frac{b}{2a} = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$, значит, квадратное уравнение имеет единственный корень.

---

* Название происходит от латинского слова *discriminans*, что означает *различающий, разделяющий*.

Если $D < 0$, то выражение $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}$ в левой части уравнения (1) принимает положительные значения при всех значениях переменной и в нуль не обращается, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Таким образом, число корней квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта.

Знак дискриминанта	**Число корней уравнения**
$D > 0$	Два корня $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$
$D = 0$	Один корень $x = -\frac{b}{2a}$
$D < 0$	Нет корней

Чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

① Определить коэффициенты уравнения. ② По формуле $D = b^2 - 4ac$ найти дискриминант квадратного уравнения и определить его знак. ③ Если $D > 0$, то найти два корня по формулам $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$. Если $D = 0$, то найти один корень по формуле $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то записать, что уравнение не имеет корней. ④ Записать ответ.	Решите уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$. ① $a = 2$; $b = -5$; $c = 3$. ② $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1 > 0$. ③ Так как $D > 0$, то $x_1 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{2 \cdot 2} = 1$, $x_2 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 1}{2 \cdot 2} = 1{,}5$. ④ *Ответ*: 1; 1,5.

Пример. Решите уравнение:

а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$; б) $x^2 - 2x + 7 = 0$.

Решение:

а) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

① $a = 4$; $b = 4$; $c = 1$;

② $D = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 =$
$= 16 - 16 = 0$.

③ Так как $D = 0$, то
$x = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$.

④ *Ответ*: –0,5.

б) $x^2 - 2x + 7 = 0$;

① $a = 1$; $b = -2$; $c = 7$;

② $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 =$
$= 4 - 28 = -24 < 0$.

③ Так как $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

④ *Ответ*: нет корней.

Формулы корней квадратного уравнения	
1. Определите, сколько корней имеет уравнение: а) $-x^2 + x - 4 = 0$; б) $1{,}2x^2 - 21x - 25 = 0$; в) $x^2 - 6x + 9 = 0$.	а) Определим коэффициенты уравнения: $a = -1$; $b = 1$; $c = -4$. Определим знак дискриминанта: $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 1 - 16 < 0$. Поскольку $D < 0$, то уравнение не имеет корней. б) $a = 1{,}2$; $b = -21$; $c = -25$; $D = (-21)^2 - 4 \cdot 1{,}2 \cdot (-25) =$ $= 21^2 + 4 \cdot 1{,}2 \cdot 25 > 0$. Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня. в) $a = 1$; $b = -6$; $c = 9$; $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. Так как $D = 0$, то уравнение имеет один корень.
2. Решите уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$.	① Определим коэффициенты уравнения: $a = 2$; $b = -3$; $c = -2$. ② Определим знак дискриминанта: $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) =$ $= 9 + 16 = 25 > 0$. ③ Так как $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Применим формулы корней квадратного уравнения:

	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3-\sqrt{25}}{2\cdot 2} =$ $= \dfrac{3-5}{4} = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \dfrac{3+\sqrt{25}}{2\cdot 2} =$ $= \dfrac{3+5}{4} = 2$. ④ *Ответ*: –0,5; 2.
3. Найдите корни уравнения: а) $3x^2 - 5x + 6 = 0$; б) $-x^2 + x - 0,25 = 0$.	а) ① $a = 3$; $b = -5$; $c = 6$. ② $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 =$ $= 25 - 72 < 0$. ③ $D < 0$, значит, уравнение не имеет корней. ④ *Ответ*: $x \in \varnothing$. б) *Первый способ.* $a = -1$; $b = 1$; $c = -0,25$. $D = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-0,25) = 1 - 1 =$ $= 0$, уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{-2} = \dfrac{1}{2}$. *Второй способ.* Умножим обе части уравнения на –1 и получим $x^2 - x + 0,25 = 0$, или $(x - 0,5)^2 = 0$, откуда $x = 0,5$. *Ответ*: 0,5.
4. Решите уравнение $\dfrac{x^2-2x}{4} - \dfrac{x-9}{8} = 1$.	Умножим обе части уравнения на 8 и получим: $2(x^2 - 2x) - (x - 9) = 8$; $2x^2 - 4x - x + 9 = 8$; $2x^2 - 5x + 1 = 0$; $a = 2$; $b = -5$; $c = 1$; $D = (-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 25 - 8 = 17$; $x_1 = \dfrac{5-\sqrt{17}}{2\cdot 2} = \dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{17}}{2\cdot 2} = \dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$. *Ответ*: $\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$; $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$.

1. Установите последовательность действий вывода формулы корней квадратного уравнения:
а) разложить разность квадратов в левой части уравнения на множители;
б) применить свойство о равенстве произведения нулю;
в) выделить полный квадрат в левой части уравнения;
г) преобразовать уравнение к приведенному.
2. Установите соответствие между знаком дискриминанта:
1) $D > 0$; 2) $D < 0$; 3) $D = 0$ — и числом корней квадратного уравнения:
а) два корня; б) один корень; в) не имеет корней.

2.41. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите число его корней:
а) $4x^2 + 2x - 1 = 0$; б) $8x^2 - 5x + 2 = 0$;
в) $4x^2 - 20x + 25 = 0$; г) $x^2 + 8x + 3 = 0$.

2.42. Приведите по два примера квадратных уравнений: а) не имеющих корней; б) имеющих только один корень; в) имеющих два корня.

2.43. Решите квадратное уравнение, используя алгоритм:
а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $2x^2 - 7x + 3 = 0$;
в) $2x^2 + 3x + 1 = 0$; г) $3x^2 + x - 2 = 0$;
д) $x^2 - 6x + 8 = 0$; е) $8x^2 - 2x + 1 = 0$;
ж) $5x^2 - 4x - 1 = 0$; з) $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

2.44. Решите уравнение:
а) $-5x^2 + 8x - 3 = 0$; б) $-x^2 + 3x + 4 = 0$;
в) $-7x^2 + 6x - 13 = 0$; г) $-x^2 + 10x - 25 = 0$;
д) $7x - 6x^2 - 2 = 0$; е) $3 - x - 4x^2 = 0$;
ж) $x^2 - 4x - 5 = 0$; з) $6x - 9x^2 - 1 = 0$.

2.45. Найдите корни уравнения:
а) $x^2 + 3x - 1 = 0$; б) $5x^2 - 2x - 4 = 0$;
в) $6x - x^2 + 3 = 0$; г) $8 - 5x^2 + x = 0$.

2.46. Решите уравнение:
а) $4x^2 + x = 5$; б) $12x^2 + 1 = 13x$;
в) $x^2 = 8x - 7$; г) $5 - 9x = 2x^2$;
д) $6x^2 - x = x^2 + 4$; е) $9x^2 - 1 = x - 11x^2$;
ж) $7x - 3 = 5x^2 - x$; з) $3 - 8x = 2x - 8x^2$.

2.47. Найдите значения переменной, при которых:

а) значение двучлена $x^2 + x$ равно 20;

б) значения выражений $3x^2 + 2x - 1$ и $5x + 5$ равны.

2.48. Решите уравнение:

а) $x(x-1) = 12$; б) $x(3x+7) = 6$;

в) $x(4x-11) = 3$; г) $3x(3x-4) = 5$.

2.49. Найдите значения переменной, при которых значение выражения:

а) $4x(x-1)$ равно 3; б) $3x(3x-8)$ равно 20.

2.50. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите уравнение:

а) $x(9-x) = 20$; б) $5x(x-1) = 3 - 3x$;

в) $x(5-x) = 2(x-20)$; г) $(x+2)(x+6) = 5$;

д) $(3x+5)(4-x) = (x-1)(1-2x)$;

е) $(4x-1)(x-1) = 2(x+6)(x-2)$;

ж) $(3x+1)(x-4) - (2x-6)(x-2) = 4$;

з) $(2x-3)(x+4) - 10 = (5x-6)(x-3)$.

2.51. Одно число на 4 меньше другого, а их произведение равно 21. Найдите эти числа.

2.52. Примените формулу квадрата суммы (квадрата разности) и решите уравнение:

а) $(x-4)^2 - 2x = 7$; б) $(x+2)^2 = 2x + 3$;

в) $(2x+4)^2 = 11x^2 + 1$; г) $6x^2 + 3 = 2(x-1)^2$;

д) $(x-5)^2 = 4(7-2x)$; е) $(9-4x)^2 = 5(4x+1)$;

ж) $2(x-2)^2 = (x-5)^2$; з) $4(x+1)^2 = 3(x-1)^2$.

2.53. Решите уравнение:

а) $0{,}25x^2 - 1{,}25x + 1 = 0$; б) $0{,}1x^2 + 0{,}6x - 0{,}7 = 0$;

в) $x^2 - \frac{8}{9}x = \frac{1}{9}$; г) $x^2 - \frac{x}{3} = 1\frac{1}{3}$.

2.54. Найдите значения переменной, при которых:

а) значение квадрата двучлена $3x - 1$ равно значению выражения $6x - 2$;

б) значения квадратов двучленов $3x + 3$ и $4x - 4$ равны.

2.55. Решите уравнение:

а) $(x-4)(x+4) = 2x(x+5)$;

б) $(2x-3)(2x+3) = (x+1)(x-2) - 5$;

в) $(x+2)^2 + 9x = 2(x-1)(x+3)$;

г) $(3x-1)^2-(x-8)(x-4)=-27$;
д) $(x+3)^2+(x-4)^2=29$;
е) $(3x-1)^2-(2x+1)^2=15$;
ж) $(3x-1)^2+29=(2x+5)^2$;
з) $(4x-3)^2-(x-5)^2=9(x-1)^2$.

2.56. Найдите значение переменной, при котором сумма квадратов двучленов $x+2$ и $x-3$ равна 17.

2.57. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2+1}{5}=\frac{2x}{3}$; б) $\frac{x^2+6}{5}-\frac{8-x}{10}=1$;

в) $\frac{x^2-2x}{4}-\frac{x-5}{8}=1$; г) $\frac{x^2-4}{8}-\frac{2x+3}{3}=-1$;

д) $\frac{x^2-x}{6}+x-1=\frac{2x+3}{3}$; е) $\frac{4x^2+x}{3}-\frac{5x-1}{6}=\frac{x^2+17}{9}$.

2.58. Найдите корни уравнения:

а) $\frac{(x-1)^2}{5}-\frac{2x-2}{3}=\frac{x+4}{6}$; б) $\frac{(x-3)^2}{8}-\frac{(x-2)^2}{2}=2-2x$;

в) $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{(2x+1)^2}{10}=\frac{1-x}{2}$; г) $\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{3x+1}{6}=\frac{(x+1)^2}{3}$.

2.59. Решите уравнение:

а) $x^2-\sqrt{2}x-1=0$; б) $\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$;

в) $x^2-\left(\sqrt{6}+1\right)x+\sqrt{6}=0$; г) $x^2+\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)x-\sqrt{14}=0$.

2.60. Подберите какие-нибудь три значения c, при которых уравнение имеет корни, и три значения c, при которых уравнение не имеет корней:

а) $x^2+7x+c=0$; б) $2x^2-x-c=0$.

2.61. Найдите все значения c, при которых уравнение $x^2+6x-c=0$ не имеет корней.

2.62. Найдите все значения c, при которых уравнение $3x^2-2x+c=0$ имеет два корня.

2.63. Найдите все значения b, при которых уравнение имеет единственный корень:

а) $bx^2-3bx+1=0$; б) $(b+5)x^2-(b+6)x+3=0$.

2.64. Решите уравнение относительно переменной x:

а) $x^2-3ax+2a^2=0$; б) $3x^2-4ax+a^2=0$;

в) $x^2+(3a-4)x-12a=0$; г) $ax^2-(a+1)x+1=0$.

2.65. Из равенства $a^2+6b^2-5ab-3a+7b+2=0$ выразите a через b.

2.66. Среди квадратных уравнений $x^2+6x+9=0$; $2x^2+7x-4=0$; $16x^2-8x+1=0$; $6x^2-5x+7=0$ выберите:
а) уравнения, имеющие два корня;
б) уравнения, у которых левая часть является квадратом двучлена.

2.67. Решите квадратное уравнение, используя алгоритм:

а) $5x^2-3x-2=0$; б) $2x^2+3x-2=0$;
в) $3x^2-10x+3=0$; г) $2x^2+x-3=0$;
д) $x^2-5x+4=0$; е) $2x^2+7x+3=0$;
ж) $3x^2+2x-5=0$; з) $x^2-6x+9=0$.

2.68. Решите уравнение:

а) $-6x^2+7x-2=0$; б) $-x^2-9x-20=0$;
в) $3-x-4x^2=0$; г) $8x-3x^2-5=0$;
д) $12x-9-4x^2=0$; е) $1-5x-x^2=0$.

2.69. Решите уравнение:

а) $5x^2+2x=3$; б) $5+4x=x^2$;
в) $4x^2+11x=4x+2$; г) $11x^2+9x=2x^2+4$.

2.70. Найдите значения переменной, при которых значение двучлена $6x-6$ равно значению трехчлена $5x^2-4x-1$.

2.71. Решите уравнение:

а) $x(x+7)=18$; б) $x(2x-9)=5$;
в) $x(6x-13)=5$; г) $4x(x-1)=3$.

2.72. Решите уравнение:

а) $x(7-x)=10$; б) $x(x-8)=x-20$;
в) $(x-2)(x+5)=-6$; г) $(3x+1)(x+1)=2(x-5)(x-2)$.

2.73. Одно число на 2 больше другого, а их произведение равно 8. Найдите эти числа.

2.74. Примените формулы сокращенного умножения и решите уравнение:

а) $(x-2)^2=4x-3$; б) $(x+3)^2-5=11x$;
в) $(x-4)^2=8(x-6)$; г) $(x-5)^2=4(x+3)^2$.

2.75. Решите уравнение:

а) $1{,}2x^2-0{,}8x-0{,}4=0$; б) $x^2-\frac{7}{9}x=\frac{2}{9}$.

2.76. Найдите значения переменной, при которых значение квадрата двучлена $2x - 3$ равно значению выражения $3x - 2$.

2.77. Решите уравнение:

а) $x(2x + 10) = (x - 3)(x + 3)$;

б) $(3x - 1)(3x + 1) = (x + 2)(x - 3) + 14$;

в) $(5x - 1)^2 - (x - 6)(x + 8) = 85$;

г) $(2x - 1)^2 + (x + 3)^2 = 13$.

2.78. Решите уравнение:

а) $\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} = \frac{3x - 10}{4}$; б) $\frac{x^2 - 1}{2} - \frac{3x - 1}{4} = 2$;

в) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$; г) $\frac{x^2 + 3x}{8} = \frac{x - 1}{4} + \frac{3 - 2x}{2}$.

2.79. Решите уравнение:

а) $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$; б) $\sqrt{2}x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$;

в) $x^2 - \left(\sqrt{5} + 1\right)x + \sqrt{5} = 0$; г) $x^2 + \left(\sqrt{6} - 2\right)x - 2\sqrt{6} = 0$.

2.80. Найдите все значения c, при которых уравнение $x^2 + 4x - c = 0$:

а) не имеет корней; б) имеет два корня.

2.81. Найдите все значения a, при которых уравнение $(a - 3)x^2 - (a - 1)x + 2 = 0$ имеет единственный корень.

2.82. Сравните значения выражений $0{,}7^{-2} + 0{,}3$ и $\left(3\frac{1}{3}\right)^{-2} + 1\frac{3}{7}$.

2.83. Выполните деление $-0{,}12a^4b^3 : (3ab^3)$.

2.84. Найдите значение выражения $\frac{a^3}{2}$ при $a = 4\sqrt{2}$.

2.85. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2 - 3x < 2x + 9, \\ 4x + 5{,}2 \leqslant 0. \end{cases}$

2.86. Призовой фонд соревнований делится в отношении $6 : 3 : 1$ между спортсменами, занявшими 1-е, 2-е и 3-е места. а) Какой процент призового фонда получит спортсмен, занявший 2-е место? б) На сколько процентов больше получит спортсмен, занявший 1-е место, чем спортсмен, занявший 3-е место?

2.87. Упростите выражение $\sqrt{4 - 4x + x^2} + 1 - x$ при $x > 2$.

2.88. В одной системе координат постройте графики функций $y = 2x - 3$; $y = -x + 4$ и $y = 3$.

2.89. Для организации экскурсии во время каникул среди учащихся 8-х классов был проведен опрос. Из 278 опрошенных 120 человек хотели бы посетить Беловежскую пущу, 186 человек посетили бы Лидский замок. Некоторые участники опроса хотели бы побывать и там, и там. Сколько участников опроса хотели бы посетить и Беловежскую пущу, и Лидский замок?

2.90. Выясните, может ли многочлен $9x^4 - 48x^3 + 64x^2$ принимать отрицательные значения.

§ 9. Теорема Виета

2.91. Решите уравнение: а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; б) $x^2 + 3x - 4 = 0$; в) $x^2 - 8x + 15 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.92. Решите уравнение: а) $x^2 - 2x = 0$; б) $x^2 - 5x = 0$; в) $x^2 + 8x = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

2.93. Решите уравнение: а) $x^2 - 25 = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$; в) $x^2 - 12 = 0$ — и найдите: 1) сумму его корней; 2) произведение его корней.

Решая приведенные квадратные уравнения, можно заметить, что существует зависимость между их коэффициентами и суммой и произведением их корней.

Приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$	Корни квадратного уравнения	Сумма корней $x_1 + x_2$	Произведение корней $x_1 \cdot x_2$	Вывод
$x^2 - 8x + 15 = 0$	$x_1 = 3$, $x_2 = 5$	$8 = -p$	$15 = q$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 \cdot x_2 = q$
$x^2 + 3x - 10 = 0$	$x_1 = -5$, $x_2 = 2$	$-3 = -p$	$-10 = q$	
$x^2 - 5x = 0$	$x_1 = 0$, $x_2 = 5$	$5 = -p$	$0 = q$	
$x^2 - 16 = 0$	$x_1 = 4$, $x_2 = -4$	$0 = -p$	$-16 = q$	

Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна числу, противоположному второму коэффициенту, а произведение — свободному члену. Таким свойством обладает любое приведенное квадратное уравнение, имеющее корни.

Зависимость между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями была установлена французским математиком Франсуа Виетом.

Франсуа Виет
(1540—1603)

Теорема Виета. **Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна его второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену.**

$$x^2 + px + q = 0$$
$$D > 0$$
$$x_1 + x_2 = -p$$
$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Доказательство. Пусть уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Докажем, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

1) По формулам корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2},\ x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}.$$

2) Найдем сумму корней:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} + \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{-p+\sqrt{D}-p-\sqrt{D}}{2} = -p.$$

3) Найдем произведение корней:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{\left(-p+\sqrt{D}\right)\left(-p-\sqrt{D}\right)}{4} = \frac{\left(p-\sqrt{D}\right)\left(p+\sqrt{D}\right)}{4} =$$
$$= \frac{p^2-D}{4} = \frac{p^2-\left(p^2-4q\right)}{4} = \frac{p^2-p^2+4q}{4} = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета. **Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то они являются корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.**

Доказательство. 1) Подставим в уравнение $x^2 + px + q = 0$ выражения для его коэффициентов:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

2) Выполним преобразования в левой части уравнения:

$$x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = 0;\ (x - x_1)x - x_2(x - x_1) = 0;$$
$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

3) Корни уравнения $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ найдем, используя свойство о равенстве произведения нулю: $x - x_1 = 0$ или $x - x_2 = 0$, откуда $x = x_1$ или $x = x_2$.

Применение теоремы Виета и ей обратной

Пример 1. Найдите сумму, произведение и сумму квадратов корней квадратного уравнения $x^2 - 7x + 11 = 0$, не находя корней уравнения.

Решение. $D = 49 - 44 = 5 > 0$, значит, уравнение имеет корни. По теореме Виета их сумма $x_1 + x_2 = 7$, а произведение $x_1 \cdot x_2 = 11$.

Выразим сумму квадратов корней через их сумму и произведение:

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= 7^2 - 2 \cdot 11 = 49 - 22 = 27.$$

Ответ: 7; 11; 27.

Пример 2. Решите уравнение $x^2 - 4x - 5 = 0$, не применяя формулы корней квадратного уравнения.

Решение. Данное уравнение имеет корни ($D > 0$). По теореме Виета сумма корней этого уравнения равна 4, а их произведение равно –5. Определим делители числа –5, сумма которых равняется 4. Это числа 5 и –1, их произведение равно –5, а сумма 4. Значит, по теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями данного уравнения.

Ответ: 5 и –1.

Теорема Виета	
1. Найдите, если это возможно, сумму и произведение корней уравнения: а) $x^2 - 23x + 6 = 0$; б) $x^2 - 3x + 6 = 0$; в) $5x^2 + 3x - 1 = 0$.	а) $D = 23^2 - 24 > 0$, значит, уравнение имеет два корня. По теореме Виета их сумма равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, т. е. 23, а произведение — свободному члену, т. е. 6. *Ответ*: $x_1 + x_2 = 23$, $x_1 \cdot x_2 = 6$.

	б) $D = 9 - 24 < 0$, значит, уравнение не имеет корней. *Ответ*: нет корней. в) $D = 3^2 + 20 > 0$, значит, уравнение имеет два корня. Разделим обе части уравнения на 5 и получим приведенное квадратное уравнение $x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5} = 0$. По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{5}$. *Ответ*: $x_1 + x_2 = -0,6$, $x_1 \cdot x_2 = -0,2$.
Теорема, обратная теореме Виета	
2. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны 2 и 9.	По теореме, обратной теореме Виета, так как сумма чисел 2 и 9 равна 11, а произведение — 18, то квадратное уравнение, корнями которого являются числа 2 и 9, имеет вид $x^2 - 11x + 18 = 0$.
Применение теоремы Виета и ей обратной	
3. Определите знаки корней квадратного уравнения $x^2 - 25x + 7 = 0$, не решая его.	Так как $D > 0$, то по теореме Виета уравнение имеет корни, произведение которых равно 7 — положительному числу, значит, корни уравнения одного знака. Так как сумма корней равна 25 — положительному числу, то оба корня этого уравнения являются положительными числами.

4. Определите знаки корней квадратного уравнения $$x^2 + 8x - 34 = 0,$$ не решая его.	Так как $D > 0$, то уравнение имеет корни, произведение которых равно –34 — отрицательному числу, значит, корнями уравнения являются числа разных знаков. Так как сумма корней равна –8 — отрицательному числу, то отрицательный корень уравнения имеет больший модуль.
5. Составьте уравнение, каждый корень которого в два раза больше соответствующего корня уравнения $$x^2 - 12x + 7 = 0.$$	По теореме Виета сумма корней данного уравнения равна 12, а произведение равно 7, тогда оба корня положительны. Сумма корней нового уравнения будет равна $2 \cdot 12 = 24$, а произведение — $4 \cdot 7 = 28$. По теореме, обратной теореме Виета, новое уравнение имеет вид $x^2 - 24x + 28 = 0$.
6. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения: а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + 7x + 10 = 0$.	а) Уравнение имеет корни x_1 и x_2 ($D > 0$), тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 3$ и $x_1 + x_2 = 4$. Подберем целые числа x_1 и x_2 так, чтобы их произведение было равно 3, а сумма — 4. Это числа 1 и 3. По теореме, обратной теореме Виета, они являются корнями данного уравнения. *Ответ*: 1; 3. б) $D > 0$, по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = 10$ и $x_1 + x_2 = -7$. Если x_1 и x_2 — целые числа, произведение которых равно 10, то возможными значениями x_1 и x_2 являются пары чисел: 1 и 10; –1 и –10; 2 и 5; –2 и –5.

	Условию $x_1 + x_2 = -7$ удовлетворяет пара чисел -2 и -5. Эти числа по теореме, обратной теореме Виета, являются корнями данного уравнения. *Ответ*: -2; -5.

1. Верно ли, что если квадратное уравнение приведенное, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену?

2. Верно ли, что если дискриминант квадратного уравнения больше нуля, то сумма его корней равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение — свободному члену?

2.94. Используя теорему, обратную теореме Виета, проверьте, являются ли корнями уравнения:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$ числа 1 и 4;
б) $x^2 + 6x + 8 = 0$ числа 2 и 4;
в) $x^2 - x - 12 = 0$ числа 4 и -3;
г) $x^2 + 9x - 10 = 0$ числа 1 и -10.

2.95. С помощью теоремы Виета найдите сумму и произведение корней уравнения, если это возможно:

а) $x^2 - 9x + 2 = 0$; б) $x^2 + 7x - 1 = 0$;
в) $x^2 + x + 3 = 0$; г) $x^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$;
д) $x^2 - 13x + 31 = 0$; е) $4x^2 - 3x - 5 = 0$;
ж) $-x^2 - 10x = 0$; з) $3x^2 - 8 = 0$.

2.96. Убедитесь, что уравнение имеет корни и, не решая уравнение, определите знаки его корней:

а) $x^2 - 10x + 7 = 0$; б) $x^2 - 12x - 5 = 0$;
в) $x^2 + 9x + 2 = 0$; г) $x^2 + 7x - 4 = 0$;
д) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; е) $2x^2 - x - 1 = 0$;
ж) $4x^2 + 13x + 1 = 0$; з) $-5x^2 - 9x + 2 = 0$.

2.97. Найдите коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, если известно, что его корнями являются числа:

а) 2 и 3; б) -4 и 5; в) -1 и -6.

2.98. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 1 и -12; б) 6 и $\frac{1}{6}$; в) -3 и $-0,8$.

2.99. Приведите два примера квадратного уравнения, один из корней которого равен 1, а другой является:
а) простым числом; б) целым числом, меньшим 0,3.

2.100. Составьте квадратное уравнение, зная, что сумма его корней, являющихся взаимно обратными числами, равна 7.

2.101. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:
а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 + 7x + 6 = 0$;
в) $x^2 - 7x + 12 = 0$; г) $x^2 - 5x - 6 = 0$;
д) $x^2 - 9x + 20 = 0$; е) $x^2 + 11x + 24 = 0$;
ж) $x^2 - x - 6 = 0$; з) $x^2 + 8x - 20 = 0$;
и) $x^2 - 13x + 30 = 0$; к) $x^2 + 17x + 30 = 0$;
л) $x^2 - x - 30 = 0$; м) $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2.102. Приведите пример квадратного уравнения, один из корней которого:
а) в 3 раза больше другого; б) на 7 меньше другого.

2.103. Найдите значение выражения $x_1 + x_2 - 3x_1x_2$, зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения:
а) $x^2 + 10x - 1 = 0$; б) $8x^2 - x - 5 = 0$;
в) $-2x^2 + 3x + 7 = 0$; г) $x^2 - \sqrt{5}x - 6\sqrt{5} = 0$.

2.104. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + 7x - 12 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:
а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; в) $x_1^2 + x_2^2$.

2.105. Составьте квадратное уравнение, каждый корень которого:
а) в 3 раза меньше соответствующего корня уравнения $x^2 - 39x + 18 = 0$;
б) в 6 раз больше соответствующего корня уравнения $3x^2 - 8x + 1 = 0$.

2.106. Один из корней уравнения:
а) $x^2 + px - 15 = 0$ равен 3; б) $5x^2 - px + 4 = 0$ равен 1.
Найдите другой корень и число p.

2.107. Один из корней уравнения:
а) $x^2 - 9x + q = 0$ равен 8; б) $6x^2 + 5x - q = 0$ равен -1.
Найдите другой корень и число q.

2.108. Найдите корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x - q = 0$ и число q, если $x_1 - x_2 = 11$.

2.109. Корни уравнения $x^2 - 20x + q = 0$ относятся как $3 : 7$. Найдите корни уравнения и свободный член q.

2.110. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$; б) $5-\sqrt{3}$ и $5+\sqrt{3}$;

в) $3+2\sqrt{5}$ и $3-2\sqrt{5}$; г) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{2}-\sqrt{7}$.

2.111. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2-(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$;

б) $x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$;

в) $x^2+(\sqrt{2}-5)x-5\sqrt{2}=0$.

2.112. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 2x - q = 0$ удовлетворяют равенству $3x_1 - 5x_2 = 22$. Найдите корни уравнения и число q.

2.113. Найдите корни уравнения $x^2 - 12x - q = 0$ и число q, если известно, что:

а) один из корней в 5 раз больше другого;

б) один из корней в 3 раза меньше другого;

в) один из корней составляет 20 % другого.

2.114. Уравнение $x^2 - 10x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1^2 и x_2^2.

2.115. Составьте квадратное уравнение, зная, что произведение его корней равно 8, а сумма квадратов его корней равна 20.

2.116. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2-(\sqrt{6}+11)x-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=0$. Найдите значение выражения $x_1 + x_1x_2 + x_2$.

2.117. Восьмиклассник, решая уравнение:

а) $x^2 + 6x - 7 = 0$ получил корни 1 и –7;

б) $x^2 - 2x - 15 = 0$ получил корни 3 и –5;

в) $x^2 + x - 42 = 0$ получил корни 6 и –7.

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, проверьте правильность полученных результатов.

2.118. Выберите уравнения, которые имеют корни, и с помощью теоремы Виета найдите сумму и произведение корней уравнения:

а) $x^2 - 5x + 1 = 0$; б) $x^2 + 8x - 3 = 0$;
в) $x^2 - 9x - \sqrt{2} = 0$; г) $x^2 + 2x + 10 = 0$;
д) $x^2 + 6x + 7 = 0$; е) $2x^2 + 7x - 13 = 0$;
ж) $x^2 - 8x = 0$; з) $-4x^2 + 17 = 0$.

2.119. Убедитесь, что уравнение имеет корни, и, не решая уравнение, определите знаки его корней:

а) $x^2 - 13x + 5 = 0$; б) $x^2 - 8x - 1 = 0$;
в) $3x^2 + 10x + 1 = 0$; г) $2x^2 + x - 5 = 0$.

2.120. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) 5 и 8; б) –2 и 0,5; в) –3 и $-\frac{1}{3}$.

2.121. Решите уравнение, не используя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2 - 5x + 4 = 0$; б) $x^2 + 8x + 7 = 0$;
в) $x^2 - 8x + 15 = 0$; г) $x^2 - 2x - 3 = 0$;
д) $x^2 - 11x + 18 = 0$; е) $x^2 + 14x + 13 = 0$;
ж) $x^2 - 4x - 21 = 0$; з) $x^2 - x - 56 = 0$.

2.122. Найдите значение выражения $x_1x_2 - (x_1 + x_2)$, зная, что x_1 и x_2 — корни уравнения:

а) $x^2 + 7x - 9 = 0$; б) $2x^2 - x - 13 = 0$.

2.123. Уравнение $x^2 - 5x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $x_1^2 + x_2^2$.

2.124. Составьте квадратное уравнение, каждый корень которого в 5 раз больше соответствующего корня уравнения $x^2 - 5x + 1 = 0$.

2.125. а) Один из корней уравнения $x^2 + px - 28 = 0$ равен 14. Найдите другой корень и коэффициент p.
б) Один из корней уравнения $4x^2 - x + c = 0$ равен 1. Найдите другой корень и свободный член c.

2.126. Найдите корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + 3x - q = 0$ и число q, если $x_1 - x_2 = -9$.

2.127. Составьте квадратное уравнение, корни которого равны:

а) $1 + \sqrt{3}$ и $1 - \sqrt{3}$; б) $7 - \sqrt{2}$ и $7 + \sqrt{2}$.

2.128. Корни уравнения $x^2 - 14x + q = 0$ относятся как $1 : 6$. Найдите корни уравнения и коэффициент q.

2.129. Составьте квадратное уравнение, зная, что произведение его корней равно –10, а сумма квадратов его корней равна 29.

2.130. Вычислите:

а) $(5^{-6} \cdot 5^{-4})^2 : 5^{-22}$; б) $\left(\frac{7}{9}\right)^0 \cdot 0{,}5^{-1}$; в) $\frac{2^{-7} \cdot 16^4}{32^2}$.

2.131. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{2x+3y}{4} = \frac{3x+4y}{7}, \\ \frac{5y-6x}{10} = 6 - 2x. \end{cases}$

2.132. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{50} - \sqrt{18}\right) \cdot \sqrt{2}$.

2.133. Разложите на множители:

а) $7a + 7b - c(a + b)$; б) $(4 - a)^2 - 25a^2$;
в) $(2x - 1)^2 - (4x + 1)^2$; г) $9n^2 - 6n + 1 - (n + 5)^2$.

2.134. Для функции $f(x) = 2x - 3$:

а) вычислите $f(-3) - f(6)$;

б) найдите значения аргумента, при которых выполняются условия $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) = 15$.

2.135. Предприниматель хочет разместить некоторую сумму денег в одном из банков. Партнер предпринимателя, разместивший в банке A 620 р., через год получил 663,4 р. Его школьный приятель положил в банк B 750 р. и через год получил 795 р. В каком банке выгоднее разместить деньги?

2.136. Докажите, что разность квадратов двух последовательных натуральных чисел является нечетным числом.

§ 10. Квадратный трехчлен. Разложение квадратного трехчлена на множители

2.137. Разложите на множители двучлен:

а) $2x^3 - 4x^2$; б) $9x^2 - 6x$; в) $25x^4 - 20x$.

2.138. Разложите на множители многочлен:

а) $x^2 + 4x - 2xy - 8y$; б) $16x^2 + 40x + 25$;

в) $36t^2 + 36t + 9$; г) $x^2 - x + 0{,}25$.

2.139. Определите степень многочлена и разложите его на множители:

а) $-36t^2+36t-9$; б) $0{,}01x^2-x+25$;
в) $0{,}04p^2-4p+100$; г) x^4-2x^2+1.

Многочлен ax^2+bx+c, где $a \neq 0$, называется **квадратным трехчленом.**

Квадратные трехчлены
x^2+6x-4
$-8x^2+x+6$
$0{,}5x^2-x-1$

Например, $2x^2-3x-2$ — квадратный трехчлен, числа $a=2$, $b=-3$, $c=-2$ — его коэффициенты.

Значение переменной, при котором значение квадратного трехчлена равно нулю, называется **корнем квадратного трехчлена**.

Чтобы найти корни квадратного трехчлена, нужно решить квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$.

Например, корнями квадратного трехчлена $2x^2-3x-2$ являются корни квадратного уравнения $2x^2-3x-2=0$. Найдем их: $D=25$, $x_1=\frac{3+5}{4}=2$, $x_2=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$. Числа $x_1=2$; $x_2=-\frac{1}{2}$ являются корнями квадратного трехчлена $2x^2-3x-2$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2+bx+c=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$

Разложим на множители квадратный трехчлен ax^2+bx+c.

1) Вынесем за скобки первый коэффициент трехчлена:

$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

2) Выделим полный квадрат:

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}\right).$$

3) Если $D>0$, то получим: $a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=$ $=a\left(x-\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

Таким образом, $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Чтобы разложить квадратный трехчлен на множители, нужно:

① Найти корни квадратного трехчлена x_1 и x_2. ② По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ записать произведение трех множителей: первого коэффициента a и разностей $x - x_1$ и $x - x_2$.	Разложите на множители квадратный трехчлен $2x^2 - 3x - 2$. ① $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$. ② $2x^2 - 3x - 2 = 2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Множитель 2 можно внести во вторую скобку: $2(x - 2)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 2)(2x + 1)$. Таким образом, $2x^2 - 3x - 2 = (x - 2)(2x + 1)$.

Например, квадратный трехчлен $7x^2 + 3x - 4$ имеет корни $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{4}{7}$, поэтому $7x^2 + 3x - 4 = 7(x + 1)\left(x - \frac{4}{7}\right) = (x + 1)(7x - 4)$.

Если дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ равен нулю, то квадратный трехчлен можно представить в виде $a(x - x_1)^2$, где x_1 — корень квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 12x + 36$. $D = 144 - 4 \cdot 1 \cdot 36 = 0$, $x_1 = -\frac{-12}{2 \cdot 1} = 6$, тогда $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$. В этом случае квадратный трехчлен можно записать в виде квадрата двучлена.

Разложим на множители квадратный трехчлен $0{,}25x^2 + 2x + 4$.

$D = 4 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot 4 = 0$,

$x_1 = -\frac{2}{2 \cdot 0{,}25} = -4$, тогда

$0{,}25x^2 + 2x + 4 = 0{,}25(x + 4)^2$,

или $0{,}25x^2 + 2x + 4 = (0{,}5x + 2)^2$.

$x^2 - 10x + 25$; $D = 0$;
$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

$9x^2 + 6x + 1$; $D = 0$;
$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

$-4x^2 + 4x - 1$; $D = 0$;
$-4x^2 + 4x - 1 = -(2x - 1)^2$

Дискриминант квадратного трехчлена $-x^2 + 8x - 16$ равен нулю, тогда $-x^2 + 8x - 16 = -(x^2 - 8x + 16) = -(x - 4)^2$.

Если дискриминант квадратного трехчлена отрицательный, то квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.

Например, дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 5$ отрицательный ($D = 1 - 4 \cdot 5 < 0$), значит, этот квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.

<table>
<tr><th colspan="2">Корни квадратного трехчлена</th></tr>
<tr><td>1. Найдите корни квадратного трехчлена:
а) $3x^2 - x - 4$;
б) $3p^2 - 4p + 10$.</td><td>а) Решим квадратное уравнение $3x^2 - x - 4 = 0$.
$D = b^2 - 4ac = 49 > 0$,
$x_1 = \frac{1+7}{6} = \frac{4}{3}$, $x_2 = \frac{1-7}{6} = -1$.
Числа -1; $\frac{4}{3}$ являются корнями квадратного трехчлена $3x^2 - x - 4$.
Ответ: -1; $1\frac{1}{3}$.
б) $D = 16 - 120 < 0$, значит, квадратный трехчлен не имеет корней.
Ответ: нет корней.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Разложение квадратного трехчлена на множители</th></tr>
<tr><td>2. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:
а) $4x^2 - 8x + 3$;
б) $-x^2 - 6x - 8$;
в) $81t^2 - 36t + 4$;
г) $8t^2 - 6t + 3$.</td><td>а) Найдем корни квадратного трехчлена:
$4x^2 - 8x + 3 = 0$,
$D = 64 - 48 = 16$,
$x_1 = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2}$,
$x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$.
По формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ запишем произведение трех множителей:</td></tr>
</table>

	$4x^2 - 8x + 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right).$ Внесем множители в скобки: $4x^2 - 8x + 3 =$ $= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$ $= 2 \cdot 2 \cdot \left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) =$ $= (2x - 3)(2x - 1).$ б) Найдем корни квадратного трехчлена: $-x^2 - 6x - 8 = 0,$ $x^2 + 6x + 8 = 0,\ D = 36 - 32 = 4,$ $x_1 = -4,\ x_2 = -2.$ Тогда $-x^2 - 6x - 8 = -(x + 4)(x + 2).$ в) $D = 1296 - 1296 = 0$. Квадратный трехчлен $81t^2 - 36t + 4$ можно записать в виде квадрата двучлена: $81t^2 - 36t + 4 = (9t - 2)^2.$ г) Поскольку $D = 36 - 96 < 0$, квадратный трехчлен нельзя разложить на множители.

? Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля, то квадратный трехчлен: а) нельзя разложить на множители; б) имеет два различных корня; в) представляет собой квадрат двучлена.
Выберите правильный ответ.

2.140. Найдите корни квадратного трехчлена:

а) $2x^2 + 5x + 2$; б) $-x^2 - x + 6$; в) $x^2 - 2x - 8$;
г) $-x^2 - 4x - 3$; д) $x^2 - 5x + 9$; е) $8x^2 - 10x - 3$.

2.141. Можно ли представить в виде произведения двух двучленов квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 9x + 2$; б) $7x^2 - 5x + 12$; в) $x^2 - x + 5$?

Приведите пример квадратного трехчлена, который нельзя разложить на множители.

2.142. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:

а) $x^2 - x - 30$; б) $x^2 - 6x + 8$; в) $2x^2 + 7x - 4$;
г) $3x^2 - 5x - 2$; д) $2x^2 + x - 3$; е) $-x^2 - x + 42$;
ж) $5x^2 - 8x - 13$; з) $-3x^2 - 7x + 6$; и) $x^2 - 6x + 9$;
к) $x^2 - x - 6$; л) $4x^2 + 4x + 1$; м) $-8x^2 + 9x - 1$.

2.143. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

а) $6x^2 - x - 1$; б) $12x^2 - 5x - 2$;
в) $-8x^2 + 2x + 1$; г) $-18x^2 + 21x + 4$.

2.144. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 2x - 1$; б) $x^2 + 4x - 2$; в) $2x^2 + 5x - 1$.

2.145. Представьте в виде произведения:

а) $9x + 14 + x^2$; б) $3 - 4x^2 - 11x$;
в) $7x - 6 + 3x^2$; г) $10x - 25x^2 - 1$.

2.146. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 3x + 2$; б) $5x^2 - 15x + 10$;
в) $2x^2 - 6x + 4$; г) $-0{,}5x^2 + 1{,}5x - 1$;
д) $\frac{1}{4}x^2 - x - 15$; е) $-\frac{2}{3}x^2 - 3x + 6$.

2.147. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 - 7x^2 - 18x$; б) $2x^3 + 5x^2 - 3x$;
в) $-x^3 - x^2 + 12x$; г) $-16x^3 + 8x^2 - x$;
д) $x^4 - 6x^3 + 8x^2$; е) $7x^4 + 8x^3 + x^2$;
ж) $-12x^4 + 7x^3 - x^2$; з) $9x^4 - 30x^3 + 25x^2$.

2.148. Найдите значение a, при котором разложение на множители квадратного трехчлена:

а) $2x^2 - 5x + a$ содержит множитель $(x - 2)$;
б) $3x^2 + 7x - a$ содержит множитель $(3x - 2)$.

2.149. Разложите на множители:

а) $x^2(x + 1) + 4x(x + 1) - 12(x + 1)$;
б) $4x^2(x^2 - 25) - 5x(x^2 - 25) + (x^2 - 25)$.

2.150. Представьте в виде произведения:

а) $8x^2 - 6xy + y^2$; б) $6x^2 - 5xy - 6y^2$.

2.151. Выберите квадратные трехчлены, имеющие корни, и найдите корни этих квадратных трехчленов:

а) $3x^2 - 10x + 3$; б) $x^2 - 8x + 12$; в) $-x^2 + 3x - 8$.

2.152. Разложите на множители, если это возможно, квадратный трехчлен:

а) $x^2 + x - 20$; б) $x^2 - 7x + 10$; в) $2x^2 + 3x - 5$;
г) $3x^2 - 2x - 1$; д) $3x^2 + x - 2$; е) $-x^2 - 2x + 35$;
ж) $-4x^2 + 5x - 1$; з) $x^2 + 8x + 16$; и) $3x^2 + 11x - 14$;
к) $4x^2 - 12x + 9$; л) $x^2 + 2x + 9$; м) $-2x^2 - 5x - 11$.

2.153. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

а) $6x^2 - x - 12$; б) $-12x^2 + x + 1$.

2.154. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 2x - 1$; б) $x^2 - 4x - 2$; в) $3x^2 - 2x - 4$.

2.155. Представьте в виде произведения:

а) $14x + 40 + x^2$; б) $2 + 3x^2 - 7x$;
в) $3 - 11x + 6x^2$; г) $12x + 36x^2 + 1$.

2.156. Разложите на множители многочлен:

а) $x^3 + x^2 - 12x$; б) $-3x^3 + 14x^2 - 8x$;
в) $2x^4 - 7x^3 - 4x^2$; г) $-36x^4 + 12x^3 - x^2$.

2.157. Разложите на множители

$$x^2(x^2 + 3) - 3x(x^2 + 3) - 10(x^2 + 3).$$

2.158. Представьте в виде произведения $3x^2 - 14xy + 8y^2$.

2.159. Найдите значение выражения:

а) $\frac{(3\sqrt{5})^2}{15}$; б) $\frac{6}{(2\sqrt{3})^2}$.

2.160. Решите систему уравнений $\begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7. \end{cases}$

2.161. Решите неравенство $(x - 6)^2 + 4x \geqslant (x - 4)^2$.

2.162. Представьте в виде степени с основанием 10 выражение $10\,000^3 : 0,01^{-5}$.

2.163. Постройте график функции $y = -x + 4$ и найдите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нуль функции; г) значения аргумента, при которых значения функции положительны.

2.164. Крупнейшему в Беларуси предприятию, занимающемуся реставрационными работами на памятниках истории и культуры, «Белреставрация» поступил срочный заказ на реставрацию исторического здания в г. Минске. На работу было направлено 2 бригады. Одна бригада может выполнить этот заказ за 12 дней, а другая — за 8 дней. Удастся ли предприятию выполнить заказ за 5 дней без привлечения дополнительных работников, если бригады будут работать вместе?

§ 11. Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений

2.165. Бобруйская швейная фабрика «Славянка» разработала новую модель школьного костюма. На его пошив идет на 0,3 м больше материала, чем на пошив костюма прежней модели. Известно, что для 8 костюмов новой модели потребовалось столько же материала, сколько для 9 костюмов прежней модели. Сколько метров материала требуется для пошива одного костюма новой модели?

2.166. Сколько процентов составляют трехкомнатные квартиры от числа всех квартир в доме, если количество трехкомнатных квартир меньше всех остальных на 20 %?

Рассмотрим задачу. Спортивный зал размерами 16×20 м разделен на три части: два прямоугольника и квадрат (рис. 38). Какова сторона квадрата, если его площадь на 18 м^2 меньше площади прямоугольника, имеющего с ним общую сторону?

Решение. Обозначим длину стороны квадрата через x м, тогда его площадь равна x^2 м^2. Длины сторон прямоугольника равны x м и $(20 - x)$ м, а его площадь — $x(20 - x)$ м^2, тогда $x^2 = x(20 - x) - 18$. Выполним преобразования и получим: $2x^2 - 20x + 18 = 0$; $x^2 - 10x + 9 = 0$. Квадратное уравнение $x^2 - 10x + 9 = 0$ имеет корни 9 и 1. Значит, сторона квадрата может быть равна либо 1 м, либо 9 м.

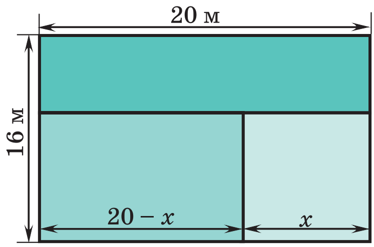


Рис. 38

Ответ: 1 м или 9 м.

Для решения задач с помощью квадратных уравнений можно выполнить следующую последовательность действий:

① Выяснить, о каких величинах в задаче идет речь.

② Выяснить известные и неизвестные значения величин и зависимости между ними.

③ Одну из неизвестных величин обозначить через x, а остальные величины выразить через x и зависимости между величинами.

④ Составить уравнение в соответствии с зависимостями между величинами.

⑤ Решить уравнение и записать ответ в соответствии со смыслом задачи.

Решение текстовых задач с помощью квадратных уравнений

1. В турнире по мини-футболу было разыграно 42 очка. Сколько команд участвовало в турнире, если каждая команда сыграла с каждой по одному разу? За победу дается 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.	① В задаче идет речь о количестве разыгранных очков в турнире, количестве команд-участников турнира и количестве очков, присуждаемых за победу и ничью. ② Известные величины: количество разыгранных очков и очков, разыгранных в одной игре. Неизвестные величины: количество команд. Известные зависимости: между количеством команд и количеством разыгранных очков. ③ Обозначим количество команд-участников турнира через x. Так как каждая команда провела с каждой по одной игре, то каждая команда сыграла $x-1$ игру, всего сыграно игр $\frac{x(x-1)}{2}$.

	В каждой игре разыгрывается два очка, значит, всего в турнире разыгрывается $\frac{x(x-1)}{2} \cdot 2 = x(x-1)$ очка. ④ По условию разыграно 42 очка. Получим уравнение $x(x-1) = 42$. Выполним необходимые преобразования и получим квадратное уравнение $x^2 - x - 42 = 0$. Оно имеет корни 7 и -6. По условию задачи подойдет число 7. *Ответ*: 7 команд.
2. Фермер получил кредит в банке под определенный годовой процент. Через два года нужно было вернуть сумму, равную 1,44 суммы кредита. Каков годовой процент по кредиту в этом банке?	① В задаче речь идет о сумме кредита, годовом проценте, о сумме, которую нужно вернуть через два года. ② Неизвестен годовой процент, сумма кредита. Известна зависимость между первоначальной суммой и суммой, которую нужно вернуть через два года. ③ Обозначим через x годовой процент. Через год нужно вернуть первоначальную сумму и проценты, т. е. $A + A \cdot \frac{x}{100} = A\left(1 + \frac{x}{100}\right)$, где A — первоначальная сумма кредита. Через два года сумма, которую нужно вернуть, составит: $A\left(1 + \frac{x}{100}\right) + A\left(1 + \frac{x}{100}\right)\frac{x}{100} =$ $= A\left(1 + \frac{x}{100}\right)^2$.

④ По условию задачи известно, что через два года нужно было вернуть сумму, равную 1,44 суммы кредита, значит, $A\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}44A$. Так как $A \neq 0$, то разделим обе части уравнения на A, получим $\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 = 1{,}44$.

⑤ Решим полученное квадратное уравнение:

$$\left[\begin{array}{l} 1+\frac{x}{100} = 1{,}2; \\ 1+\frac{x}{100} = -1{,}2. \end{array}\right.$$

По условию задачи подходит только 1,2, значит, $1+\frac{x}{100} = 1{,}2$; $\frac{x}{100} = 0{,}2$; $x = 20$ %.

Ответ: 20 %.

? При решении квадратного уравнения, составленного по условию задачи, получили два корня. Верно ли, что: а) в задаче будет два ответа; б) один из корней не подойдет по условию задачи; в) задача может не иметь решений?

2.167. Найдите два положительных числа, одно из которых в пять раз больше другого, если их произведение равно 45.

2.168. Найдите два положительных числа, одно из которых на 2 больше другого, если их произведение равно 99.

2.169. Найдите положительное число, которое на:

а) 56 меньше, чем его квадрат;

б) 15 меньше, чем его удвоенный квадрат.

2.170. Найдите два числа, если:

а) их сумма равна 21, а их произведение равно 98;

б) их разность равна 4, а их произведение равно 96;

в) их разность равна 3, а сумма их квадратов равна 65.

2.171. Хватит ли 80 м сетки, чтобы огородить в зоопарке прямоугольный вольер для животных, одна сторона которого на 5 м меньше другой, если его площадь равна 300 $м^2$?

2.172. Спортивная площадка имеет форму прямоугольника площадью 2400 м^2, одна сторона которого на 20 м больше другой. По периметру площадка украшена разноцветными флажками, расположенными на расстоянии 2 м друг от друга. Найдите количество флажков.

2.173. Для размещения торгового оборудования фирме необходимо арендовать помещение площадью 165 м^2, длина которого на 4 м больше ширины. В крупном торговом центре сдается в аренду помещение размерами 10×20 м. Разместится ли торговое оборудование фирмы в этом помещении?

2.174. Площадь дачного участка прямоугольной формы равна 800 м^2, а его периметр — 120 м. Вдоль одной из меньших сторон участка высажены кусты смородины на расстоянии 1 м друг от друга (рис. 39). На какой урожай можно рассчитывать владельцам участка, если урожайность одного куста смородины составляет в среднем 5 кг?

Рис. 39

2.175. Компания по производству мебели отмечает свое двадцатилетие. Благодаря эффективной политике управления компания открыла сеть мебельных магазинов в разных городах. В связи с юбилеем директор каждого магазина отправляет поздравительное электронное письмо коллективам всех остальных магазинов сети. Всего было отправлено 650 электронных поздравлений. Сколько магазинов в торговой сети?

2.176. По окончании соревнований по интеллектуальному многоборью все команды обменялись друг с другом памятными подарками. Сколько команд приняло участие в многоборье, если количество подарков оказалось равным 182?

2.177. В период международных учений волонтеров Красного Креста было организовано несколько полевых лагерей, каждый из которых имел линию связи со всеми остальными. Сколько полевых лагерей было организовано, если количество линий связи равно 15?

2.178. Вокруг клумбы имеется дорожка шириной 1 м (рис. 40). Найдите радиус клумбы, если площадь дорожки на 25 % больше площади клумбы.

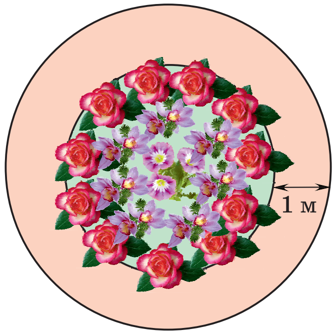


Рис. 40

2.179. Площади двух торговых залов магазина равны. Первый торговый зал имеет форму прямоугольника, ширина которого на 11 м меньше длины. Длина второго зала равна 10 м, а ширина на 2 м больше ширины первого зала. Найдите общую площадь обоих торговых залов магазина.

2.180. Облицовочная плитка имеет форму квадрата. Когда от плитки отрезали полосу шириной 5 см, ее площадь стала равна 150 см^2. Найдите первоначальные размеры плитки.

2.181. Отделка фасада здания ламинированным стеклом, которое изготавливают на предприятии «Гомельстекло», позволяет обеспечить максимальную освещенность внутренних помещений и снизить расходы на освещение. Для остекления здания на предприятии были изготовлены прямоугольные листы стекла площадью 14 м^2. Для остекления некоторых элементов фасада здания от прямоугольного листа стекла отрезали прямоугольную полосу шириной 0,5 м, чтобы получить квадратный лист. Найдите сторону квадрата и процент полученных отходов.

2.182. В рамках проекта по благоустройству территории одного из районов г. Минска студенты архитектурного факультета БНТУ спроектировали детскую площадку, имеющую форму прямоугольника со сторонами 10 м и 14 м. По периметру площадки запланирована дорожка постоянной ширины, площадь которой равна 256 м^2. Найдите ширину дорожки.

2.183. Рекламный щит имеет форму прямоугольника со сторонами 2 м и 1,5 м. В центре рекламного щита выделен такой прямоугольник, что расстояние между сторонами двух прямоугольников везде одинаково. Площадь полученной по краям щита рамки на 0,52 м^2 меньше площади меньшего прямоугольника. Найдите ширину рамки и ее площадь.

2.184. Положив в банк 500 р., вкладчик через два года получил 540,8 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

2.185. Население города за 2 года увеличилось с 20 000 до 22 050 человек. Найдите средний ежегодный процент роста населения этого города.

2.186. Произведение двух последовательных натуральных чисел больше их суммы на 239. Найдите эти числа.

2.187. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 509.

2.188. Произведение двух последовательных четных натуральных чисел на 41 больше их среднего арифметического. Найдите эти числа.

2.189. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел больше суммы их квадратов на 144. Найдите эти числа.

2.190. Владелец оптового склада покупает товар по 8 р. и продает его магазину, повысив цену на некоторое число процентов. Магазин, купив товар на оптовом складе, реализует его, повысив цену на число процентов, в 1,5 раза большее, чем оптовый склад. В результате товар в магазине стоит 12 р. 48 к. На сколько процентов увеличивает цену оптовый склад?

2.191. На предприятии зарплату повышали дважды. Первый раз на x %, а второй раз — на $2x$ %. После двух повышений зарплата увеличилась в $1\frac{7}{8}$ раза. Найдите, на сколько процентов повысили зарплату первый раз.

2.192. Решите задачу Бхаскары (знаменитый индийский математик XII в.).

Обезьянок резвых стая,
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На полянке забавлялась.
А двенадцать по лианам
Стали прыгать, повисая.
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?

2.193. Найдите два положительных числа, одно из которых в три раза меньше другого, если их произведение равно 27.

2.194. Найдите два положительных числа, одно из которых на 1 меньше другого, если их произведение равно 42.

2.195. Найдите положительное число, которое на:
а) 72 меньше, чем его квадрат;
б) 14 меньше, чем его утроенный квадрат.

2.196. Найдите два числа, если:
а) их сумма равна 9, а их произведение равно 14;
б) их разность равна 1, а их произведение равно 56;
в) их сумма равна 15, а сумма их квадратов равна 113.

2.197. Фермеру необходимо огородить сеткой прямоугольный участок земли, одна сторона которого на 10 м меньше другой, а площадь равна 600 м^2. В продаже имеются мотки сетки длиной 30 м, 35 м и 55 м. Выберите оптимальный вариант покупки, если 1 м сетки стоит одинаково для каждого из трех мотков.

2.198. Для изготовления рекламного буклета требуется лист бумаги площадью 300 см^2, одна сторона которого на 5 см больше другой. Можно ли разместить рекламный буклет на листе бумаги формата А5, имеющего размеры 148×210 мм?

2.199. Прямоугольный участок земли площадью 4 а огорожен изгородью длиной 100 м. Найдите размеры участка. Какие размеры имеет участок такой же площади, длина изгороди которого составляет 82 м? На каком из этих участков можно разместить строение размерами 12×15 м?

2.200. Во время проведения тренинга по развитию коммуникативных навыков каждый участник тренинга должен был сказать комплимент каждому из остальных участников. Всего было сказано 110 комплиментов. Сколько человек приняло участие в тренинге?

2.201. В турнире по шашкам каждый участник сыграл с каждым по одной партии. Всего было сыграно 120 партий. Сколько человек приняло участие в турнире?

2.202. Спортивный клуб арендует тренажерный зал и зал для занятий акробатикой. Тренажерный зал имеет форму прямоугольника, длина которого на 6 м больше его ширины. Длина зала для занятий акробатикой на 9 м, а ширина — на 12 м больше длины и ширины тренажерного зала соответственно, а его площадь в три раза больше площади тренажерного зала. Найдите размеры и площадь тренажерного зала.

2.203. При раскрое ткани для штор от прямоугольного полотна длиной 40 дм отрезали квадрат, сторона которого равна ширине полотна. Площадь оставшегося прямоугольника равна 375 дм^2. Найдите ширину полотна, если известно, что она не превышает 20 дм.

2.204. На одном и том же расстоянии от стен комнаты прямоугольной формы площадью 24 м^2 находится ковер размерами 3×5 м. В комнате вдоль одной из стен планируют поставить шкаф размерами $60 \times 120 \times 200$ см так, чтобы не задеть ковер. Удастся ли это сделать?

2.205. Положив в банк 400 р., вкладчик через два года получил 441 р. Какой процент начислял банк ежегодно?

2.206. Найдите два последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 545.

2.207. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 434.

2.208. Некоторый товар стоил 250 р. После того как цена была снижена дважды, он стал стоить 120 р. При этом процент снижения во второй раз был в два раза меньше, чем в первый. На сколько процентов снизилась цена товара в первый раз?

2.209. Вычислите:

а) $-5\frac{1}{3} - (-4{,}5)$; б) $-1{,}5 + 5{,}19$;

в) $(-0{,}3)^2$; г) $10{,}01 : (-1{,}3)$.

2.210. Представьте в стандартном виде число $a = 0{,}00089 \cdot 10^{11}$ и найдите порядок числа:

а) $a \cdot 10^{15}$; б) $0{,}000001 \cdot a$; в) $0{,}01 \cdot a^2$.

2.211. По графику функции, изображенному на рисунке 41, найдите:

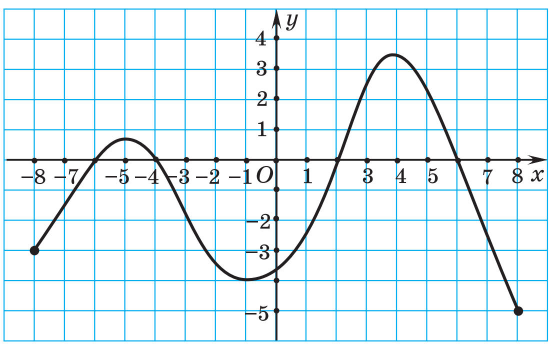


Рис. 41

а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нули функции; г) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения.

2.212. Вычислите: $(2\sqrt{3}-1)(3\sqrt{3}+5)-7\sqrt{3}$.

2.213. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x-2<1{,}5x+1, \\ 4-2x\geqslant x-2. \end{cases}$

2.214. Преобразуйте в многочлен выражение

$$(-2a-3b)^2-(9b-7a)b.$$

2.215. Длина шага первоклассника равна 0,4 м. Он проходит путь от дома до школы, делая 750 шагов. Длина шага восьмиклассника на 50 % больше длины шага первоклассника. Сколько шагов сделает восьмиклассник, пройдя тот же путь?

§ 12. Решение целых рациональных уравнений, сводящихся к квадратным уравнениям

2.216. Решите систему уравнений $\begin{cases} y=2x-1, \\ 4x+2y=14. \end{cases}$

2.217. Решите уравнение:

а) $x^2-5x=0$; б) $x^3-4x^2=0$.

Большое число математических задач сводится к решению различных уравнений. Некоторые из уравнений вы уже научились решать по правилам, формулам, алгоритмам. Среди методов решения уравнений одним из основных является метод сведения одного уравнения к другому, способ решения которого известен. Таким методом является **метод замены переменной.**

Решим, например, уравнение $2x^4+15x^2-8=0$. Представим x^4 в виде $(x^2)^2$ и обозначим x^2 через t (введем новую переменную). Тогда данное уравнение примет вид $2t^2+15t-8=0$.

Решим полученное квадратное уравнение: $D=289$, $\left[\begin{array}{l} t=-8, \\ t=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$

Подставим найденные значения t в равенство $t=x^2$ и получим $\left[\begin{array}{l} x^2=-8, \\ x^2=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Первое уравнение совокупности не имеет корней, корни второго уравнения $\left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x=-\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уравнение $2x^4 + 15x^2 - 8 = 0$, которое мы решили, относится к биквадратным.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называется биквадратным.

Биквадратные уравнения относятся к целым рациональным уравнениям.

Целыми рациональными уравнениями называются уравнения, у которых в левой и правой частях — только многочлены.

Например, уравнения $x^3 - 4x = (x - 6)^2 + 7$; $5x^4 = 144$ являются целыми рациональными.

Решение уравнений методом замены переменной	
1. Решите уравнение $(x - 2)^2 - 5(x - 2) + 6 = 0$.	*Первый способ.* Выполним тождественные преобразования: $x^2 - 4x + 4 - 5x + 10 + 6 = 0$; $x^2 - 9x + 20 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение: $D = 81 - 80 = 1$, $x_1 = 5$, $x_2 = 4$. *Ответ*: 4; 5. *Второй способ* (методом замены переменной). Обозначим двучлен $x - 2$ через t, т. е. $t = x - 2$. Выполним подстановку в уравнение и получим $t^2 - 5t + 6 = 0$. Решим квадратное уравнение: $D = 25 - 24 = 1$; $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = 3. \end{array}\right.$ Подставим значения t и найдем x: $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 2, \\ x - 2 = 3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 5. \end{array}\right.$ *Ответ*: 4; 5.

2. Решите уравнение: а) $2(x^2 - x)^2 - 5(x^2 - x) - 3 = 0$; б) $4x^2 - 7\lvert x\rvert + 3 = 0$.	а) Для решения этого уравнения рациональнее применить метод замены переменной. Пусть $x^2 - x = t$, тогда уравнение примет вид $2t^2 - 5t - 3 = 0$. Решим квадратное уравнение: $D = 25 + 24 = 49$; $\left[\begin{array}{l} t = \frac{5+7}{4} = 3, \\ t = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Подставим значения t: $\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 3, \\ x^2 - x = -\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 3 = 0, \\ x^2 - x + \frac{1}{2} = 0. \end{array}\right.$ Решим первое уравнение совокупности: $D = 1 + 12 = 13$; $x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Второе уравнение совокупности корней не имеет, так как $D = 1 - 2 = -1 < 0$. *Ответ*: $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. б) Поскольку $x^2 = \lvert x\rvert^2$, то обозначим $\lvert x\rvert = t$ и выполним замену переменной: $4t^2 - 7t + 3 = 0$. Найдем корни полученного уравнения: $D = 49 - 48 = 1$; $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \frac{3}{4}. \end{array}\right.$

	Подставим значения t и получим $\left[\begin{array}{l}\lvert x\rvert = 1,\\ \lvert x\rvert = \frac{3}{4}.\end{array}\right.$ Откуда $x = 1; -1; 0{,}75; -0{,}75.$ *Ответ*: $-1; -0{,}75; 0{,}75; 1.$

1. Какие из следующих уравнений являются биквадратными:

а) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$; б) $x^4 - 3x - 1 = 0$;

в) $x^4 + 8 = 0$; г) $x^4 + 7x^2 = 0$?

2. Какие из следующих уравнений являются целыми рациональными:

а) $2x + 9 = 0$; б) $x^2 - 9x + 7 = 0$;

в) $\frac{2x-4}{x^2} = 8$; г) $\frac{4x^2-6x}{2x^2+1} = 0$?

2.218. Выполните замену переменной и решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; б) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;

в) $x^4 - 15x^2 - 16 = 0$; г) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;

д) $x^4 - 14x^2 + 45 = 0$; е) $9x^4 - 13x^2 + 4 = 0$;

ж) $2x^4 - 19x^2 + 9 = 0$; з) $8x^4 - 19x^2 + 6 = 0$.

2.219. Решите уравнение двумя способами:

а) $(x - 2)^2 - 4(x - 2) - 5 = 0$;

б) $(x^2 + 3)^2 - 11(x^2 + 3) + 28 = 0$.

2.220. Решите уравнение:

а) $(x - 5)^4 - 3(x - 5)^2 - 4 = 0$;

б) $(3x + 2)^4 - 10(3x + 2)^2 + 9 = 0$;

в) $(8x - 1)^4 + 5(8x - 1)^2 + 4 = 0$;

г) $(x - 7)^4 + 2(x - 7)^2 - 8 = 0$.

2.221. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0$;

б) $(x^2 + 6x)^2 + 5(x^2 + 6x) - 24 = 0$;

в) $(x^2 - x - 1)^2 - 10(x^2 - x - 1) + 9 = 0$;

г) $(x^2 - 4x + 3)^2 + 6(x^2 - 4x + 3) - 7 = 0$.

2.222. Решите уравнение:

а) $(x^2-4x)^2+8x^2-32x+15=0$;

б) $(x^2+3x)^2-14x^2-42x+40=0$;

в) $(x^2-7x+11)^2-3x^2+21x-37=0$;

г) $(x^2-2x-14)^2+4x^2-8x-61=0$.

2.223. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(2x^2-5x)(2x^2-5x-4)=21$;

б) $(x^2-3x-5)(x^2-3x+1)=-5$;

в) $(x^2+4x-1)(x^2+4x+3)=12$;

г) $(x^2-5x+2)(x^2-5x-1)-28=0$.

2.224. Решите уравнение:

а) $(x-2)(x+1)(x+2)(x+5)+20=0$;

б) $x(x+3)(x+5)(x+8)=100$.

2.225. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2+2x)^2-4(x+1)^2+7=0$;

б) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

2.226. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $x^2-3|x|+2=0$;
б) $6x^2-5|x|-1=0$;

в) $(x-3)^2+7|x-3|-8=0$;
г) $(3x+1)^2-2|3x+1|-15=0$.

2.227. Решите уравнение:

а) $(3x^2+7)(x^2-3)-(x^2-5)(x^2+5)=x^4+3x^2$;

б) $(2x^2-9)(x^2+2)-(x^2-3)(x^2+3)=5x^2-18$.

2.228. Решите уравнение:

а) $x^4-4x^2(x-6)-5(x-6)^2=0$;

б) $(x+2)^4-3x^2(x+2)^2-4x^4=0$.

2.229. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$;
б) $9x^4-10x^2+1=0$;

в) $7x^4-6x^2-1=0$;
г) $3x^4-13x^2+4=0$.

2.230. Решите уравнение двумя способами:

а) $(x+1)^2-2(x+1)+1=0$;

б) $(x^2-4)^2-2(x^2-4)-15=0$.

2.231. Решите уравнение:

а) $(x+3)^4-8(x+3)^2-9=0$;

б) $(2x-3)^4-5(2x-3)^2+4=0$.

2.232. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0$;

б) $(x^2-6x)^2+(x^2-6x)-56=0$.

2.233. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2+x)(x^2+x-7)=60$;

б) $(x^2-3x+1)(x^2-3x+3)=3$;

в) $(x^2+2x+1)(x^2+2x+4)=10$;

г) $(x^2+3x+1)(x^2+3x+3)+1=0$.

2.234. Решите уравнение:

а) $x(x+1)(x+2)(x+3)=24$;

б) $(x-3)(x-1)(x-5)(x-7)=-16$.

2.235. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$; б) $(x^2-4x)^2-(x-2)^2=16$.

2.236. Выполните замену переменной и решите уравнение:

а) $x^2-10|x|+9=0$; б) $2x^2+3|x|-2=0$.

2.237. Из данных равенств выберите все верные равенства:

а) $1{,}064-0{,}43=0{,}634$; б) $5{,}6:(0{,}76-0{,}48)=20$;

в) $5{,}45:0{,}5=10{,}9$; г) $3{,}6:(2{,}87-2{,}75)=3$;

д) $2{,}418+60{,}64\cdot10^{-1}=8{,}482$.

2.238. Известно, что первая космическая скорость равна $7{,}9\cdot10^3\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, вторая — $1{,}12\cdot10^4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а третья — $1{,}667\cdot10^4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Выразите эти скорости в километрах в секунду и запишите полученные результаты в стандартном виде.

2.239. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $(x-4)^2+3$; б) $(3x-1)^2-8$;

в) $2(x-6)^2+1$; г) $9(x+5)^2-6$.

2.240. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) x^2+4x+5; б) $(2x-4):(x^2-9)$;

в) $(2x-4):(x^2+6)$; г) $(3x+8):(x^2-x)$.

2.241. Для функции $f(x) = -\frac{x}{3} + 5$ найдите:
а) нуль функции; б) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения.

2.242. Упростите выражение:
а) $(\sqrt{10} + 8)(\sqrt{10} - 8)$; б) $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^2$.

2.243. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{3x-7}{4} - \frac{2y-3}{5} = 1, \\ \frac{2x-y}{2} - 1 = y - 2. \end{cases}$

2.244. Гарантированный месячный заработок рекламного агента на испытательном сроке — 300 р. Каждый найденный агентом клиент приносит ему дополнительный доход, составляющий 5 % от суммы договора. Фирма, в которой работает агент, заключает договоры только на суммы не менее 250 р. Выясните, на какую сумму в месяц необходимо заключить договоров агенту, чтобы его заработок составлял не менее 800 р. Сколько клиентов, заключивших договор на 250 р., нужно привлечь агенту, чтобы заработать в месяц 850 р.?

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать определение квадратного уравнения и уметь различать его виды;
- уметь решать неполные квадратные уравнения;
- уметь определять количество корней квадратного уравнения по его дискриминанту;
- знать и уметь применять формулы корней квадратного уравнения для решения квадратных уравнений;
- знать теоремы Виета (прямую и обратную);
- уметь применять теорему Виета и обратную ей при решении задач;
- знать и уметь применять формулу разложения квадратного трехчлена на множители;
- уметь решать целые рациональные уравнения, используя метод замены переменной;
- уметь решать задачи с помощью квадратных уравнений.

Я проверяю свои знания

1. Пользуясь определением квадратного уравнения, среди данных уравнений выберите квадратные и определите их коэффициенты:

а) $7x^2-6x+3=0$; б) $2x^2-x-5=0$;
в) $3x^2-8=0$; г) $x^2-6x=0$;
д) $7x+9=0$; е) $x^3+2x^2+15=0$.

Есть ли среди выбранных квадратных уравнений неполные квадратные?

2. Найдите дискриминант квадратного уравнения и определите число его корней:

а) $5x^2+3x-1=0$; б) $x^2-2x+6=0$;
в) $9x^2-6x+1=0$; г) $x^2-x-3=0$.

3. Решите уравнение:

а) $x^2-4=0$; б) $x^2-2=0$; в) $10x^2+5x=0$;
г) $3x^2+1=0$; д) $x^2-10x+25=0$; е) $x^2+x-6=0$;
ж) $5x^2+8x-4=0$.

4. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2+9x+20$; б) $-x^2+4x-3$;
в) $2x^2-3x-2$; г) $25x^2+10x+1$.

5. Найдите значение переменной, при котором разность значений выражений $\frac{x^2+1}{5}$ и $\frac{x}{2}$ равна нулю.

6. Спортивный клуб арендует два зала. Один из них имеет форму квадрата, а другой — прямоугольника, длина которого на 5 м, а ширина на 3 м больше стороны квадрата. Известно, что площадь одного зала в 1,6 раза меньше площади другого. Найдите, сколько метров потолочного плинтуса необходимо приобрести для ремонта двух залов, зная, что к расчетному количеству нужно добавить 10 % плинтуса, идущего в отходы.

7. Найдите значение выражения $x_1x_2-2(x_1+x_2)$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $4x^2-6x-1=0$.

8. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $x^4-11x^2+10=0$;
б) $(x^2-5x)^2-5(x^2-5x)-6=0$;
в) $(2x^2+x-1)(2x^2+x-4)+2=0$;
г) $(x^2-2x)^2-7(x-1)^2-1=0$.

9. Банки A и B ежегодно увеличивают на одно и то же число процентов сумму, имеющуюся на вкладе к моменту начисления процентов. В каком банке выгоднее разместить вклад, если в банке A за два года вклад возрастет с 2000 р. до 2420 р., а в банке B за два года вклад в 5000 р. вырастет до 5832 р.?

10. Разложите многочлен на множители $6x^2 + xy - 12y^2$.

Практическая математика

1. В летнем спортивном лагере площадка для оздоровительных занятий имеет форму многоугольника, вдоль каждой стороны которого размещен спортивный тренажер. Число всех дорожек — диагоналей площадки — равно 54. Найдите, сколько тренажеров расположено на площадке.

2. Новоселы планируют $\frac{1}{3}$ площади пола в коридоре выложить плиткой. Для этого потребуется 450 маленьких квадратных плиток или 300 больших. Известно, что сторона большой плитки на 5 см больше стороны маленькой. На остальной части пола в коридоре планируется положить паркет. Сколько квадратных метров паркета потребуется?

3. Предприниматель получил кредит под определенный процент годовых с возможностью досрочного погашения кредита. Через год в счет погашения кредита предприниматель вернул $\frac{1}{5}$ суммы, которую он должен был банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита предприниматель внес сумму, на 15,2 % превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в этом банке?

4. В зале для проведения совещаний два одинаковых стола прямоугольной формы составили так, как показано на рисунке 42. Периметр образовавшейся фигуры равен 32 м, а площадь каждого прямоугольника равна 14 м^2. Стулья для участников совещаний расположены вдоль сторон прямоугольников, выделенных на рисунке

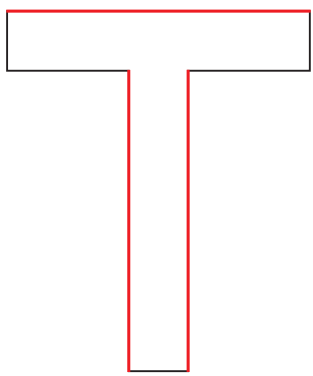


Рис. 42

красным цветом. Сколько человек может одновременно разместиться за столами для совещаний, если на каждого сидящего требуется не менее 0,7 м?

5. В ботаническом саду оформляют клумбы для выставки роз. Ландшафтный дизайнер решил разместить кусты красных и розовых роз так, как показано на рисунке 43.

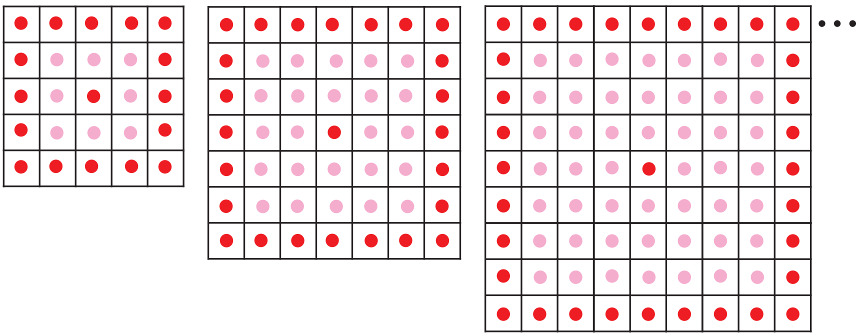


Рис. 43

а) Заполните таблицу.

Количество кустов роз в одном ряду	Количество кустов красных роз в квадрате	Количество кустов розовых роз в квадрате
5		
7		
9		
...	...	...
$2n + 1$		

б) Определите, может ли число кустов красных роз оказаться равным числу кустов розовых роз на одной клумбе.

в) Найдите, на сколько число кустов красных роз отличается от числа кустов розовых роз на пятой клумбе; на k-й клумбе.

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание

а) Решите квадратное уравнение $2x^2 - 5x + 3 = 0$. Поменяйте местами коэффициенты a и c и решите полученное квадратное уравнение. Как связаны между собой корни этих уравнений?

б) Докажите, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$), то $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — корни квадратного уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$).

в) Выясните, какая взаимосвязь существует между корнями квадратных уравнений $ax^2 + bx + c = 0$ и $x^2 + bx + ac = 0$. Сформулируйте обобщенный результат и составьте задания на применение этого результата.

г) Предложите друзьям решить эти задания.

Готовимся к олимпиадам

1. Решите уравнение $x^2 + 5y^2 - 4xy - 6y + 9 = 0$.

2. Пусть $f(x)$ — квадратный трехчлен. Известно, что уравнение $f(x) = 2 - 2x$ имеет единственное решение и уравнение $f(x) = x - 1$ также имеет единственное решение. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ не имеет решений.

3. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + b + c > 0$. Найдите знак коэффициента c.

Интересно знать. Первая международная математическая олимпиада для школьников прошла в 1959 г. в Румынии. В ней приняли участие представители семи стран.

Белорусские школьники принимают участие в этой олимпиаде с 1997 г. За это время ими было завоевано 15 золотых медалей, 64 серебряные медали и 82 бронзовые медали.

Глава 3

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§ 13. Квадратичная функция и ее свойства

3.1. Представьте выражение в виде многочлена:

а) $5(x-1)(x-4)$;

б) $-2(x-4)(x+2)$;

в) $(x-1{,}5)^2-2{,}5$;

г) $2(x-1)^2+3$.

3.2. Найдите координаты точек пересечения графика функции с осью абсцисс и осью ординат:

а) $y = 4x - 5$;

б) $y = -x + 5$.

3.3. Найдите:

а) наибольшее значение выражения $-2(x-1)^2+3$;

б) наименьшее значение выражения $(x-1{,}5)^2-2{,}5$.

Функции позволяют описывать процессы из различных областей науки и жизни. Например, траектория тела, брошенного под углом к горизонту, описывается функцией, график которой (рис. 44) называется **параболой** (от греч. παραβολή — *пара* — рядом и *балло* — бросаю).

Траекторией мяча, брошенного баскетболистом (рис. 45), или копья, которое метнул легкоатлет, если не учитывать сопротивление воздуха, является парабола.

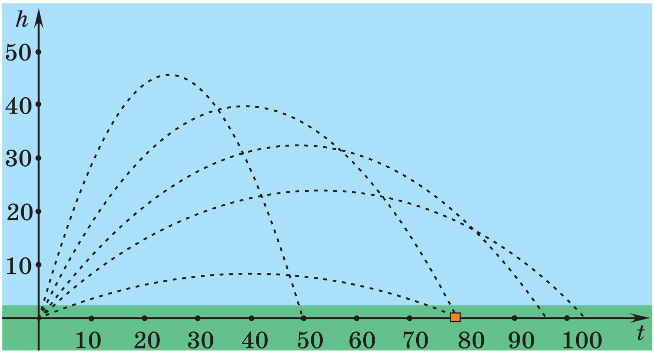


Рис. 44

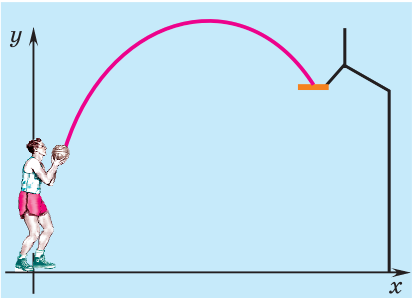


Рис. 45

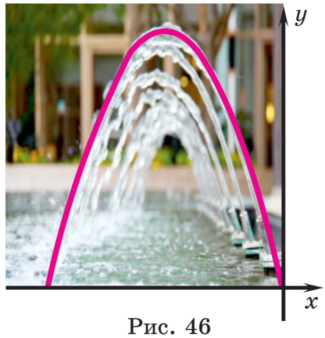


Рис. 46

По параболе движутся капли воды в струе фонтана (рис. 46).

Все рассмотренные процессы описываются функциями вида $y = ax^2 + bx + c$, графиками которых являются параболы.

Определение Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называется **квадратичной**.

Например, функции $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$, $f(x) = -x^2 + 6x$, $f(x) = x^2$ — квадратичные.

Рассмотрим свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ и способ построения ее графика — параболы.

Как известно, квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, можно разложить на множители, т. е. представить в виде $a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — его корни.

Также квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ можно записать в виде $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, квадратичную функцию можно записать:
1) в виде многочлена

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0;$$

2) в виде разложения на множители (если корни соответствующего квадратного трехчлена существуют)

$$y = a(x - x_1)(x - x_2);$$

3) в виде выделенного полного квадрата

$$y = a(x - m)^2 + n.$$

Формы записи квадратичной функции

$y = ax^2 + bx + c$

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$

$y = a(x - m)^2 + n$

Например, квадратичную функцию $y = 4x^2 - 24x + 20$ можно записать в следующих формах:

- $y = 4x^2 - 24x + 20$ — в виде многочлена;
- $y = 4(x - 1)(x - 5)$ — в виде разложения на множители;
- $y = 4(x - 3)^2 - 16$ — в виде выделенного полного квадрата.

Для исследования свойств квадратичной функции и построения ее графика будем использовать различные формы ее записи.

Свойства квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$

1. Область определения функции. Так как $ax^2 + bx + c$ — многочлен, то областью определения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются все действительные числа, т. е. $D = \boldsymbol{R}$. Графически это означает, что для любого значения абсциссы найдется соответствующая точка на параболе.

2. Множество значений функции. Наибольшее и наименьшее значения функции. Для нахождения множества значений квадратичной функции воспользуемся ее формой записи в виде выделенного полного квадрата: $y = a(x - m)^2 + n$, где $m = -\frac{b}{2a}$, $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Если $a > 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наименьшее значение**, равное n. Значит, на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наименьшее значение. Эта точка называется **вершиной параболы**, ее координаты $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 47).

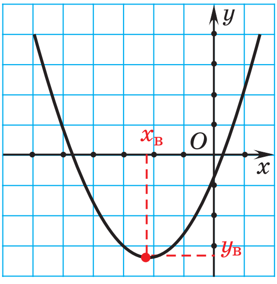


Рис. 47

Следовательно, если $a > 0$, то $E = [y_в;\ +\infty)$.

Если $a < 0$, то при $x = m$ выражение $a(x - m)^2 + n$ принимает **наиболь-**

шее значение, равное n. В этом случае на изображении параболы существует точка, в которой функция принимает наибольшее значение, она называется вершиной параболы, ее координаты $x_в = -\frac{b}{2a}$; $y_в = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (рис. 48).

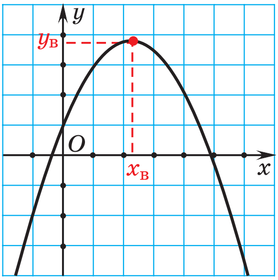


Рис. 48

Следовательно, если $a < 0$, то $E = (-\infty; y_в]$.

3. Нули функции. Значения аргумента, при которых значения функции $y = ax^2 + bx + c$ равны нулю, являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня x_1 и x_2, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках с координатами $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$ (рис. 49).

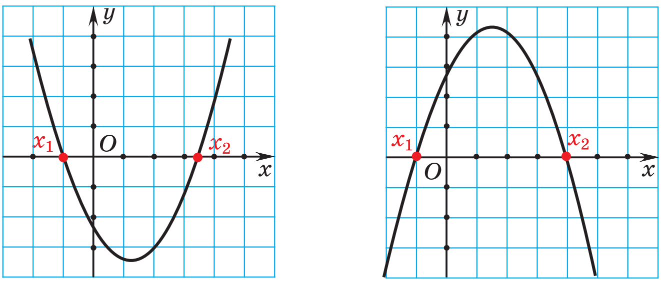


Рис. 49

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет единственный корень x_1, то парабола имеет с осью абсцисс единственную общую точку с координатами $(x_1; 0)$ (рис. 50).

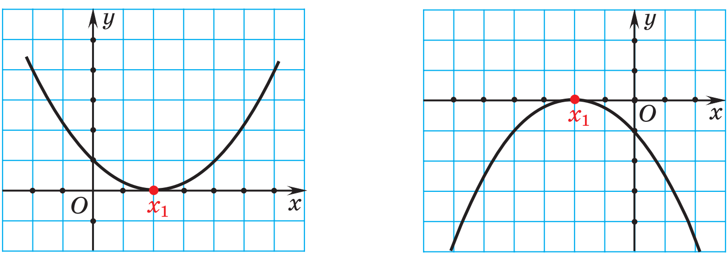


Рис. 50

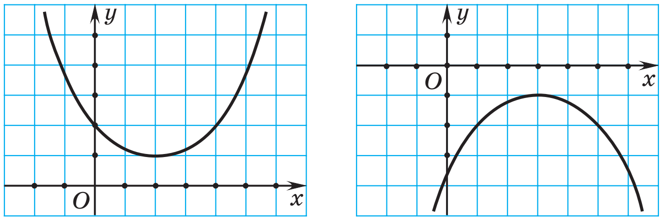


Рис. 51

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то парабола не имеет с осью абсцисс общих точек (рис. 51).

4. Ось симметрии параболы. Осью симметрии параболы является прямая, проходящая через вершину параболы параллельно оси ординат. Уравнение оси симметрии $x = -\frac{b}{2a}$.

Симметричные части графика называются **ветвями параболы**. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз (рис. 52).

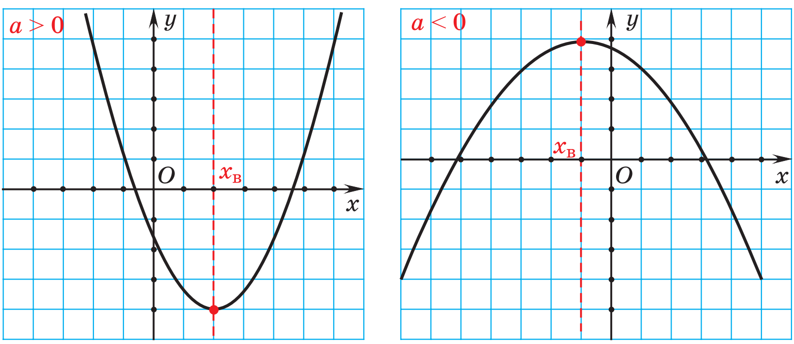
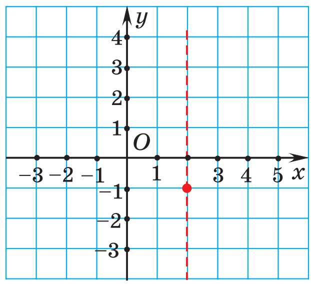
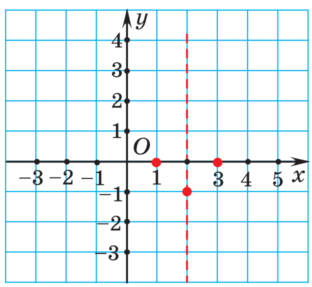


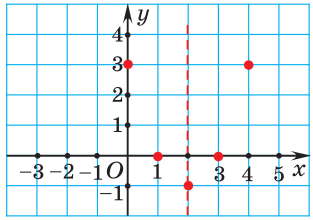
Рис. 52

Чтобы построить график квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, нужно:

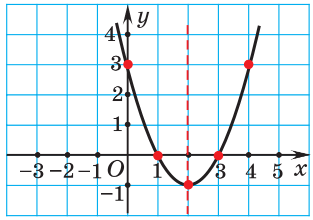
① Определить направление ветвей параболы. (Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.)	Постройте график функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$. ① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх.

② Определить координаты вершины параболы: $$x_в = -\frac{b}{2a},\ y_в = f(x_в).$$ Построить вершину параболы и ось симметрии параболы $x = -\frac{b}{2a}$.	② $x_в = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$; $y_в = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Вершиной параболы является точка с координатами (2; −1). Осью симметрии параболы является прямая $x = 2$. Построим их на координатной плоскости. 
③ Найти нули функции, если они есть, и отметить их на оси абсцисс.	③ $x^2 - 4x + 3 = 0$; $D = 16 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4$, $x_1 = \frac{4+2}{2} = 3,\ \ x_2 = \frac{4-2}{2} = 1.$ Отметим нули функции на оси абсцисс. 
④ Определить точку пересечения параболы с осью ординат. (Если $x = 0$, то значение функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ равно c.) Построить точку с координатами (0; c) и точку, ей симметричную относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$.	④ Если $x = 0$, то $y = 3$. Парабола пересекает ось ординат в точке с координатами (0; 3). Точка с
⑤ Соединив отмеченные точки плавной линией, построить график функции.	

координатами (4; 3) симметрична ей относительно оси симметрии параболы. Отметим эти точки.



⑤

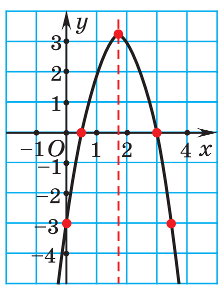


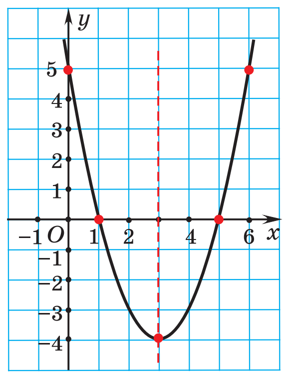
Координаты вершины параболы

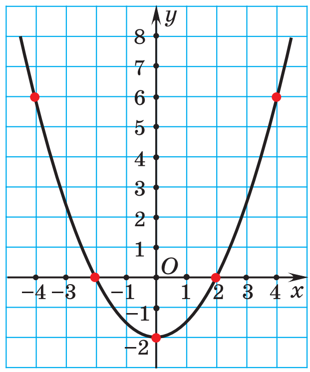
1. Определите координаты вершины параболы: а) $y = 3(x-1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x-3)(x-1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Если квадратичная функция записана в форме $y = a(x-m)^2 + n$, то $x_в = m$, $y_в = n$. Для функции $y = 3\left(x-1{,}2\right)^2 - 5$ получим $x_в = 1{,}2$; $y_в = -5$. б) Запишем квадратичную функцию в виде многочлена $(2x-3)(x-1) = 2x^2 - 5x + 3$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2\cdot 2} = \frac{5}{4}$. Для нахождения ординаты вершины параболы можно воспользоваться формулой $y_в = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, тогда $y_в = -\frac{(-5)^2 - 4\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 2} = -\frac{1}{8}$.

	Ординату вершины параболы можно также найти, подставив найденное значение абсциссы вершины в формулу функции: $y_в = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}$. в) $x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$; $y_в = -2 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 2 = 0$.
Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции	
2. Найдите наибольшее (наименьшее) значение функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы, т. е. наименьшее значение данной функции равно $y_в = -5$. б) Так как $a = 2 > 0$, то функция принимает наименьшее значение, равное ординате вершины параболы. Поскольку вершина параболы имеет координаты $\left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right)$, то наименьшее значение данной функции равно $y_в = -\frac{1}{8}$. в) Так как $a = -2 < 0$, то функция принимает наибольшее значение, равное ординате вершины параболы. Ордината вершины параболы равна нулю, значит, наибольшее значение данной функции равно $y_в = 0$.

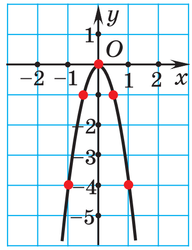
Множество значений квадратичной функции	
3. Найдите множество значений квадратичной функции: а) $y = 3(x - 1{,}2)^2 - 5$; б) $y = (2x - 3)(x - 1)$; в) $y = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Так как $a = 3 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -5$, то $E = [-5; +\infty)$. б) Так как $a = 2 > 0$, то $E = [y_в; +\infty)$. Поскольку $y_в = -\frac{1}{8}$, то $E = \left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$. в) Так как $a = -2 < 0$, то $E = (-\infty; y_в]$. Поскольку $y_в = 0$, то $E = (-\infty; 0]$.
Точки пересечения графика функции с осями координат	
4. Найдите координаты точек пересечения графика квадратичной функции с осями координат: а) $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$; б) $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$; в) $p(x) = -2x^2 + 4x - 2$.	а) Для определения координат точек пересечения графика функции $f(x) = -(x - 1{,}2)^2 + 25$ с осью абсцисс найдем нули этой функции, т. е. решим уравнение $-(x - 1{,}2)^2 + 25 = 0$: $(x - 1{,}2 + 5)(x - 1{,}2 - 5) = 0$; $(x + 3{,}8)(x - 6{,}2) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6{,}2, \\ x = -3{,}8. \end{array}\right.$ Для определения координат точки пересечения графика с осью ординат найдем значение функции при $x = 0$ и получим $f(0) = -(0 - 1{,}2)^2 + 25 = -1{,}44 + 25 = 23{,}56$. *Ответ*: $(6{,}2; 0)$; $(-3{,}8; 0)$; $(0; 23{,}56)$. б) Найдем нули функции $h(x) = 2(x - 1)(x + 4)$. Используем свойство о равенстве произведения нулю и получим: $\left[\begin{array}{l} x - 1 = 0, \\ x + 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -4. \end{array}\right.$

	$h(0) = 2(0-1)(0+4) = -8$. *Ответ*: (1; 0); (–4; 0); (0; –8). в) $-2x^2 + 4x - 2 = 0$, $x^2 - 2x + 1 = 0$, $(x-1)^2 = 0$, $x = 1$. $p(0) = -2$. *Ответ*: (1; 0); (0; –2).
Построение графика квадратичной функции	
5. Постройте график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$.	① $a = -2 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{7}{-4} = \frac{7}{4}$, $y_в = -2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 7 \cdot \frac{7}{4} - 3 = 3\frac{1}{8}$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 1\frac{3}{4}$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $2x^2 - 7x + 3 = 0$; $D = 25$, $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{2}$; (3; 0); $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат: $x = 0$, $y = -3$. Точка (3,5; –3) симметрична точке (0; –3) относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = -2x^2 + 7x - 3$. 

6. Постройте график функции $y = (x-3)^2 - 4$.	① $a = 1 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = 3$, $y_в = -4$. Ось симметрии параболы — прямая $x = 3$. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $(x-3)^2 - 4 = 0$; $(x-3+2)(x-3-2) = 0$; $(x-1)(x-5) = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 5$; (1; 0); (5; 0). ④ При $x = 0$ $y = (0-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$. График функции пересекает ось ординат в точке (0; 5). Точка (6; 5) симметрична точке (0; 5) относительно оси симметрии параболы. ⑤ Построим график функции $y = (x-3)^2 - 4$. 
7. Постройте график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$.	① $a = 0{,}5 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{1} = 0$; $y_в = 0{,}5 \cdot 0^2 - 2 = -2$.

	Осью симметрии параболы является прямая $x = 0$, т. е. ось ординат. ③ Точки пересечения графика с осью абсцисс: $0{,}5x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 4 = 0$, $x_1 = 2$; $x_2 = -2$; $(2; 0)$; $(-2; 0)$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат $(0; -2)$. ⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: $(4; 6)$; $(-4; 6)$. Построим график функции $y = 0{,}5x^2 - 2$. 
8. Постройте график функции $y = -4x^2$.	① $a = -4 < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз. ② Координаты вершины параболы: $x_в = -\frac{0}{-8} = 0$; $y_в = -4 \cdot (0)^2 = 0$. Ось симметрии параболы $x = 0$ — ось ординат. ③ Нули функции: $-4x^2 = 0$, $x = 0$. ④ Точка пересечения графика с осью ординат $(0; 0)$.

⑤ Найдем координаты нескольких дополнительных точек: (1; –4); (–1; –4); (0,5; –1); (–0,5; –1). Построим график функции $y = -4x^2$.



1. Какая из следующих функций не является квадратичной:
а) $f(x) = (3x - 2) + (5x + 4)$; б) $g(x) = (3x + 1)(5x + 4)$;
в) $h(x) = 7x^2 - 8x + 1$?

2. Даны три функции: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$; $g(x) = 2(x + 1)^2 - 8$ и $h(x) = 2(x - 1)(x + 3)$. Верно ли, что f, g, h — три формы записи одной и той же функции?

3.4. Пользуясь определением квадратичной функции, из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 + 7x - 2$; б) $y = 5x^2 + x$; в) $y = -2x^2 + 9$;
г) $y = -x + 7$; д) $y = 5x^2$; е) $y = x^3 + 3x^2$.

3.5. Для каждой из квадратичных функций определите, в какой форме она записана:

а) $f(x) = 5x^2 - 3x + 2$; б) $f(x) = (x + 1)(x - 5)$;
в) $f(x) = 7(x - 2)^2 + 8$; г) $f(x) = -2x^2 + 7x - 1$;
д) $f(x) = (9 - x)(3x + 4)$; е) $f(x) = -4(x + 1)^2 - 5$.

3.6. Выберите уравнения парабол, ветви которых направлены вниз:

а) $y = 3x^2 - x - 2$; б) $y = -2x^2 + 4x - 1$;
в) $y = -x^2 + 10x$; г) $y = 9 - x^2$;
д) $y = 0{,}1x^2$; е) $y = 4x^2 - 1$.

Приведите несколько примеров функций, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх.

3.7. Определите, каким параболам принадлежит точка с координатами (1; 4):

а) $y = x^2 - x - 4$;   б) $y = -3(x + 1)^2 + 16$;
в) $y = (x - 2)(x - 5)$;   г) $y = -x^2 + 3$.

3.8. Для квадратичной функции, заданной формулой $f(x) = x^2 - 5x + 1$, найдите:

а) $f(1)$;   б) $f(-3)$;   в) $f(0)$.

3.9. Для квадратичной функции $g(x) = -0{,}25x^2 + 3$ сравните:

а) $g(-2)$ и $g(4)$;   б) $g(-0{,}5)$ и $g(0{,}5)$;
в) $g\left(-2\sqrt{3}\right)$ и $g\left(\sqrt{6}\right)$;   г) $g\left(-2\sqrt{5}\right)$ и $g\left(2\sqrt{5}\right)$.

3.10. Для квадратичной функции $f(x) = x^2 - 4x + 9$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 9$;   б) $f(x) = 6$;   в) $f(x) = 21$.

3.11. Определите, существуют ли значения аргумента, при которых квадратичная функция:

а) $y = x^2 - 4x + 7$ принимает значение, равное 4;
б) $y = -2x^2 + 6$ принимает значение, равное 9;
в) $y = 5x^2 - x + 1$ принимает значение, равное 1.

3.12. Для парабол, изображенных на рисунке 53, запишите:

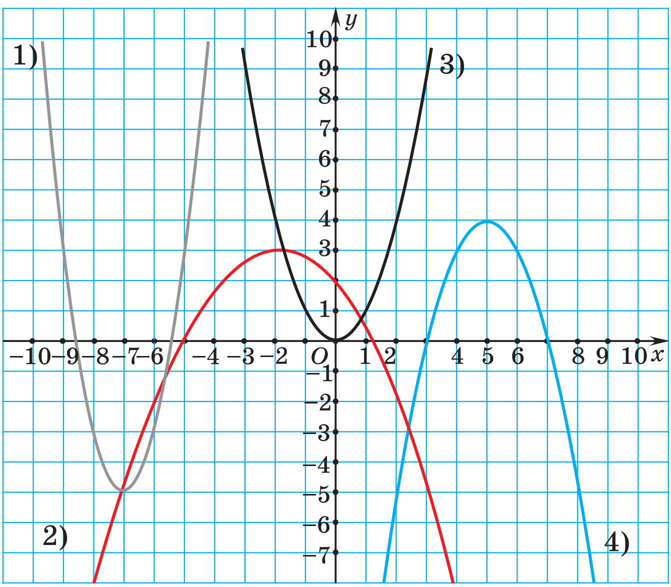


Рис. 53

а) направление ветвей; б) координаты вершины; в) уравнение оси симметрии; г) наибольшее (наименьшее) значение; д) множество значений.

3.13. Определите направление ветвей и координаты вершины параболы:

а) $y = (x-2)^2 + 3$; б) $y = 4(x+1)^2 - 6$;
в) $y = -(x-5)^2 - 8$; г) $y = -7(x+9)^2$;
д) $y = 2x^2 + 5$; е) $y = -8x^2$.

3.14. Приведите по два примера уравнений парабол, вершинами которых являются точки:

а) (3; 8); б) (–8; –6); в) (0; –3); г) (5; 0).

3.15. График функции $f(x) = a(x - m)^2 + n$ изображен на рисунке 54. Пользуясь графиком, найдите a, m и n. Запишите функцию $y = f(x)$ в виде многочлена.

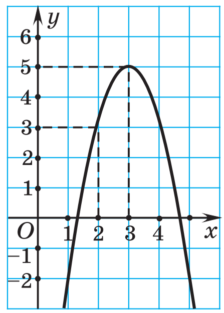


Рис. 54

3.16. Найдите координаты вершины параболы и запишите уравнение ее оси симметрии:

а) $y = 2x^2 - 4x + 1$; б) $y = 2x^2 + 4x$;
в) $y = -0{,}5x^2 - 4x + 1$; г) $y = -x^2 + 4x - 7$.

3.17. Определите, в какой координатной четверти находится вершина параболы:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 7$; б) $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$;
в) $f(x) = 4x^2 + 4x - 5$; г) $f(x) = -3x^2 - 12x$.

Запишите уравнение оси симметрии для каждой параболы.

3.18. Запишите квадратичную функцию $y = (x - 4)(x + 2)$ в виде многочлена и найдите ординату вершины параболы, являющейся графиком данной функции.

3.19. Найдите наименьшее (наибольшее) значение функции:

а) $y = (x-8)^2 + 9$; б) $y = -4(x+1)^2 + 5$;
в) $y = 2x^2 - 6x + 4$; г) $y = -x^2 + 4x - 3$;
д) $y = (x+8)(x-4)$; е) $y = -3(x-1)(x+5)$.

3.20. Приведите по два примера квадратичных функций:

а) наименьшим значением которых является число 7;
б) наибольшим значением которых является число 15.

3.21. Найдите область определения и множество значений функции:

а) $f(x) = 7(x + 6)^2 - 1$; б) $f(x) = -(x - 4)^2 + 2$;

в) $f(x) = x^2 + 4x - 1$; г) $f(x) = -3x^2 + 6x - 4$;

д) $f(x) = -(x - 6)(x + 2)$; е) $f(x) = 2(x + 4)(x + 8)$.

3.22. Определите координаты точек, в которых график функции пересекает оси координат:

а) $y = (x - 8)(x + 3)$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;

в) $y = (x + 7)^2 - 4$; г) $y = x^2 - 9$.

3.23. Среди квадратичных функций выберите функции, не имеющие нулей:

а) $y = (x + 1)(x - 6)$; б) $y = x^2 + x + 3$;

в) $y = -(x - 5)^2 + 1$; г) $y = x^2 + 4$.

3.24. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 - 2x - 8$; б) $y = -x^2 + 5x - 6$;

в) $y = 2x^2 - 8x + 6$; г) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2{,}5$.

3.25. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = x^2 - 6x$; б) $f(x) = -x^2 + 9$;

в) $f(x) = 2x^2 - 4x + 9$; г) $f(x) = -3x^2$.

3.26. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 1)^2 - 4$; б) $y = -2(x + 3)^2 + 8$;

в) $y = (x - 5)(x + 1)$; г) $y = -\frac{1}{2}(x + 3)(x - 7)$.

Можно ли определить ось симметрии параболы, не выполняя построение графика?

3.27. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^2$; $y = 2x^2$; $y = \frac{1}{3}x^2$; $y = -x^2$. Проанализируйте полученные результаты и сделайте вывод.

3.28. На рисунке 55 изображен график одной из функций:

а) $y = -x^2 - 2x + 2$; б) $y = -x^2 + 2x + 3$;

в) $y = -x^2 + x + 2$; г) $y = -x^2 + 2x + 2$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке. Объясните свой выбор.

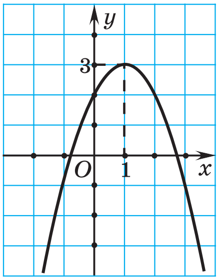


Рис. 55

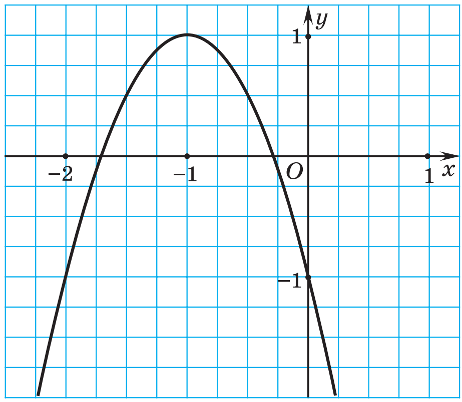


Рис. 56

3.29. Постройте график квадратичной функции и выясните, сколько корней имеет уравнение $f(x) = 2$:

а) $f(x) = x^2 - 8x + 7$; б) $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$;

в) $f(x) = x^2 + 4x + 6$; г) $f(x) = -x^2 + 4x$;

д) $f(x) = (x - 3)^2$; е) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$.

3.30. График функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ изображен на рисунке 56. Пользуясь графиком:

а) определите $f(0)$; $f(-1)$; $f(-2)$; б) найдите a; b и c.

3.31. Для того чтобы обнести изгородью прямоугольный участок для посадки овощей, было куплено 24 м сетки. Площадь участка S является функцией от длины одной из его сторон x. Задайте эту функцию формулой. Найдите, при каком значении аргумента функция принимает наибольшее значение.

3.32. На рисунке 57 изображен график квадратичной функции $y = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$. Определите координаты точек A; B; C; D; E.

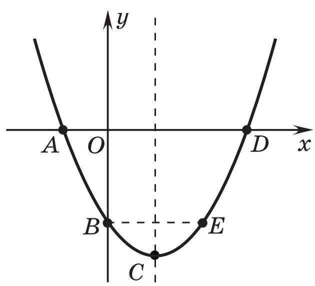


Рис. 57

3.33. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 6x + 5$ и $y = -x + 1$;

б) $y = x^2 - 4$ и $y = -x + 2$;

в) $y = -x^2 + 4x - 5$ и $y = -2$.

Проверьте полученные результаты.

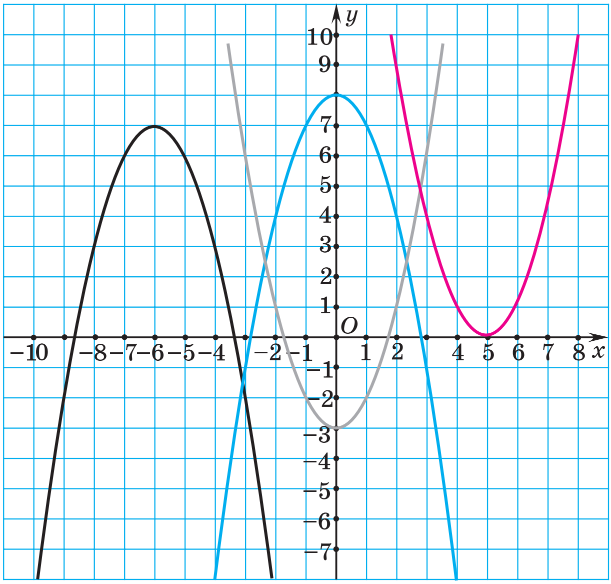


Рис. 58

3.34. Определите, графика какой из данных функций нет на рисунке 58:

а) $y = x^2 - 3$; б) $y = -(x + 6)^2 + 7$; в) $y = (x - 5)^2$;
г) $y = -(x - 6)^2 + 7$; д) $y = -x^2 + 8$.

3.35. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = -2(x - 1)^2 + 2$ и $g(x) = (x + 3)^2 - 4$. Определите, имеют ли параболы общие точки. Можно ли это определить, не выполняя построения графиков?

3.36. На рисунке 59 изображены графики функций $f(x) = 3x^2 + 24x + c$ и $g(x) = -x^2 + bx - 18$. Пользуясь данными рисунка: а) найдите числа b и c; б) определите общее свойство для двух парабол; в) решите графически уравнение $f(x) = g(x)$.

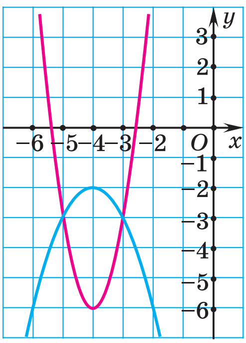


Рис. 59

3.37. Найдите значение числа b, при котором графики функций $y = -3x + b$ и $y = (x - 3)(x - 7)$ пересекаются в точке, принадлежащей оси ординат.

3.38. Определите, при каких значениях m и n вершина параболы $y = a(x - m)^2 + n$:

а) принадлежит оси ординат;
б) принадлежит оси абсцисс;
в) находится в начале координат.

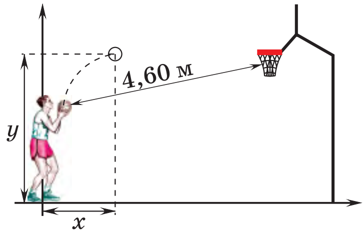


Рис. 60

3.39. Во время штрафного броска в баскетболе мяч находился примерно в 4,60 м от центра корзины, расположенной на высоте 3,05 м от пола. Игрок бросил мяч от уровня плеч, а это приблизительно 1,65 м от пола (рис. 60). Предполагается, что кривой, описанной в пространстве мячом, является парабола $y = -0{,}5x^2 + 1{,}95x + 1{,}65$, где x — расстояние по горизонтали от игрока до мяча, y — высота, на которой находится мяч. Можно ли утверждать, что игрок сумел забросить мяч в корзину? Какая максимальная высота достигнута мячом?

Знаете ли вы, что среди воспитанников белорусской школы баскетбола есть игроки мирового уровня? Например, Татьяна Ивинская в составе женской баскетбольной сборной на XXII Летних Олимпийский играх 1980 года в Москве стала олимпийской чемпионкой. Каких еще известных белорусских баскетболистов вы знаете?

3.40. На рисунке 61 изображены графики парабол $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c, знак дискриминанта соответствующего квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ для каждой из парабол.

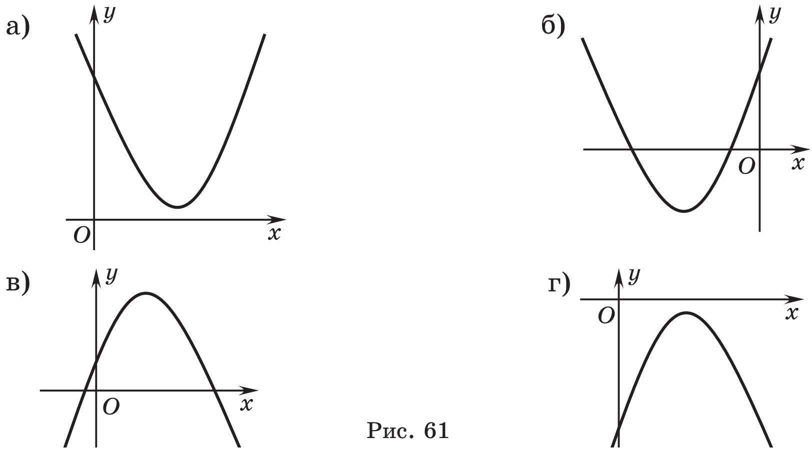


Рис. 61

3.41. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c > 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} < 0;$ б) $a < 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} > 0;$

в) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0;$ г) $a < 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0,$

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.42. Найдите абсциссу вершины параболы, если известно, что нулями функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, являются числа:

а) –11 и 13; б) $-3 + 2\sqrt{5}$ и $25 - 2\sqrt{5}$.

3.43. График квадратичной функции $y = -x^2 + 8x + c$ проходит через точку $A(9;\ 0)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) наибольшее значение функции;
г) нули функции.

3.44. Найдите значения c, при которых график квадратичной функции $y = x^2 + 10x + c$:

а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку;
б) пересекает ось ординат в точке $A(0;\ -7)$;
в) проходит через начало координат;
г) не имеет с осью абсцисс общих точек.

3.45. График квадратичной функции $f(x) = 2x^2 + bx + 4$ проходит через точку $B(-1;\ -12)$. Найдите:

а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции;
г) нули функции.

3.46. Найдите значения b, при которых график квадратичной функции $y = -x^2 + bx - 9$: а) имеет с осью абсцисс только одну общую точку; б) симметричен относительно оси ординат; в) пересекает ось абсцисс в точках, симметричных относительно прямой $x = 5$.

3.47. На рисунке 62 изображен график функции $y = 3x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

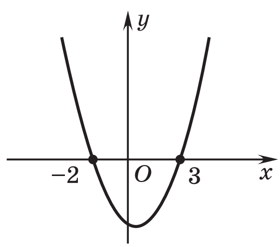


Рис. 62

3.48. Нулями квадратичной функции $y = -4x^2 + bx + c$ являются числа –1 и 3. Найдите:
а) координаты вершины параболы;
б) ось симметрии параболы;
в) множество значений функции.

3.49. Прямая $x = 2$ является осью симметрии параболы $f(x) = -x^2 + (a^2 + 4)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.50. Выберите функции, графиками которых являются параболы, ветви которых направлены вверх:
а) $y = 5x^2 - x + 2$; б) $y = 5x - 1$;
в) $y = -x^2 + 12$; г) $y = 9x^2 + x$.

3.51. Выберите точку, принадлежащую графику квадратичной функции $y = 4x^2 - 3x + 1$:
а) $(1; -1)$; б) $(4; -3)$; в) $(0; -3)$; г) $(-2; 23)$.

3.52. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = x^2 + 6x + 3$. Найдите: а) $f(2)$; б) $f(-1)$; в) значения аргумента, при которых $f(x) = -5$.

3.53. Найдите координаты вершины параболы:
а) $y = (x + 5)^2 - 4$; б) $y = -2(x - 8)^2 + 1$;
в) $y = -x^2 + 6$; г) $y = 7(x - 1)^2$.
Запишите ось симметрии для каждой параболы.

3.54. Выберите параболу, вершиной которой является точка с координатами $(-3; 5)$:
а) $f(x) = x^2 - 6x + 14$; б) $f(x) = 2x^2 + 12x + 28$;
в) $f(x) = -2x^2 - 12x - 13$; г) $f(x) = -3x^2 + 5$.

3.55. Найдите наименьшее (наибольшее) значение квадратичной функции:
а) $y = 3(x + 1)^2 - 7$; б) $y = -x^2 - 6x - 2$;
в) $y = (x - 1)(x + 3)$; г) $y = -2x^2 + 10$.

3.56. Найдите область определения и множество значений квадратичной функции:
а) $f(x) = -(x - 5)^2 + 8$; б) $f(x) = x^2 - 8x + 3$;
в) $f(x) = 4(x + 5)(x - 7)$; г) $f(x) = -x^2 + 6x - 9$.

3.57. Определите координаты точек, в которых график квадратичной функции пересекает оси координат:

а) $y = (x + 2)(x - 8)$; б) $y = -x^2 + 8x - 7$;

в) $y = -(x - 6)^2 + 9$; г) $y = x^2 + 1$.

3.58. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = x^2 + 4x + 3$; б) $y = -x^2 + 6x - 5$.

3.59. Постройте график квадратичной функции и найдите множество ее значений:

а) $f(x) = -x^2 + 4x$; б) $f(x) = x^2 - 1$;

в) $f(x) = -x^2 + 2x - 5$; г) $f(x) = 2x^2$.

3.60. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x + 5)^2 - 9$; б) $y = -(x - 2)(x + 4)$.

Запишите уравнение оси симметрии каждой из полученных парабол.

3.61. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 4)(x + 2)$; б) $y = 4x - x^2$;

в) $y = 3x^2 + 6x + 4$; г) $y = -(x - 2)^2$.

Для каждой параболы определите, пересекает ли парабола график функции $y = -9$, и если да, то в скольких точках.

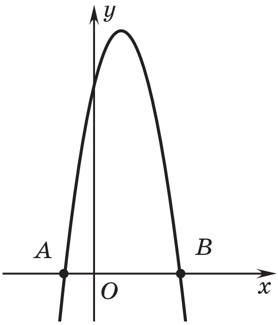


Рис. 63

3.62. На рисунке 63 изображен график функции $y = -2x^2 + 7x + 9$. Определите координаты точек A и B.

3.63. Постройте графики функций и найдите координаты точек пересечения этих графиков:

а) $y = x^2 - 2x - 8$ и $y = 2x - 3$;

б) $y = -x^2 + 6x$ и $y = 9$.

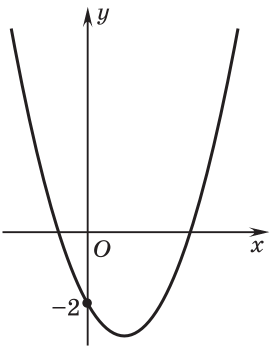


Рис. 64

3.64. На рисунке 64 изображен график одной из функций:

а) $y = x^2 - 3x$; б) $y = x^2 - 2x - 2$;

в) $y = x^2 - 2$; г) $y = x^2 + 2x - 2$.

Определите, график какой функции дан на рисунке. Объясните свой выбор.

3.65. Постройте графики функций $f(x) = -(x + 4)^2 + 9$ и $g(x) = (x - 2)^2 - 1$, определите, имеют ли параболы общие точки.

3.66. Предприниматель шьет от 0 до 50 изделий в день и считает, что уровень затрат (в рублях) на производство x изделий задается с помощью функции $C(x) = x^2 - 10x + 500$. Пусть $R(x)$ — выручка от продажи x изделий, каждое из которых стоит 50 р.

а) Выразите зависимость $R(x)$.

б) Рассчитайте затраты, выручку и прибыль при продаже 20 швейных изделий.

в) Докажите, что величина прибыли задается с помощью функции $B(x) = -x^2 + 60x - 500$.

г) Найдите максимально выгодное для продажи число изготовленных изделий.

3.67. Точка $M(2;\ 47)$ принадлежит графику квадратичной функции $y = -x^2 + bx + 7$. Найдите наибольшее значение функции.

3.68. На рисунке 65 изображен график квадратичной функции $y = x^2 + bx + c$. Пользуясь данными рисунка, найдите b и c.

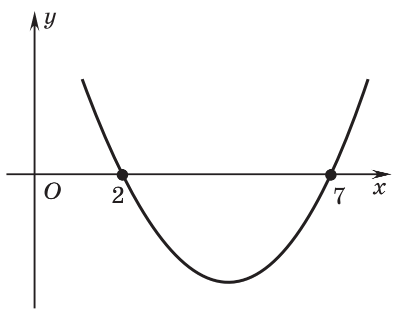


Рис. 65

3.69. Изобразите схематически график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, если:

а) $a > 0,\ c < 0,\ D > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

б) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

в) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$,

где D — дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

3.70. Нулями квадратичной функции $y = 3x^2 + bx + c$ являются числа –4 и 5. Найдите:

а) координаты вершины параболы;

б) ось симметрии параболы;

в) наименьшее значение функции.

3.71. Прямая $x = 1$ является осью симметрии параболы $f(x) = 4x^2 + (a^2 - 8)x + 2$. Найдите координаты вершины параболы.

3.72. Примените формулы сокращенного умножения и вычислите: $\dfrac{48^2-12^2}{89^2+31^2+89\cdot 62}$.

3.73. Найдите значение выражения b^3-4b^{-2}, если $b=-2$.

3.74. Найдите значение выражения:

а) $5a+5b-8$, если $-a-b=3$;

б) $x+1-6y$, если $-x+6y=8$.

3.75. Упростите выражение $\sqrt{x^2-2x+1}+x-2$ при $x<1$.

3.76. Длина экватора составляет около 40 076 км. Переведите длину экватора в метры, запишите полученное число в стандартном виде и определите порядок числа.

3.77. Представьте в виде произведения:

а) $m^3+mn^2+13m^2n+13n^3$;

б) $a^2b^2+5a^2b-5ab-ab^2$.

3.78. Решите систему неравенств $\begin{cases}\dfrac{3x-13}{4}\leqslant\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{7}{8},\\ 2\geqslant\dfrac{x}{4}+\dfrac{3-2x}{3}.\end{cases}$

3.79. Клиент оператора мобильной связи делает выбор между двумя тарифами. Оба тарифа предполагают ежемесячную абонентскую плату и оплату каждой минуты разговора. По тарифу A нужно платить 15 р. в месяц и 10 к. за минуту. По тарифу B — 10 р. в месяц и 15 к. за минуту. Какой тариф выгоднее, если клиент планирует разговаривать по телефону:

а) 80 минут в месяц; б) 150 минут в месяц?

Сколько минут в месяц нужно разговаривать, чтобы итоговая сумма была одинаковой для обоих тарифов?

3.80. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{1}{7}\sqrt{7}+\sqrt{20}.$$

3.81. (*Задача Л. Эйлера.*) Некий чиновник купил лошадей и быков за 1770 талеров. За каждую лошадь он заплатил по 31 талеру, за каждого быка — по 21 талеру. Сколько лошадей и сколько быков купил чиновник?

§ 14. Монотонность, промежутки знакопостоянства квадратичной функции

3.82. Для функции $f(x) = x^2 + 2$ сравните:
а) $f(-3)$ и $f(-2)$; б) $f(2)$ и $f(3)$.

3.83. Для функции $f(x) = x^2 - 4$ сравните с нулем:
а) $f(-1)$; б) $f(-2)$; в) $f(2)$; г) $f(4)$.

3.84. Верно ли, что значения функции $y = f(x)$ положительны для всех значений аргумента:
а) $f(x) = x^2 + 1$; б) $f(x) = x^2 - 1$; в) $f(x) = -x^2 + 1$?

Двое друзей изучали свойства квадратичной функции. Один из них утверждал, что, не выполняя вычислений, может доказать, что $f(5{,}2145) > f(3{,}987)$, а $f(-1{,}23) > f(1{,}59)$, если задана функция $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$. «Какое свойство квадратичной функции применяется?» — заинтересовался его друг.

Построим график функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ (рис. 66). На оси абсцисс точка 5,2145 расположена правее точки 3,987, и обе они расположены правее точки 2. Точки графика, расположенные правее вершины (2; –1), с увеличением значений абсцисс «поднимаются вверх», точнее, значения ординат этих точек (значения функции) увеличиваются с увеличением значений аргумента. Так как $5{,}2145 > 3{,}987 > 2$, то $f(5{,}2145) > f(3{,}987)$.

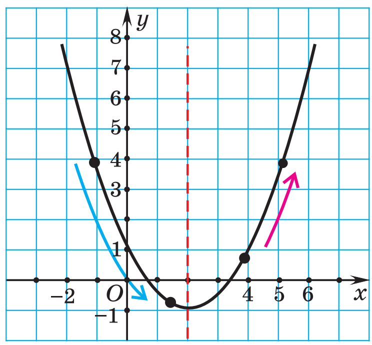


Рис. 66

Таким образом, для функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ при $x > 2$ большему значению аргумента соответствует большее значение функции. Говорят, что данная функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ или что $[2; +\infty)$ — **промежуток возрастания функции.**

Определение

Функция возрастает на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка **большему значению** аргумента соответствует **большее значение** функции.

На промежутке $(-\infty; 2]$ точки графика «опускаются вниз» при увеличении значений их абсцисс, т. е. с увеличением значений аргумента на этом промежутке значения функции уменьшаются.

Определение **Функция убывает** на некотором промежутке, если для любых двух значений аргумента из этого промежутка **большему значению** аргумента соответствует **меньшее значение** функции.

Так, для функции $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2 - 1$ верно, что $f(-1{,}23) > f(1{,}59)$, поскольку $-1{,}23 < 1{,}59$, а числа $-1{,}23$ и $1{,}59$ принадлежат промежутку, на котором функция убывает **(промежутку убывания функции)**.

В общем случае для функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеем:

если $a > 0$ (ветви параболы направлены вверх), то функция убывает на промежутке $(-\infty; x_в]$ и возрастает на промежутке $[x_в; +\infty)$ (рис. 67, *а*);

если $a < 0$ (ветви параболы направлены вниз), то функция убывает на промежутке $[x_в; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_в]$ (рис. 67, *б*).

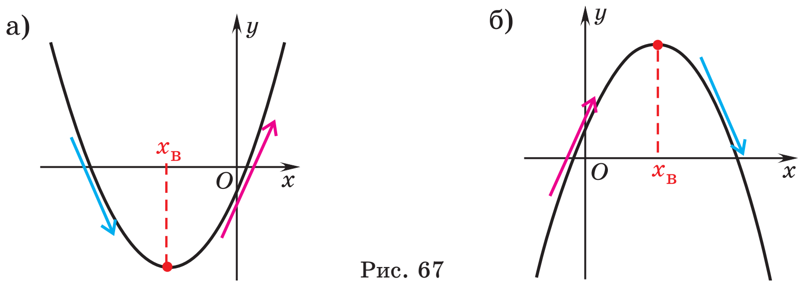


Рис. 67

Пример. Найдите промежутки убывания и возрастания квадратичной функции:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; б) $f(x) = -x^2 + 5$.

Решение. а) Ветви параболы направлены вверх, поскольку $a = 1 > 0$. Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$.

Составим таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
$f(x)$, $a > 0$	↘ ↗

Функция $f(x) = x^2 - 4x + 3$ убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и возрастает на промежутке $[2; +\infty)$.

б) Ветви параболы направлены вниз ($a = -1 < 0$) и $x_в = 0$. Составим таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	$\nearrow$ $\searrow$

Функция $f(x) = -x^2 + 5$ убывает на промежутке $[0; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$.

Чтобы определить промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, нужно:

① Определить абсциссу вершины параболы $x_в = -\dfrac{b}{2a}$.

② Определить знак первого коэффициента.

③ Заполнить таблицу изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента.

x	$-\infty$ $x_в$ $+\infty$
$f(x)$, $a > 0$	$\searrow$ $\nearrow$

или

x	$-\infty$ $x_в$ $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	$\nearrow$ $\searrow$

④ Записать ответ.
(Если $a > 0$, то функция убывает на промежутке $(-\infty; x_в]$ и возрастает на промежутке $[x_в; +\infty)$;
если $a < 0$, то функция убывает на промежутке $[x_в; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; x_в]$.)

Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции

$$y = -2x^2 - 6x + 8.$$

① $x_в = -\dfrac{-6}{2\cdot(-2)} = -1{,}5.$

② $a = -2 < 0.$

③

x	$-\infty$ $-1{,}5$ $+\infty$
$f(x)$, $a < 0$	$\nearrow$ $\searrow$

④ *Ответ*: промежуток возрастания $(-\infty; -1{,}5]$;
промежуток убывания $[-1{,}5; +\infty)$.

Промежутки убывания и возрастания функции называются промежутками монотонности функции.

Промежутки знакопостоянства квадратичной функции

Для того чтобы определить, на каком промежутке значения квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ положительны, а на каком отрицательны, воспользуемся ее схематическим изображением.

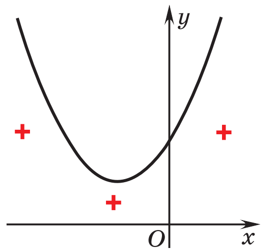


Рис. 68

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 68, принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, так как при всех $x \in \boldsymbol{R}$ график этой функции расположен выше оси абсцисс, т. е.

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

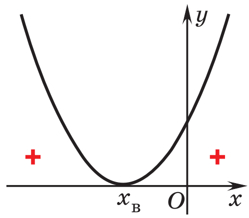


Рис. 69

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 69, принимает только положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен выше оси абсцисс. Значит,

$$y > 0 \text{ при } x \in (-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty).$$

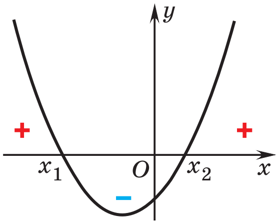


Рис. 70

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 70, принимает положительные значения на открытых числовых лучах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, отрицательные значения — между нулями функции, т. е. на интервале $(x_1; x_2)$.

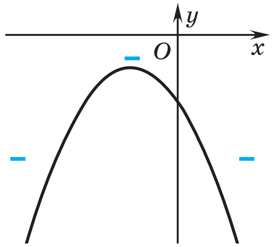


Рис. 71

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 71, принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, так как при всех $x \in \boldsymbol{R}$ график этой функции расположен ниже оси абсцисс, т. е.

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

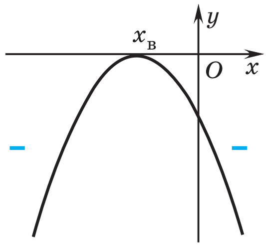


Рис. 72

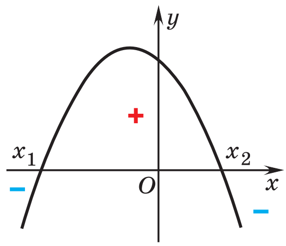


Рис. 73

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 72, принимает только отрицательные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = x_в$, так как при всех $x \neq x_в$ график функции расположен ниже оси абсцисс. Значит,

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty;\ x_в) \cup (x_в;\ +\infty).$$

Квадратичная функция, график которой изображен на рисунке 73, принимает положительные значения между нулями функции, т. е. на интервале $(x_1;\ x_2)$. Отрицательные значения эта функция принимает на открытых числовых лучах $(-\infty;\ x_1)$ и $(x_2;\ +\infty)$.

Промежутки, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения, называются промежутками знакопостоянства функции.

<table>
<tr><th colspan="2">Монотонность квадратичной функции</th></tr>
<tr>
<td>1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y = x^2 - 4x + 3$.</td>
<td>① Найдем абсциссу вершины параболы: $x_в = -\frac{-4}{2} = 2$.
② Определим знак первого коэффициента: $a = 1 > 0$.
③
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$ 2 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$, $a > 0$</td><td>$\searrow$ $\nearrow$</td></tr>
</table>
④ Ответ: функция возрастает на числовом луче $[2; +\infty)$ и убывает на числовом луче $(-\infty;\ 2]$.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>

2. Найдите промежутки монотонности функции

$y = -5(x+7)^2 + 1.$

</td>
<td>

① $x_в = -7.$

② $a = -5 < 0.$

③

<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty \quad -7 \quad +\infty$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$,
$a < 0$</td><td>↗ ↘</td></tr>
</table>

④ *Ответ*: функция убывает на числовом луче $[-7; +\infty)$ и возрастает на числовом луче $(-\infty; -7]$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

3. На рисунке 74 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Определите промежутки возрастания и убывания этих функций.

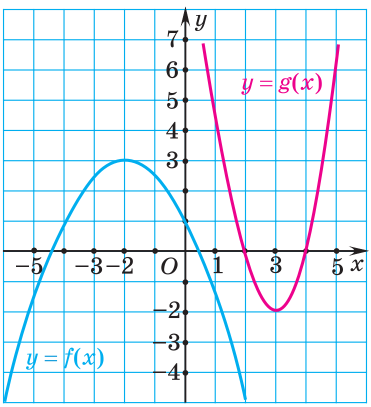


Рис. 74

</td>
<td>

Функции $y = f(x)$ соответствует парабола, ветви которой направлены вниз. Абсцисса вершины параболы равна $x_в = -2$. Эта функция возрастает на числовом луче $(-\infty; -2]$ и убывает на числовом луче $[-2; +\infty)$.

Парабола, ветви которой направлены вверх, соответствует функции $y = g(x)$. Так как $x_в = 3$, то функция возрастает на числовом луче $[3; +\infty)$ и убывает на числовом луче $(-\infty; 3]$.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

4. Дана функция

$$f(x) = -7(x-5)^2 - 1.$$

Не выполняя вычислений, расположите в порядке возрастания:

а) $f(9{,}8)$; $f(6{,}2)$; $f(5{,}6)$;

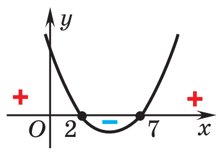
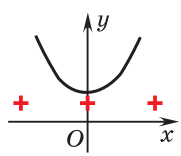
б) $f(-1{,}2)$; $f(2{,}8)$; $f(4{,}9)$.

</td>
<td>

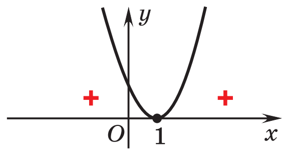
Функция $f(x) = -7(x-5)^2 - 1$ убывает на числовом луче $[5; +\infty)$ и возрастает на числовом луче $(-\infty; 5]$.

а) Числа 9,8; 6,2 и 5,6 принадлежат промежутку убывания функции, поэтому из того, что $9{,}8 > 6{,}2 > 5{,}6$, следует $f(9{,}8) < f(6{,}2) < f(5{,}6)$.

</td>
</tr>
</table>

	б) Числа –1,2; 2,8 и 4,9 принадлежат промежутку возрастания функции, поэтому из того, что $-1{,}2 < 2{,}8 < 4{,}9$, следует $f(-1{,}2) < f(2{,}8) < f(4{,}9)$.
Промежутки знакопостоянства квадратичной функции	
5. Определите промежутки знакопостоянства функции: а) $y = x^2 - 9x + 14$; б) $y = x^2 + 4$; в) $y = (x - 1)^2$.	а) Построим схему графика функции $y = x^2 - 9x + 14$. Для этого определим нули функции, т. е. решим уравнение $x^2 - 9x + 14 = 0$. Корни уравнения: $x_1 = 2$; $x_2 = 7$. Так как $a = 1$, то ветви параболы направлены вверх.  Отрицательные значения функция принимает между нулями функции, т. е. на промежутке (2; 7). Положительные значения функция принимает на открытых числовых лучах $(-\infty; 2)$ и $(7; +\infty)$. б) Построим схему графика функции $y = x^2 + 4$. График не пересекает ось абсцисс, ветви параболы направлены вверх.  Функция принимает положительные значения при всех значениях аргумента $x \in \boldsymbol{R}$.

в) Построим схему графика функции $y = (x - 1)^2$.
График функции имеет с осью абсцисс только одну общую точку $x = 1$, ветви параболы направлены вверх.



Функция принимает положительные значения при всех значениях аргумента, кроме $x = 1$, т. е. $y > 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Соотнесите таблицы изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента с функциями:

а) $f(x) = -3(x+1)^2 + 2$; б) $g(x) = 3(x-1)^2 + 2$; в) $h(x) = 3(x-2)^2 + 1$.

1)

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
	↘ ↗

2)

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
	↗ ↘

3)

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
	↘ ↗

Какие из указанных функций принимают только положительные значения?

3.85. Из данных квадратичных функций выберите функцию, возрастающую на промежутке $(-\infty; 5]$:

а) $f(x) = (x - 5)^2 + 3$; б) $f(x) = (x - 3)^2 + 5$;
в) $f(x) = -(x - 5)^2 + 3$; г) $f(x) = -(x - 3)^2 + 5$.

3.86. Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, используя алгоритм:

а) $y = x^2 - 6x + 4$; б) $y = -x^2 + 8x - 1$;
в) $y = 4x^2 + 12x - 5$; г) $y = -3x^2 - 6x + 8$;
д) $y = 9x^2 - 6x$; е) $y = -5x^2 + 7$.

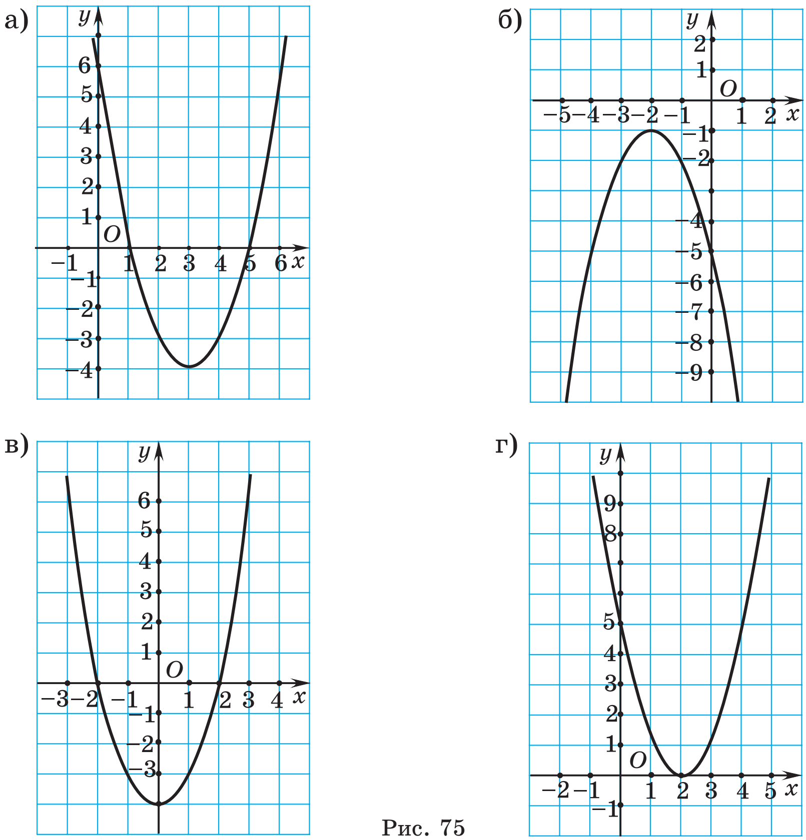


Рис. 75

3.87. Составьте таблицы изменения функции в зависимости от изменения значений аргумента для квадратичных функций, графики которых изображены на рисунке 75.

3.88. Приведите по два примера квадратичных функций, которые:

а) убывают на промежутке $[8; +\infty)$ и возрастают на промежутке $(-\infty; 8]$;

б) возрастают на промежутке $[-5; +\infty)$ и убывают на промежутке $(-\infty; -5]$.

3.89. Постройте график квадратичной функции и найдите ее промежутки монотонности:

а) $y = (x - 6)^2 - 1$; б) $y = -2x^2 - 4x + 16$;

в) $y = (x - 1)(x + 5)$; г) $y = -x^2 + 6x$.

Можно ли найти промежутки монотонности квадратичной функции, не выполняя построения графика?

3.90. Известно, что квадратичная функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $[3; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$. Запишите уравнение оси симметрии графика функции $y = f(x)$.

3.91. Прямая $x = -4$ — ось симметрии параболы, являющейся графиком квадратичной функции $y = f(x)$. Известно, что ветви параболы направлены вниз. Найдите промежутки монотонности функции $y = f(x)$.

3.92. Постройте график квадратичной функции:

а) $y = (x - 7)^2$; б) $y = -2x^2 + 8$; в) $y = -3(x + 2)^2$.

Найдите промежуток убывания функции.

3.93. Из данных квадратичных функций выберите все функции, которые возрастают на промежутке $(-\infty; 2]$:

а) $y = (x - 2)^2 - 1$; б) $y = -7(x - 2)^2 + 4$;

в) $y = -5x^2 + 20x + 3$; г) $y = -x^2 - 2$;

д) $y = x^2 - 2x - 7$; е) $y = -6x^2 + 12$.

Приведите примеры квадратичных функций, которые убывают на промежутке $(-\infty; -2]$.

3.94. Дана функция $f(x) = (x + 6)^2 - 8$. Не выполняя вычислений, сравните:

а) $f(3)$ и $f(5{,}2)$; б) $f(-9)$ и $f(-7)$;

в) $f(-5{,}23)$ и $f(-4{,}72)$; г) $f(-\sqrt{65})$ и $f(-\sqrt{45})$.

3.95. Дана функция

$$g(x) = -x^2 + 8x - 1.$$

Не выполняя вычислений, расположите в порядке убывания:

а) $g(5)$; $g(6{,}2)$ и $g(7{,}4)$;

б) $g(-2)$; $g(1{,}8)$ и $g(-3{,}7)$.

3.96. На рисунке 76 изображен график квадратичной функции $y = f(x)$. Верно ли, что $f(3) > 0$, $f(-1) < 0$, $f(0) = 0$, $f(5) < 0$? Запишите несколько значений аргумента, при которых $f(x) > 0$, $f(x) < 0$.

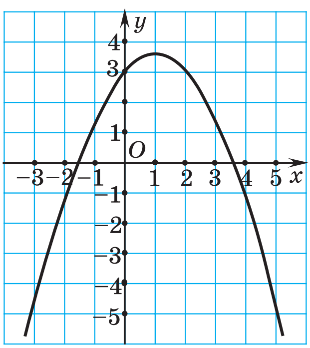


Рис. 76

3.97. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 - 8x + 7$; б) $y = -2x^2 + 5x - 2$;

в) $y = x^2 + 8x + 16$; г) $y = -3x^2 + x - 5$;

д) $y = -9x^2 - 6x - 1$; е) $y = 2x^2 + 9$.

3.98. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения:

а) $y = -(x - 8)^2 + 16$; б) $y = (3x - 1)(x + 5)$;

в) $y = -x^2 + 9$; г) $y = x(x + 5)$.

3.99. Приведите пример квадратичной функции, принимающей положительные значения только на: а) промежутке $(-3; 3)$; б) промежутке $(-1; 5)$; в) промежутках $(-\infty; 1)$ и $(6; +\infty)$.

3.100. Постройте график квадратичной функции $y = -x^2 + 4$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения; б) промежуток, на котором функция убывает.

3.101. Постройте график квадратичной функции $f(x) = 2x^2 + 6x$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; б) промежуток возрастания функции; в) множество значений функции; г) все значения аргумента, для которых выполняется неравенство $f(x) \leqslant 0$.

3.102. На рисунке 77 изображен график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Запишите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

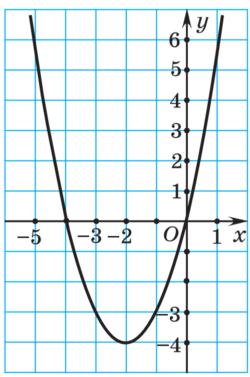


Рис. 77

3.103. Постройте график квадратичной функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.104. Приведите пример квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, которая возрастает на промежутке $[1; +\infty)$ и принимает положительные значения при всех значениях аргумента.

3.105. Постройте график квадратичной функции $y = -2(x + 1)^2 + 8$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наибольшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.106. Приведите пример квадратичной функции $g(x) = ax^2 + bx + c$, которая имеет наименьшее значение в точке $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ и принимает отрицательные значения на промежутке $(-3; 4)$.

3.107. Известно, что ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вниз, а нулями функции являются числа 8 и 32. Найдите промежутки:

а) знакопостоянства функции;

б) монотонности функции.

3.108. Найдите значения числа n, при которых функция $y = -3x^2 + x + n$ принимает только отрицательные значения.

3.109. Известно, что функция $y = 10x^2 + mx + k$ не имеет нулей. Найдите промежутки знакопостоянства функции.

3.110. Найдите значение числа b, при котором промежуток $(-\infty; -2]$ является промежутком убывания функции $y = 3x^2 + bx - 11$.

3.111. Прямая $x = -1$ является осью симметрии параболы $f(x) = ax^2 + (a^2 - 8)x - 2$, ветви которой направлены вниз. Найдите промежутки монотонности и промежутки знакопостоянства функции $y = f(x)$.

3.112. При каком значении числа a график квадратичной функции $y = ax^2 - 4x + 5$ касается оси абсцисс?

3.113. При каком значении числа a одна из точек пересечения параболы $y = x^2 + (a - 4)x + a - 4$ с осью абсцисс лежит правее начала координат, а другая — левее?

3.114. Из данных квадратичных функций выберите функцию, которая убывает на промежутке $(-\infty; 7]$:

а) $f(x) = (x-2)^2 - 7$;   б) $f(x) = (x-7)^2 + 2$;

в) $f(x) = -(x-7)^2 + 2$;   г) $f(x) = (x+7)^2 - 3$.

3.115. Найдите промежутки возрастания и убывания квадратичной функции, используя алгоритм:

а) $y = x^2 + 10x - 3$;   б) $y = -5x^2 - 15x + 7$;

в) $y = 4x^2 - 5$;   г) $y = -8x^2 + 2x$.

3.116. Постройте график квадратичной функции и найдите ее промежутки монотонности:

а) $y = x^2 - 6x + 5$;   б) $y = -2(x+3)^2 + 8$;

в) $y = (x-3)(x+1)$;   г) $y = -x^2 + 4x$.

3.117. Известно, что квадратичная функция $y = f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; -6]$ и возрастает на промежутке $[-6; +\infty)$. Запишите уравнение оси симметрии графика функции $y = f(x)$.

3.118. Постройте график квадратичной функции и найдите промежуток возрастания функции:

а) $y = (x+2)^2$;   б) $y = -x^2 + 1$;   в) $y = -2(x-3)^2$.

3.119. Из данных квадратичных функций выберите все функции, которые убывают на промежутке $[-1; +\infty)$:

а) $y = (x-1)^2 - 2$;   б) $y = -(x+1)^2 + 3$;

в) $y = -x^2 + 1$;   г) $y = -x^2 - 2x - 6$.

Приведите пример квадратичной функции, которая возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$.

3.120. Дана функция $f(x) = (x-4)^2 + 5$. Не выполняя вычислений, сравните:

а) $f(5)$ и $f(6)$;   б) $f(2)$ и $f(3)$;   в) $f(-2{,}4)$ и $f(3{,}75)$.

3.121. Дана функция $g(x) = -3x^2 - 12x + 2$. Не выполняя вычислений, расположите в порядке возрастания:

а) $g(-3)$; $g(-4{,}8)$ и $g(-6{,}5)$;   б) $g(10)$; $g(18)$ и $g(15)$.

3.122. Найдите промежутки знакопостоянства функции:

а) $y = x^2 + 2x - 8$;   б) $y = -3x^2 + 10x - 3$;

в) $y = x^2 - 4x + 4$;   г) $y = -2x^2 + 3x - 7$.

3.123. Найдите значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения:

а) $y = (x - 1)^2 - 9$; б) $y = (x + 9)(3 - 2x)$;

в) $y = x^2 - 4$; г) $y = x(5 - x)$.

3.124. Приведите пример квадратичной функции, принимающей отрицательные значения только на: а) промежутке $(-5; 5)$; б) промежутках $(-\infty; 4)$ и $(7; +\infty)$.

3.125. Постройте график квадратичной функции $y = -x^2 + 2x$. Найдите: а) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения; б) промежуток, на котором функция возрастает.

3.126. Постройте график квадратичной функции $y = \frac{1}{2}x^2 - x - 4$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.127. Постройте график квадратичной функции $y = -(x - 5)^2 + 1$ и назовите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наибольшее значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции.

3.128. Найдите значение числа m, при котором функция $y = 2x^2 - 3x + m$ принимает только положительные значения.

3.129. Выполните действия: $1\frac{5}{36} + 0{,}07 : (0{,}85 \cdot 0{,}4 - 0{,}4)$.

3.130. Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^{13} \cdot (5^{10})^2}{5^{31}}$; б) $\frac{12^8}{27^2 \cdot 2^{15}}$.

3.131. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{14}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{11}{5 - \sqrt{3}}$.

3.132. Решите неравенство $(0{,}2x - 3)^2 \geqslant (0{,}1x + 6)(0{,}4x - 1)$.

3.133. Магазин закупил на оптовой базе 100 кг слив по цене 3 р. за килограмм. Во время сортировки выяснилось, что 10 % ягод потеряли товарный вид. Какую минимальную розничную цену должен установить магазин на сливы, чтобы получить не менее 20 % прибыли?

§ 15. Квадратные неравенства

3.134. Решите неравенство:

а) $2x - 6 \leqslant 0$; б) $-7x - 4 > 2$; в) $8 + 2{,}5x > 0$.

3.135. При каком значении аргумента значения функции $y = 2x - 6$:

а) положительны; б) отрицательны; в) неположительны?

3.136. Если для значений аргумента из некоторого интервала функция принимает только положительные значения, то:
а) график функции на этом интервале расположен выше оси абсцисс;
б) график функции на этом интервале расположен правее оси ординат;
в) положение графика нельзя определить.
Выберите правильный ответ.

Рассмотрим задачу. Государственное предприятие «Бобруйский завод биотехнологий» производит гель для рук «Чистые ручки», максимальное суточное производство 3500 л. Когда производится x сотен литров геля в день, себестоимость продукции рассчитывается по формуле $C(x) = 0{,}3x^2 - 12x + 640$. Определите объем производства геля, при котором его себестоимость не превышала бы 550 р. за 100 литров.

Так как каждому значению аргумента x, не превышающему 3500 л, соответствует значение $C(x)$, а по условию требуется найти такие значения x, при которых себестоимость не превышает 550 р. за 100 литров, то нужно решить неравенство $C(x) \leqslant 550$, или $0{,}3x^2 - 12x + 640 \leqslant 550$, или $0{,}3x^2 - 12x + 90 \leqslant 0$. Полученное неравенство — **квадратное**.

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $a \neq 0$, называются **квадратными.**

Для того чтобы найти значения переменной, при которых трехчлен $ax^2 + bx + c$ принимает положительные, отрицательные, неположительные или неотрицательные значения, т. е. решить квадратное неравенство, можно использовать свойства функции $y = ax^2 + bx + c$.

Квадратные неравенства

$3x^2 - 10x + 3 > 0$
$x^2 - 5 < 0$
$x^2 + 6x \geqslant 0$
$4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$

Для решения квадратного неравенства достаточно построить схему графика функции $y = ax^2 + bx + c$, определив ее нули.

Рассмотрим примеры решения квадратных неравенств.

Решим неравенство $2x^2 - 5x + 3 > 0$. Для решения неравенства достаточно знать расположение точек графика квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс. Поэтому найдем нули функции: $2x^2 - 5x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}5$. Отметим их на оси абсцисс.

Определим направление ветвей параболы: $a = 2 > 0$ — ветви направлены вверх.

Построим схему графика функции и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит выше оси абсцисс, т. е. $2x^2 - 5x + 3 > 0$ (рис. 78). Получим решение неравенства:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (1{,}5; +\infty)$.

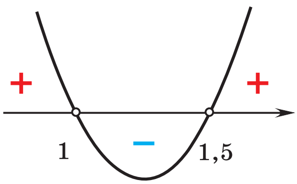


Рис. 78

Решим неравенство $-2x^2 + 5x - 3 > 0$. Умножим обе части неравенства на -1 и получим равносильное неравенство $2x^2 - 5x + 3 < 0$.

Используем схему графика функции $y = 2x^2 - 5x + 3$ и определим, при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс (см. рис. 78). Решением неравенства $2x^2 - 5x + 3 < 0$ является интервал $(1; 1{,}5)$.

Ответ: $x \in (1; 1{,}5)$.

Для решения неравенства $-x^2 + 3x - 4 > 0$ умножим обе его части на -1, получим равносильное неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$. Построим схему графика функции $y = x^2 - 3x + 4$ и определим, при каких значениях аргумента значения функции $y = x^2 - 3x + 4$ отрицательны, т. е. при каких значениях аргумента парабола лежит ниже оси абсцисс. Ветви параболы направлены вверх. Дискриминант уравнения $x^2 - 3x + 4 = 0$

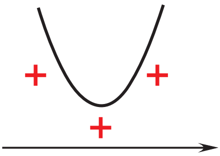


Рис. 79

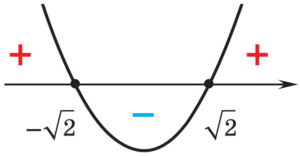


Рис. 80

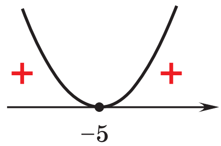


Рис. 81

отрицательный, значит, график функции не пересекает ось абсцисс (рис. 79), парабола лежит выше нее и при всех значениях аргумента значения функции положительны. Таким образом, неравенство $x^2 - 3x + 4 < 0$ не имеет решений.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Решим неравенство $3x^2 - 6 \geqslant 0$. Построим схему графика функции $y = 3x^2 - 6$. Нули функции: $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$, ветви параболы направлены вверх. Парабола (рис. 80) лежит не ниже оси абсцисс при $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$. Значит, объединение этих числовых лучей является решением неравенства.

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

Решим неравенство $(x+5)^2 \leqslant 0$. Построим схему графика функции $y = (x+5)^2$.

Нуль функции $x = -5$, ветви параболы направлены вверх (рис. 81). Неравенству $(x+5)^2 \leqslant 0$ удовлетворяет только одно значение переменной $x = -5$.

Ответ: $x \in \{-5\}$.

Таким образом, для того чтобы решить квадратное неравенство, достаточно построить схему графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ (рис. 82) и в соответствии со знаком неравенства проанализировать расположение графика этой функции относительно оси абсцисс.

Если в квадратном неравенстве первый коэффициент отрицательный, то, умножив обе части неравенства на –1, можно перейти к равносильному неравенству.

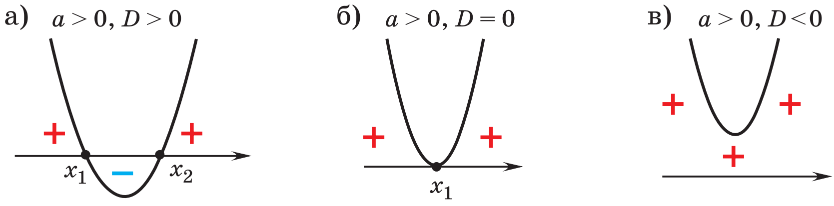


Рис. 82

Чтобы решить квадратное неравенство, можно:

① Построить схему графика функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

② В соответствии со знаком неравенства определить значения переменной x, удовлетворяющие неравенству.

③ Записать ответ.

Решите неравенство

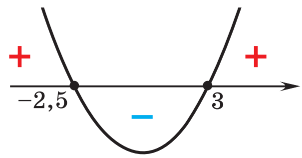
$$2x^2 - x - 15 \leqslant 0.$$

① Нули функции

$$y = 2x^2 - x - 15:$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -2{,}5.$$

Ветви параболы направлены вверх ($a = 2 > 0$).



② Отрицательные значения функция $y = 2x^2 - x - 15$ принимает между нулями. Так как данное неравенство нестрогое, решением неравенства является отрезок $[-2{,}5;\ 3]$.

③ *Ответ*: $x \in [-2{,}5;\ 3]$.

Решение квадратных неравенств

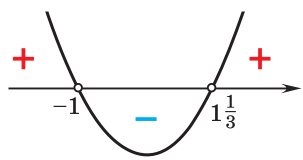
1. Используя алгоритм, решите неравенство $-3x^2 + x + 4 < 0$.

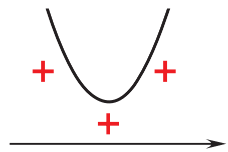
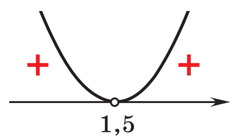
Умножим обе части неравенства на -1, получим равносильное неравенство $3x^2 - x - 4 > 0$.

① Найдем нули функции $y = 3x^2 - x - 4$:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

Ветви параболы направлены вверх ($a = 3 > 0$).



	② Положительные значения функция $y = 3x^2 - x - 4$ принимает левее меньшего корня или правее большего. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(1\frac{1}{3}; +\infty\right)$.
2. Решите неравенство: а) $x^2 + 3 > 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 > 0$.	а) ① Уравнение $x^2 + 3 = 0$ не имеет корней, т. е. функция $y = x^2 + 3$ не имеет нулей. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция $y = x^2 + 3$ принимает при всех значениях аргумента. ③ *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$. б) ① Найдем нули функции $y = 4x^2 - 12x + 9$. $4x^2 - 12x + 9 = 0$; $(2x - 3)^2 = 0$; $x = 1{,}5$. Ветви параболы направлены вверх.  ② Положительные значения функция принимает при всех значениях x, кроме $x = 1{,}5$. ③ *Ответ*: $x \in (-\infty; 1{,}5) \cup (1{,}5; +\infty)$.

1. Если парабола $y = ax^2 + bx + c$ расположена выше оси абсцисс, то неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$:
а) имеет одно решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

2. Если ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ может:
а) иметь одно решение;
б) не иметь решений;
в) иметь бесконечно много решений.
Выберите правильный ответ.

3.137. Пользуясь определением квадратного неравенства, из данных неравенств выберите квадратные:

а) $8x^2 + 5x - 4 \leqslant 0$; б) $-3x^2 + 9x - 1 > 0$;
в) $x^2 + 7 \geqslant 0$; г) $6x + 25 \leqslant 0$;
д) $-10x^2 + 7x < 0$; е) $18 - x > 0$.

Приведите по два примера строгих и нестрогих квадратных неравенств.

3.138. На рисунке 83 изображен график функции $y = x^2 - x - 12$. Решите неравенство:

а) $x^2 - x - 12 > 0$;
б) $x^2 - x - 12 \geqslant 0$;
в) $x^2 - x - 12 < 0$;
г) $x^2 - x - 12 \leqslant 0$.

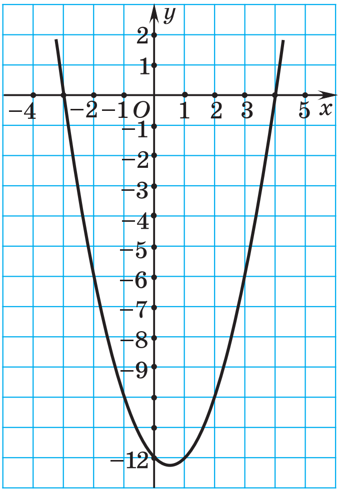


Рис. 83

3.139. Используя схему графика функции $y = x^2 + 6x$, изображенную на рисунке 84, решите неравенство:

а) $x^2 + 6x > 0$; б) $x^2 + 6x \geqslant 0$;
в) $x^2 + 6x < 0$; г) $x^2 + 6x \leqslant 0$.

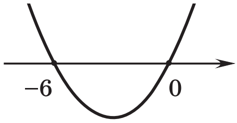


Рис. 84

3.140. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 5x - 6 > 0$;
б) $x^2 + 2x - 8 < 0$;

в) $6x^2 + x \geqslant 0$; г) $x^2 - 25 \leqslant 0$;
д) $x^2 - 14x + 49 > 0$; е) $9x^2 - 30x + 25 < 0$;
ж) $4x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$; з) $x^2 - x + \frac{1}{4} \leqslant 0$;
и) $2x^2 - 7x + 7 > 0$; к) $5x^2 - x + 7 < 0$;
л) $8x^2 - 3x + 5 \geqslant 0$; м) $3x^2 - 2x + 9 \leqslant 0$.

3.141. Решите квадратное неравенство:

а) $-3x^2 + 5x + 8 \geqslant 0$; б) $-x^2 + 6x - 8 < 0$;
в) $-5x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$; г) $-x^2 - 6x - 9 < 0$.

3.142. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого являются все числа.

3.143. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 9 > 0$; б) $4 - x^2 > 0$; в) $-x^2 + 15 \leqslant 0$;
г) $x^2 + 9 > 0$; д) $-2x^2 - 7 \geqslant 0$; е) $8x^2 - 2 > 0$;
ж) $5x^2 \leqslant 0$; з) $-7x^2 < 0$; и) $-3x^2 \leqslant 0$.

3.144. Найдите все значения переменной, при которых двучлен:

а) $-x^2 + 16$ принимает неположительные значения;
б) $-5x^2 - 8$ принимает отрицательные значения.

3.145. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 5x < 0$; б) $x^2 + x \geqslant 0$; в) $8x - x^2 > 0$;
г) $x - x^2 \leqslant 0$; д) $2x^2 - 18x \geqslant 0$; е) $0{,}3x + 9x^2 \leqslant 0$;
ж) $3x - 5x^2 < 0$; з) $x - 9x^2 \geqslant 0$; и) $2x - 0{,}1x^2 > 0$.

3.146. Найдите все целые решения неравенства:

а) $x^2 + 3x \leqslant 0$; б) $5x^2 + x - 4 \leqslant 0$;
в) $13 - x^2 > 0$; г) $3 + x - 0{,}25x^2 > 0$.

3.147. Найдите все значения аргумента, при которых функция:

а) $y = -3x^2 + 7x - 4$ принимает отрицательные значения;
б) $y = 5x - x^2 - 4$ принимает неотрицательные значения;
в) $y = 9x - 2x^2$ принимает положительные значения.

3.148. Приведите пример квадратного неравенства, решением которого является:

а) промежуток $[-3; 3]$; б) число 8.

3.149. Решите неравенство:

а) $-10x^2 \leqslant -9x - 1$; б) $x^2 > 4$; в) $x^2 \geqslant -6x$;
г) $4x^2 + 1 > 4x$; д) $3x + 2 \leqslant 2x^2$; е) $2x^2 \geqslant 14$;
ж) $3x + 6 < -4x^2$; з) $x \geqslant x^2$; и) $-x \leqslant 3x^2$.

3.150. Найдите значения переменной, при которых значения трехчлена:

а) $4x^2 + 3x + 5$ не превосходят 6;
б) $\frac{1}{3}x^2 - x + 8$ больше 8;
в) $-3x^2 + 8x + 6$ не меньше $-\frac{2}{3}$.

3.151. Решите неравенство:

а) $x^2 - 2x - 5 < 0$; б) $-6x^2 \leqslant x - 3$;
в) $2x^2 - 3 > 4x$; г) $8x + 3 \geqslant x^2$.

3.152. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{2 + x - x^2}$; б) $\sqrt{8x^2 - x}$;
в) $\sqrt{45 - 9x^2}$; г) $\sqrt{5x - 2x^2 - 2}$.

3.153. Приведите два примера квадратных неравенств, не имеющих решений.

3.154. Решите неравенство:

а) $2x^2 + 6x - 1 > x^2 - 2x - 16$;
б) $5x^2 - 12x \leqslant x^2 + 8x - 25$;
в) $12x^2 + 15 \geqslant 11x^2 + 7x - 6$;
г) $2x^2 + 4x - 2 > 5x^2 - 9x + 8$.

3.155. Найдите значения переменной, при которых значения выражения:

а) $3x^2 + 30x + 10$ больше значений выражения $x - x^2 + 3$;
б) $13x^2 - x + 9$ не превосходят значений выражения $7x^2 + 18x - 6$.

3.156. Решите неравенство:

а) $(x + 3)^2 > 4$; б) $(2x - 1)^2 \leqslant 9$;
в) $36 < (x - 6)^2$; г) $(3x + 2)^2 \geqslant 25$.

3.157. На дачном участке планируется построить одноэтажный дом прямоугольной формы, длина которого на 6 м больше ширины. Найдите, какую ширину должен иметь дом, чтобы его площадь была не менее 72 м^2.

3.158. Выполните необходимые тождественные преобразования и решите неравенство:

а) $2x(x-1) < 3(x+1)$; б) $x(x+1) \geqslant 2(1-2x-x^2)$;
в) $(x-8)(x+5) \geqslant -40$; г) $(x-1)(2x+3) < 3$;
д) $(x-8)(x+2) \leqslant -6x$; е) $(2-x)(3x+1) < 5x-1$.

3.159. Выясните, существуют ли такие значения аргумента, при которых функция $y = x^2 - 12x + 40$ принимает значения меньше 5.

3.160. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $(3x+1)(5x-2) \leqslant 12x^2 + 7x + 1$;
б) $(4x-1)(x+7) < 2x^2 + 29x - 3$;
в) $(x+4)(2x-3) \geqslant (5x-6)(x-3) + 10$;
г) $(x-4)(3x+1) - (2x-6)(x-2) < 4$.

3.161. Траектория ядра, которое толкнул спортсмен под углом к горизонту при сдаче юниорского норматива, есть парабола (рис. 85), уравнение которой $y = -x^2 + 3x + 1{,}2$, где x — это время движения ядра (в секундах), а y — высота его подъема (в метрах) относительно земли. Определите:

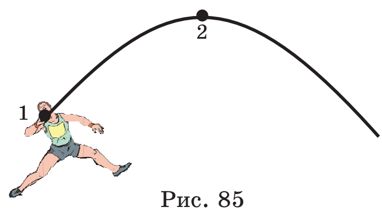


Рис. 85

а) сдал ли он норматив, который составляет 7 м;
б) сколько времени ядро находилось на высоте, меньшей, чем в положении *2*, но большей, чем в положении *1*.

Знаете ли вы, что победителем II Игр стран СНГ в толкании ядра стал Анатолий Хомич?

Используя различные источники информации, найдите сведения о белорусских олимпийских чемпионах.

3.162. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $5(x-1)^2 \leqslant 5 - 6x$; б) $(x+1)^2 - 14 > 5(1+x)$;
в) $(x-2)^2 \geqslant 1 - (x-1)^2$; г) $(x+2)^2 + 13x < (3x-1)^2$;
д) $2(2x+1) - (x-1)(x+1) \geqslant 2(x+1)^2$;
е) $(5x+1)^2 + (1-5x)(5x+1) > 2(x^2+1)$.

3.163. Найдите значения переменной, при которых:

а) значения квадрата двучлена $x + 1$ меньше значений квадрата двучлена $2x - 1$;
б) значения квадрата двучлена $3x - 5$ не превосходят значений квадрата двучлена $x + 7$.

3.164. Докажите, что при всех значениях переменной верно неравенство $-3x^2 + x \leqslant \frac{1}{3}$.

3.165. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{10} + 2 \leqslant \frac{9x}{10}$;
б) $\frac{x^2}{3} \geqslant \frac{3x+3}{4}$;
в) $\frac{x^2+2}{14} > \frac{x^2-23}{4}$;
г) $\frac{x^2}{3} - \frac{3x-5}{4} < \frac{2x}{3}$;
д) $\frac{x^2+2}{6} - \frac{3x-1}{8} \leqslant 1$;
е) $2x^2 - \frac{x+1}{2} < \frac{x-3}{3}$.

3.166. Найдите значения аргумента, при которых значения функции:

а) $y = x^2 - 0,25$ больше значений функции $y = \frac{5-2x}{4}$;
б) $y = \frac{x^2}{3}$ не меньше значений функции $y = 2x - 3$.

3.167. Решите неравенство:

а) $\frac{(x-2)^2}{2} < \frac{2x-4}{3}$;
б) $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{4} \leqslant 1 - x$;
в) $\frac{(2x-1)^2}{10} > \frac{(x-1)^2}{5} + \frac{1-x}{2}$;
г) $\frac{(x-1)^2}{2} + 7\frac{2}{3} \geqslant \frac{(x-7)^2}{4} + \frac{x^2-5x}{3}$.

3.168. Найдите значения k, при которых уравнение $x^2 + kx + 9 = 0$ имеет два корня.

3.169. Найдите значения a, при которых уравнение $x^2 + ax + 16 = 0$ не имеет корней.

3.170. Используя схему графика функции $y = x^2 - 25$, изображенную на рисунке 86, решите неравенство:

а) $x^2 - 25 > 0$;
б) $x^2 - 25 \geqslant 0$;
в) $x^2 - 25 < 0$;
г) $x^2 - 25 \leqslant 0$.

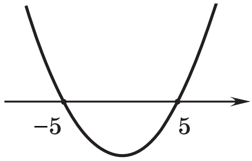


Рис. 86

3.171. Решите квадратное неравенство, используя алгоритм:

а) $x^2 + 6x - 7 \geqslant 0$; б) $x^2 - 3x + 2 < 0$;
в) $x^2 - 7x > 0$; г) $x^2 - 4 \leqslant 0$;
д) $x^2 - 8x + 16 > 0$; е) $9x^2 + 6x + 1 \leqslant 0$;
ж) $8x^2 + 3 \geqslant 0$; з) $3x^2 - x + 9 < 0$.

3.172. Решите квадратное неравенство:

а) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; б) $-x^2 + 4x + 5 < 0$;
в) $x^2 - 1 \geqslant 0$; г) $16 - x^2 > 0$;
д) $3x - 9x^2 > 0$; е) $-2x^2 - 5x + 3 \leqslant 0$;
ж) $7x^2 - x + 1 > 0$; з) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$.

3.173. Найдите все целые решения неравенства:

а) $x^2 - 4x < 0$; б) $x^2 - 5x - 6 \leqslant 0$;
в) $x^2 - 6 < 0$; г) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

3.174. Найдите все значения аргумента, при которых функция:

а) $y = 4 + x^2 - 5x$ принимает положительные значения;
б) $y = 36 - 4x^2$ принимает неотрицательные значения.

3.175. Решите неравенство:

а) $-9x^2 \geqslant -8x - 1$; б) $x^2 < 36$;
в) $x^2 \leqslant 3x$; г) $x^2 + 9 > 6x$;
д) $3x + 7 < -2x^2$; е) $3x^2 \leqslant 15$;
ж) $5x^2 + 1 \geqslant 2x$; з) $7x \leqslant x^2$.

3.176. Решите неравенство:

а) $x^2 + 2x - 7 < 0$; б) $7x - 1 \leqslant 5x^2$.

3.177. Найдите значения переменной, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{10x - 3 - 3x^2}$; б) $\sqrt{5x - 3x^2}$.

3.178. Решите неравенство:

а) $4x^2 - 7x + 7 > 3x^2 - 11x + 52$;
б) $10x^2 + 8x - 2 \leqslant x^2 - 16x - 18$.

3.179. Найдите значения переменной, при которых значения двучлена $6x^2 - 4x$ меньше значений трехчлена $4x^2 + 3x + 9$.

3.180. Решите неравенство:

а) $(x-2)^2 < 1$; б) $(4x-1)^2 \geqslant 9$;
в) $4 > (x+3)^2$; г) $(3x-4)^2 \leqslant 16$.

3.181. Накануне проведения церемонии награждения победителей ежегодного республиканского фестиваля-ярмарки тружеников села «Дожинки» в зале для проведения торжеств расставляют стулья. Число стульев в каждом ряду должно быть на 15 больше, чем число рядов в зале. Найдите максимальное число рядов стульев, которые можно установить, если в зале одновременно можно разместить не более 250 человек.

3.182. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения неравенства:

а) $2(2x^2-7) < -8x-9$; б) $x(x-4) \leqslant 2x-8$;
в) $(x+5)(x-7) \leqslant -35$; г) $(x-8)(x+3) < 1-5x$.

3.183. Решите неравенство:

а) $(x+3)(x-2) \leqslant 6-x^2-x$;
б) $2x(3x+1) > (3x-1)(x+3)$.

3.184. Примените формулы сокращенного умножения и решите неравенство:

а) $(x+4)^2 \geqslant 6x+40$;
б) $(2x+1)^2+2 \leqslant 2(x-3x^2)$;
в) $(3x+1)^2+33 > (2x+5)^2$;
г) $(x-1)(x+1) > x^2+4-(x-5)^2$.

3.185. Найдите значения переменной, при которых значение квадрата двучлена $3x-2$ не превосходит значений выражения $3x^2-10x+8$.

3.186. Докажите, что не существует таких значений переменной, при которых выполняется неравенство $-5x^2+2x > \frac{1}{5}$.

3.187. Решите неравенство:

а) $\frac{x^2}{2} \leqslant \frac{11x-4}{5}$; б) $\frac{x-1}{3}+\frac{x^2}{5} \geqslant \frac{7}{15}$;

в) $\frac{x^2-5}{2}-\frac{x-8}{5} < 3$; г) $\frac{x^2+6x}{12}-\frac{2x+3}{4} > 6$.

3.188. Найдите значения аргумента, при которых значения функции $y = x^2+2x$ не превосходят значений функции $y = \frac{7x+3}{4}$.

3.189. Решите неравенство:

а) $\frac{(x+2)(x+3)}{15} - \frac{x-1}{3} > \frac{x+3}{5}$; б) $\frac{(2x-5)^2}{8} \geqslant 5 - 3x$;

в) $\frac{3-x^2}{4} - \frac{x}{3} \geqslant \frac{(x-3)^2}{12}$; г) $\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{3x+1}{6} > \frac{(x+1)^2}{3}$.

3.190. Найдите такие значения a, при которых уравнение $2x^2 + ax + 2 = 0$ имеет два различных корня.

3.191. Найдите значение выражения $\frac{\text{НОК}(25, 40)}{\text{НОД}(25, 40)}$.

3.192. Вычислите:

а) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$; б) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

3.193. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + \frac{1}{2}y = -3, \\ -4x - \frac{3}{4}y = 1. \end{cases}$

3.194. По кольцевому маршруту курсировали два автобуса с интервалом 50 мин. В связи с введением в эксплуатацию нового жилого района на маршрут планируется вывести еще три автобуса. Каким станет интервал движения после увеличения числа автобусов на маршруте? На сколько процентов сократится интервал движения?

3.195. Разложите на множители:

а) $y^3 - 49y$; б) $-3a^2 - 6ab - 3b^2$;

в) $(a-6)^2 - 9a^2$; г) $c^2 - b^2 - c + b$.

3.196. Выполните действия:

а) $(3\sqrt{2} - 2)(4\sqrt{2} + 7) - 13\sqrt{2}$; б) $(3\sqrt{2} + 2)^2 + (6 - \sqrt{2})^2$.

3.197. По данным Белстата, численность населения Беларуси на 1 января 2024 г. составляла около 9 156 000 чел., а ее площадь приблизительно равна 207 600 км^2. Найдите плотность населения Беларуси (число жителей, приходящееся на 1 км^2 территории). С помощью справочной литературы найдите информацию о плотности населения в каждой области Беларуси. Представьте полученные результаты в виде столбчатой диаграммы.

§ 16. Системы и совокупности квадратных неравенств

3.198. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} -2(x-2{,}5)>0, \\ 2x-(2-x)\leqslant 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x-2{,}6\leqslant 0, \\ x-2(1-3x)\leqslant 0. \end{cases}$

3.199. Найдите решение совокупности неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\leqslant -15, \\ 2(x-3)>8; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 3x-4\geqslant -15, \\ 2(x-3)<8. \end{array}\right.$

Рассмотрим решение нескольких задач.

Задача 1. Площадь участка для планируемой детской площадки должна быть не меньше 39 м^2 и не больше 144 м^2. Каковы размеры участка, если его длина на 10 м больше ширины?

Решение. Обозначим ширину площадки через x м, тогда ее длина $(x+10)$ м, а площадь $x(x+10)$ м^2. По условию задачи одновременно должны выполняться два условия: $x(x+10)\geqslant 39$ и $x(x+10)\leqslant 144$. Объединим эти условия в систему $\begin{cases} x(x+10)\geqslant 39, \\ x(x+10)\leqslant 144. \end{cases}$

Решим каждое неравенство системы:

1) $x(x+10)\geqslant 39$; $x^2+10x-39\geqslant 0$;

$x_1=-13$, $x_2=3$; $x\in(-\infty;-13]\cup[3;+\infty)$;

2) $x(x+10)\leqslant 144$; $x^2+10x-144\leqslant 0$;

$x_1=-18$, $x_2=8$; $x\in[-18;8]$.

Найдем пересечения множеств решений первого и второго неравенств (рис. 87). Решением системы неравенств является объединение отрезков $[-18;-13]\cup[3;8]$.

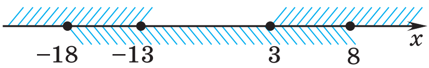


Рис. 87

Условию задачи удовлетворяют только положительные значения x, т. е. $x\in[3;8]$.

Ответ: ширина площадки может изменяться от 3 до 8 м, а соответствующие значения длины — от 13 до 18 м.

Задача 2. При планировании зала для конференций, рассчитанного не более чем на 360 мест, проектной организации нужно было учесть следующие условия: количество рядов должно быть или на два меньше, чем количество мест в ряду, или на 9 больше. Какое количество рядов может быть в зале, если их должно быть не меньше 10?

Решение. Обозначим количество рядов в зале через x. По первому условию получим $x(x+2) \leqslant 360$, по второму условию — $x(x-9) \leqslant 360$. Так как должно выполняться либо первое, либо второе условие, то объединим оба условия в совокупность $\left[\begin{array}{l} x(x+2) \leqslant 360, \\ x(x-9) \leqslant 360. \end{array}\right.$ Решим каждое неравенство совокупности:

1) $x(x+2) \leqslant 360$; $x^2 + 2x - 360 \leqslant 0$;
$x_1 = -20$, $x_2 = 18$; $x \in [-20; 18]$;
2) $x(x-9) \leqslant 360$; $x^2 - 9x - 360 \leqslant 0$;
$x_1 = -15$, $x_2 = 24$; $x \in [-15; 24]$.

Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств (рис. 88). Решением совокупности неравенств является отрезок $x \in [-20; 24]$.

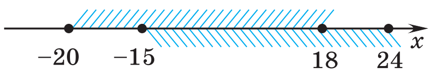


Рис. 88

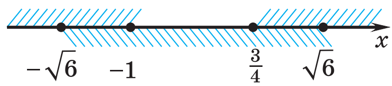
По условию задачи число рядов должно быть не меньше 10, количество рядов является натуральным числом. Тогда $x \in \{10, 11, ..., 24\}$.

Ответ: $x \in \{10, 11, ..., 24\}$.

Системы квадратных неравенств	
1. Решите систему неравенств $\begin{cases} 4x^2 \geqslant -(x-3), \\ x^2 \leqslant 6. \end{cases}$	Решим каждое неравенство системы: 1) $4x^2 \geqslant -(x-3)$; $4x^2 + x - 3 \geqslant 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{3}{4}$ — нули функции $y = 4x^2 + x - 3$. Решением неравенства $4x^2 \geqslant -(x-3)$ является объединение промежутков $(-\infty; -1] \cup \left[\frac{3}{4}; +\infty\right)$. 2) $x^2 \leqslant 6$; $x^2 - 6 \leqslant 0$; $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$ — нули функции $y = x^2 - 6$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Решением неравенства $x^2 - 6 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{6};\ \sqrt{6}\right]$.

Найдем пересечение множеств решений неравенств системы.



Решение системы неравенств:
$\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$.

Ответ: $\left[-\sqrt{6};\ -1\right] \cup \left[\frac{3}{4};\ \sqrt{6}\right]$.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">**Совокупности неравенств**</td>
</tr>
<tr>
<td>**2.** Найдите решение совокупности неравенств
$\left[\begin{array}{l} 3x^2 \leqslant 9, \\ 4x^2 > 2{,}56. \end{array}\right.$</td>
<td>Решим каждое неравенство совокупности:

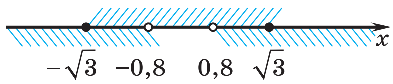
1) $3x^2 \leqslant 9$; $x^2 \leqslant 3$; $x^2 - 3 \leqslant 0$.

Нули функции $y = x^2 - 3$:
$x_1 = -\sqrt{3}$; $x_2 = \sqrt{3}$.

Решением неравенства
$x^2 - 3 \leqslant 0$ является отрезок $\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

2) $4x^2 > 2{,}56$; $x^2 > 0{,}64$;
$x^2 - 0{,}64 > 0$.

Нули функции $y = x^2 - 0{,}64$: $x_1 = -0{,}8$; $x_2 = 0{,}8$. Решением неравенства $x^2 - 0{,}64 > 0$ является объединение промежутков:
$(-\infty;\ -0{,}8) \cup (0{,}8;\ +\infty)$.</td>
</tr>
</table>

	Найдем объединение множеств решений первого и второго неравенств.  Объединением множеств является вся числовая прямая. *Ответ*: $x \in \boldsymbol{R}$.

1. Может ли решением системы квадратных неравенств быть пустое множество?

2. Может ли решением системы квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3. Может ли решением совокупности квадратных неравенств быть множество, состоящее из одного числа?

3.200. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x - 5 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 20 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x - 18 \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 \leqslant 0, \\ x^2 + 8x + 12 < 0. \end{cases}$

3.201. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x$ принимает отрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 2x + 3$ принимает неотрицательные значения.

3.202. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - x - 4 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 5x + 2 \geqslant 0, \\ x - 1 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x^2 + 5x - 6 > 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ 4 - 5x > 0. \end{cases}$

3.203. Найдите все значения аргумента, при которых и функция $y = 2x^2 + 9x + 4$, и функция $y = 6 - 5x$ принимают неотрицательные значения.

3.204. Найдите наименьшее целое решение системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 8x \leqslant 0, \\ x^2 + 3x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 25 > 0, \\ x^2 - 49 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - 6x \leqslant 0, \\ 4x^2 - 9 > 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 - 5 \leqslant 0, \\ x^2 + x \geqslant 0. \end{cases}$

3.205. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -x^2$ расположен выше прямой $y = -9$ и ниже прямой $y = -1$.

3.206. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 2x - 24 \leqslant 0, \\ x^2 \geqslant 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + x - 3 \leqslant 0, \\ -x^2 < 2x. \end{cases}$

3.207. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + 3x + 4} + \sqrt{2 - x}$; б) $\sqrt{36 - x^2} - \sqrt{2x - 12}$.

3.208. В лекционной аудитории число рядов на 8 больше, чем число мест в одном ряду, при этом общее число мест в аудитории не превосходит 105, а число рядов не меньше 9. Каково наибольшее возможное число рядов в этой аудитории?

3.209. Найдите число целых решений системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 4x - 5 < 0, \\ \dfrac{x-1}{4} > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} + \dfrac{x+2}{6} < 1, \\ 9 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.210. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} -2x + 3 \geqslant 3(x + 2), \\ -x^2 - 4x > 0. \end{cases}$

3.211. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 \leqslant x^2 + 8x < 9$; б) $3 < x^2 - 8x + 23 \leqslant 16$;

в) $2x < x^2 - 24 < 10x$; г) $2x - 1 < x^2 \leqslant 4x - 3$.

3.212. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases}(x+2)^2 \leqslant (2x-3)^2 - 8(x-5), \\ x^2 - x - 42 < 0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x-2)^2 < (2x+3)^2 - 8(x+5), \\ x^2 + x - 42 \leqslant 0.\end{cases}$

3.213. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 8 > 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 35 \geqslant 0, \\ x^2 + 10x + 9 > 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x \geqslant 0, \\ x^2 - x - 6 < 0; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2 > 25, \\ x^2 - 6x + 5 \leqslant 0. \end{array}\right.$

3.214. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = x^2 - x$ расположен выше прямой $y = 20$ или ниже прямой $y = 12$.

3.215. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 6 \geqslant 0, \\ x^2 + 2x + 7 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 < 0, \\ 2x^2 + x + 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

3.216. Для прохождения практики студент может выбрать любой из двух графиков: число дней в неделю на 1 меньше, чем число часов работы в один день, или число часов работы на 1 меньше, чем число рабочих дней в неделю. Число рабочих часов должно быть не меньше 30. Сколько рабочих дней может быть у студента на практике?

3.217. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 7x - 8 \geqslant 0, \\ x < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 + 5x - 3 \leqslant 0, \\ 3 - x > 0; \end{array}\right.$

в) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 12x \leqslant 0, \\ 15 - 3x > 0; \end{array}\right.$ г) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \geqslant 0, \\ 1 - 2x \leqslant 0. \end{array}\right.$

3.218. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 5x - 24 > 0, \\ x^2 - 5x - 36 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x - 10 > 0. \end{cases}$

3.219. Найдите все значения аргумента, при которых функция $y = x^2 + x - 6$ принимает неотрицательные значения, а функция $y = -x^2 + 4x$ — положительные значения.

3.220. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 < 0, \\ x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 0. \end{cases}$

3.221. Найдите наименьшее и наибольшее целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 6x > 0, \\ x^2 - 2x \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 36 < 0, \\ 9x^2 - 1 \geqslant 0. \end{cases}$

3.222. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = 2x^2$ расположен выше прямой $y = 8$ и ниже прямой $y = 18$.

3.223. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 2x - 15 \geqslant 0, \\ x^2 \leqslant 25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x^2 - 9x + 4 \geqslant 0, \\ -x^2 > -4x. \end{cases}$

3.224. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{-x^2 + x + 2} + \sqrt{1 - x}$; б) $\sqrt{25 - x^2} - \sqrt{2x - 10}$.

3.225. Учащиеся 9-х классов решили принять участие в республиканской новогодней благотворительной акции «Наши дети» и подготовили подарки. При этом они заметили, что если подарков будет столько же, сколько конфет в каждом подарке, то число всех конфет не превысит 400, а если конфет в каждом подарке будет на 10 меньше, чем подарков, то число конфет не превысит 144. Каково максимально возможное число подарков?

3.226. Найдите наибольшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} 2(1 - x) < 7x + 5, \\ 4 - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$

3.227. Решите двойное неравенство, заменив его системой неравенств:

а) $0 < x^2 - 6x \leqslant 7$; б) $x + 2 < x^2 \leqslant 16$.

3.228. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 \leqslant 0, \\ x^2 - 11x + 28 < 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4 \leqslant 0, \\ 2x^2 - 5x + 3 > 0. \end{array}\right.$

3.229. Найдите все значения аргумента, при которых график функции $y = -3x^2$ расположен выше прямой $y = -3$ или ниже прямой $y = -12$.

3.230. Решите совокупность квадратных неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x^2 - x + 3 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 \leqslant 0, \\ x^2 + 3x + 7 > 0. \end{array}\right.$

3.231. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 4x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x + 2 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 36 \leqslant 0, \\ 5 - 2x > 0. \end{array}\right.$

3.232. Вычислите:

а) $\sqrt{1\frac{24}{25}} - \frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}$; б) $\frac{3\sqrt{6{,}25} - 2\sqrt{3{,}24}}{\sqrt{900}}$.

3.233. Сравните значения выражений $a^{-3} - b^{-3}$ и $(a - b)^{-3}$ при $a = 0{,}5$; $b = 0{,}25$.

3.234. Разложите на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 + 7x - 18$; б) $5x^2 - 14x - 3$; в) $-25x^2 + 10x - 1$.

3.235. Готовясь к олимпиаде по математике, до которой оставалось 17 дней, восьмиклассник запланировал решать в каждый из оставшихся дней одинаковое количество задач. Решение задач так его увлекло, что он решал ежедневно на 5 задач больше, чем намечал по плану, и поэтому за 5 дней до начала олимпиады попросил у учителя дополнительное задание для подготовки. Сколько задач решал восьмиклассник ежедневно?

3.236. Функция задана формулой $y = -8$. Выберите все верные утверждения:

а) график функции проходит через точку $A(100; -8)$; б) функция не имеет нулей; в) график функции проходит через начало координат; г) график функции симметричен относительно оси ординат; д) график функции не пересекает ось абсцисс.

3.237. Выполните замену переменной и решите уравнение $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

• уметь определять квадратичную функцию в различных формах ее записи;

• уметь находить:
нули квадратичной функции;
промежутки монотонности квадратичной функции;
промежутки знакопостоянства квадратичной функции;
наибольшее или наименьшее значение квадратичной функции;

• знать алгоритм построения графика квадратичной функции и уметь строить параболу по уравнению квадратичной функции, записанному в различных формах;

• знать, какие реальные процессы можно описывать с помощью квадратичной функции;

• знать алгоритм решения квадратных неравенств и уметь решать квадратные неравенства;

• уметь решать системы и совокупности квадратных неравенств.

Я проверяю свои знания

1. Какую функцию называют квадратичной? Из данных функций выберите квадратичные:

а) $y = -x^2 - 8x + 4$; б) $y = x^2 + 2x$; в) $y = -7x^2 - 1$;
г) $y = -4x + 3$; д) $y = -8x^2$; е) $y = x^3 - 4x^2$.

Как называется график квадратичной функции?

2. На рисунке 89 изображен график одной из функций:

а) $y = x - 4$; б) $y = x^2 - 2x - 3$;
в) $y = 3x - 1$; г) $y = -x^2 - x - 3$.

Определите, график какой функции изображен на рисунке.

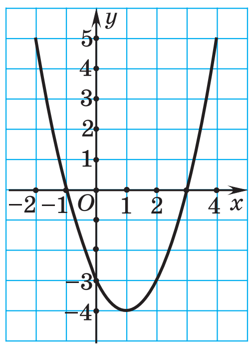


Рис. 89

3. Квадратичная функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 5x - 3$. Найдите:

а) $f(0)$; б) $f(2)$; в) $f(-1)$.

4. Определите направление ветвей и найдите координаты вершины параболы:

а) $y = 4x^2 - 8x + 1$; б) $y = -3(x + 6)^2 + 5$;
в) $y = (x - 6)(x + 2)$; г) $y = -5x^2 + 9$.

5. Решите квадратное неравенство:

а) $x^2 - 11x + 10 \geqslant 0$; б) $4x^2 + 9x + 2 < 0$;

в) $x^2 + x + 6 > 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;

д) $3x^2 - x < 0$; е) $4x^2 - 9 \geqslant 0$.

6. Постройте графики квадратичных функций $f(x) = (x - 4)^2 - 1$, $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$ и $h(x) = (x - 2)(x + 6)$. Для каждой из функций укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) наименьшее (наибольшее) значение функции; г) уравнение оси симметрии параболы; д) нули функции; е) промежутки знакопостоянства функции; ж) промежутки монотонности функции. Можно ли выполнить задания а) — ж) без построения графика?

7. Решите систему квадратных неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 < 0, \\ 6x - x^2 \leqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - x - 12 > 0, \\ x^2 + 3x - 10 \leqslant 0. \end{cases}$

8. Решите совокупность неравенств:

а) $\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 11x - 6 < 0, \\ x + 4 \leqslant 0; \end{array}\right.$ б) $\left[\begin{array}{l} x^2 - 1 \leqslant 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{array}\right.$

9. Фирма производит от 0 до 60 керамических ваз в день. Прибыль в рублях задается функцией $B(x) = -x^2 + 60x - 500$, где x — число ваз.

а) Рассчитайте прибыль при продаже 40 ваз.

б) Найдите число изготовляемых ваз, наиболее выгодное для продажи.

10. Найдите значения числа t, при которых уравнение:

а) $2x^2 - tx + 8 = 0$ имеет два корня;

б) $5x^2 + tx + 3 = 0$ не имеет корней.

Практическая математика

1. Если периметр прямоугольного участка земли равен 100 м, то какова его наибольшая площадь?

2. Велосипедист, выезжая из города со скоростью $v_0 = 12\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$, начинает разгоняться с постоянным ускорением, модуль которого $a = 2\ \frac{\text{км}}{\text{ч}^2}$, достигая скорости $20\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}$. Зависимость пути s (км) велосипедиста от времени t (ч) его движения за городом определяется выражением $s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого велосипедист будет находиться в зоне покрытия сотовой связи, если оператор гарантирует наличие связи в радиусе не более 20 км от города.

3. Мяч брошен вертикально вверх с высоты 1,2 м с начальной скоростью, модуль которой $v_0 = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Зависимость высоты подъема мяча над землей h (м) от времени полета t (с) выражается формулой $h = -5t^2 + 10t + 1{,}2$. На какую максимальную высоту поднимется мяч?

4. Во время учений исследуется запуск ракеты в воду. С помощью камеры отмечается высота h, на которой находится ракета в зависимости от времени t (рис. 90). Предполагается, что зависимость высоты h от времени t задается уравнением $h(t) = -\frac{1}{2}g(t-\alpha)^2 + \beta$, где g — ускорение свободного падения, модуль которого можно считать равным $10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

а) На какой высоте находится ракета через 1 с? Через 3 с?

б) Найдите h в верхней точке траектории.

в) Найдите значения α и β.

г) Какая функция вида $h(t) = at + b$ может моделировать движение для $t > 3$ с?

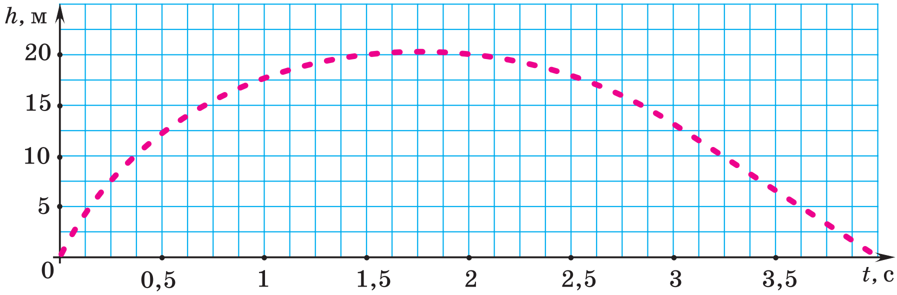


Рис. 90

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание 1. Определите, какие части картинки (рис. 91) соответствуют следующим функциям:

1) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 5,\ x \in [2;\ 8];$

2) $y = -(x-8)^2 + 7,\ x \in [7{,}5;\ 9];$

3) $y = -\frac{1}{3}(x-5)^2 + 9,\ x \in [2;\ 8];$

4) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 7,\ x \in [2;\ 8];$

5) $y = (x-8)^2 + 5,\ x \in [7{,}2;\ 9];$

6) $y = \frac{4}{9}(x-5)^2 + 4,\ x \in [2;\ 8];$

7) $y = \frac{1}{3}(x-5)^2 + 3,\ x \in [2;\ 8].$

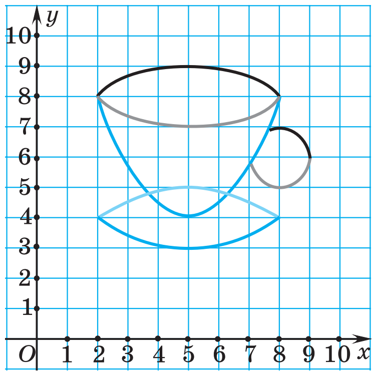


Рис. 91

С помощью графиков постройте свою картинку.

Исследовательское задание 2. Рассмотрим семейство графиков функций $y = -x^2 + kx$, где k может изменяться от –10 до 10 с шагом 1. Отметим вершины парабол красными точками и соединим их плавной линией (рис. 92). Какую гипотезу можно выдвинуть? Почему?

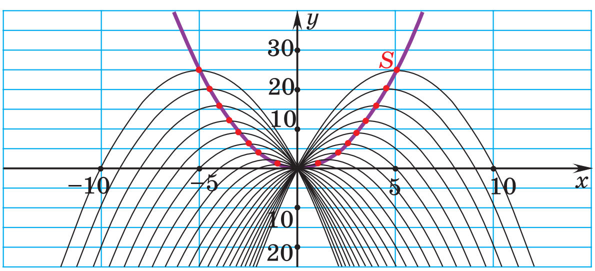


Рис. 92

Готовимся к олимпиадам

1. Участников парада планировали построить так, чтобы в каждом ряду стояло по 24 человека. Однако оказалось, что не все прибывшие смогут участвовать в параде, и их перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше, а число человек в ряду — на 26 больше нового числа рядов. Определите, сколько человек прибыло на парад, зная, что если бы все они участвовали, то их можно было бы перестроить так, чтобы число рядов было равно числу человек в ряду.

2. Известно, что график квадратичной функции $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 2x + p$. Докажите, что все такие квадратичные функции имеют одно и то же наименьшее значение.

Интересно знать. *Фаина Михайловна Кириллова* (29 сентября 1931 г., село Зуевка, Россия) — заслуженный деятель науки Республики Беларусь, член-корреспондент Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор. Ф. М. Кириллова — известный в нашей стране и за ее пределами специалист в теории оптимального управления.

Задачи оптимального управления — это выбор наиболее выгодных режимов управления сложными динамическими объектами. Например, к таким задачам относятся оптимизация траекторий полета самолетов и космических кораблей, улучшение режимов работы роботов, оптимизация ядерных реакторов, выбор программ лечения на основе математических моделей иммунной, сердечно-сосудистой систем.

Глава 4

ФУНКЦИИ $y = \frac{k}{x}$, ГДЕ $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

§ 17. Свойства и график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

4.1. Если 4 снегоуборочные машины расчищают трассу за 2 ч, то за какое время эту же работу выполнят 6 машин такой же мощности?

4.2. С помощью 10 комбайнов агрофирма планировала убрать урожай за 6 дней. Сколько таких же комбайнов надо добавить, чтобы сократить сроки уборочной на 2 дня?

4.3. В туристическом кемпинге для 24 человек сделан запас продовольствия на 9 дней. На сколько дней хватит этого запаса, если в кемпинг прибудет 36 человек?

Многие задачи описывают обратно пропорциональную зависимость между величинами. Если одну из переменных величин обозначить через x, а другую — через y, то формула $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, задает функцию, которая называется **обратной пропорциональностью.**

Обратная пропорциональность

$y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$

Рассмотрим свойства и график этой функции.

1. Область определения функции. Так как дробь $\frac{k}{x}$ имеет смысл при всех значениях x, кроме нуля, то $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графически это означает, что график функции $y = \frac{k}{x}$ не пересекает ось ординат.

2. Множество значений функции. Так как $k \neq 0$, то $\frac{k}{x} \neq 0$, значит, $y \neq 0$, т. е. $E = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Графически это означает, что график функции не пересекает ось абсцисс.

3. Нули функции. Так как $y \neq 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ не имеет нулей.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Если $k > 0$, то $y > 0$ при $x \in (0; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$.

Если $k < 0$, то $y > 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, $y < 0$ при $x \in (0; +\infty)$.

5. График функции. Построим график функции $y = \frac{4}{x}$ $(k = 4 > 0)$. Выберем несколько значений аргумента и составим таблицу значений функции.

x	–4	–2	–1	1	2	4
y	–1	–2	–4	4	2	1

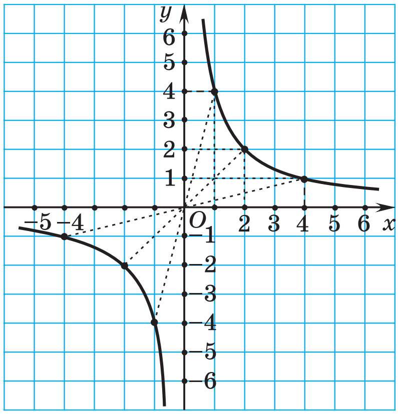


Рис. 93

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 93). График обратной пропорциональности называется **гиперболой** (от. греч. *hyperbole* — переход, избыток, преувеличение). Гипербола имеет две ветви. Ветви гиперболы симметричны относительно начала координат.

Если $k > 0$, то график обратной пропорциональности расположен в первой и третьей координатных четвертях.

Построим график функции $y = -\frac{6}{x}$ $(k = -6 < 0)$.

x	–6	–3	–2	–1	1	2	3	6
y	1	2	3	6	–6	–3	–2	–1

Отметим полученные точки на координатной плоскости и соединим их двумя плавными линиями (рис. 94).

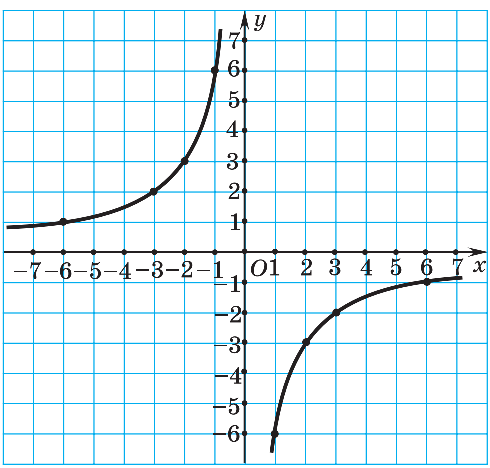


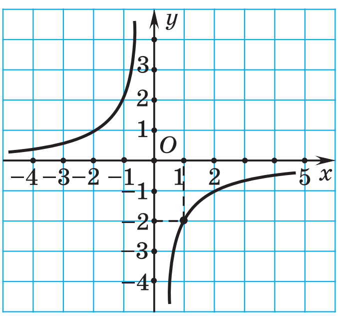
Рис. 94

Если $k < 0$, то график обратной пропорциональности расположен во второй и четвертой координатных четвертях.

6. Промежутки монотонности функции. Если $k > 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции уменьшаются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Если $k < 0$, то с увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, т. е. функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Свойства обратной пропорциональности	
1. Является ли функция обратной пропорциональностью: а) $y = \frac{0,4}{x}$; б) $y = -\frac{1}{x}$; в) $y = \frac{x}{5}$?	а) Так как функция $y = \frac{0,4}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = 0,4$, то она является обратной пропорциональностью. б) Функция $y = -\frac{1}{x}$ имеет вид $y = \frac{k}{x}$, где $k = -1$, значит, она является обратной пропорциональностью. в) Функция $y=\frac{x}{5}$ является линейной $\left(y=kx+b,\ k=\frac{1}{5},\ b = 0\right)$.
2. Какие из следующих функций принимают положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$: $y = \frac{1,8}{x}$; $y = -\frac{5}{x}$; $y = \frac{12}{x}$; $y = -\frac{3}{x}$?	Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, принимает положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$, если $k < 0$. Это условие выполняется для функций $y = -\frac{5}{x}$ и $y = -\frac{3}{x}$.
3. Сравните: а) $f(3,54)$ и $f(4,24)$, если $f(x) = \frac{15}{x}$; б) $g(10,8)$ и $g(12,9)$, если $g(x) = -\frac{29}{x}$.	а) Функция $f(x) = \frac{15}{x}$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$. Так как $3,54 < 4,24$ и $\{3,54; 4,24\} \subset (0; +\infty)$, то $f(3,54) > f(4,24)$.

	б) Функция $g(x) = -\frac{29}{x}$ возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку $10,8 < 12,9$ и $\{10,8; 12,9\} \subset (0; +\infty)$, то $g(10,8) < g(12,9)$.
График обратной пропорциональности	
4. В каких координатных четвертях расположен график функции: а) $f(x) = -\frac{24}{x}$; б) $h(x) = \frac{4,5}{x}$?	а) Если $k < 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен во второй и четвертой координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $f(x) = -\frac{24}{x}$. б) Если $k > 0$, то график функции $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях, значит, в этих четвертях расположен график функции $h(x) = \frac{4,5}{x}$.
5. По графику обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ (рис. 95) определите коэффициент k.  Рис. 95	На гиперболе выберем какую-либо точку и определим ее координаты, например точку $(1; -2)$. Подставим координаты этой точки в уравнение гиперболы $y = \frac{k}{x}$, получим уравнение $-2 = \frac{k}{1}$, откуда $k = -2$.

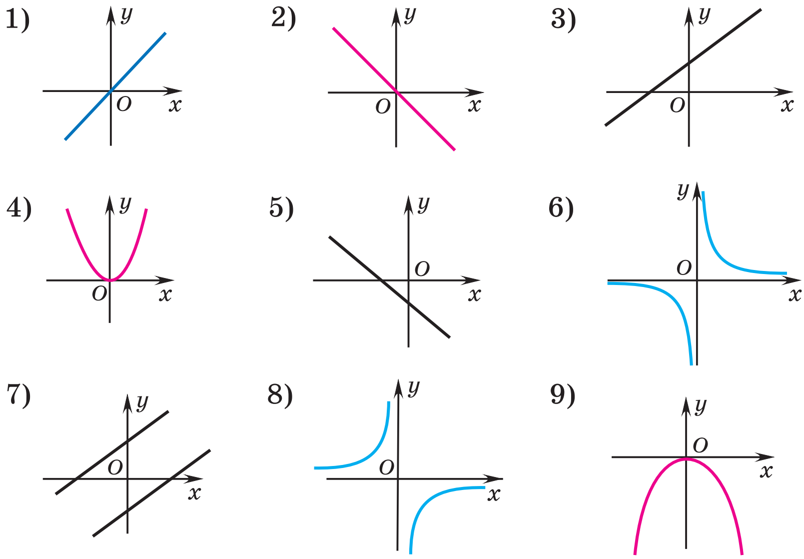


Рис. 96

1. Определите, какие из представленных на рисунке 96 графиков являются гиперболами.

2. Какой из графиков (см. рис. 96) соответствует функции:

а) $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$; б) $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$?

4.4. Выберите функции, графиками которых являются гиперболы:

а) $y = -\frac{11}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = \frac{x}{7}$;

г) $y = \frac{x}{9} - 6$; д) $y = -\frac{1,8}{x}$; е) $y = x^2 + 1$.

4.5. Для обратной пропорциональности $f(x) = -\frac{10}{x}$ найдите:

а) $f(5)$, $f(-2)$ и $f(-20)$;

б) значение аргумента, при котором $f(x) = -4$.

4.6. Выберите точки, принадлежащие графику обратной пропорциональности $y = \frac{45}{x}$:

а) $A(45;\ 1)$; б) $B(-10;\ -4,5)$; в) $C(0,1;\ 4,5)$;

г) $D(-2;\ 22,5)$; д) $E(0,45;\ 100)$; е) $F(2;\ 90)$.

4.7. Для каждой из функций $f(x) = -\frac{2}{x}$; $g(x) = \frac{4,6}{x}$; $h(x) = -\frac{0,3}{x}$ и $p(x) = \frac{39}{x}$ найдите значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения. Приведите пример обратной пропорциональности, принимающей положительные значения при $x \in (0; +\infty)$.

4.8. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{13}{x}$. Сравните:

а) $f(2)$ и $f(3)$; б) $f(-7)$ и $f(-5)$;
в) $f(18,4)$ и $f(18,9)$; г) $f(-56,29)$ и $f(-67,48)$.

4.9. Дана функция $g(x) = \frac{29}{x}$. Расположите в порядке убывания:
а) $g(13)$; $g(23)$; $g(38)$; б) $g(-6,49)$; $g(-6,52)$; $g(-6,78)$.

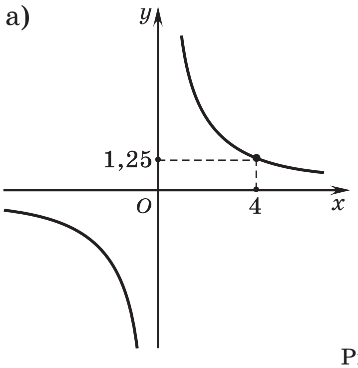
4.10. Для перевозки различных грузов используют самосвалы МАЗ-650126 различной грузоподъемности, которая зависит от модификации машины. (Грузоподъемность — максимальная масса груза, на перевозку которого рассчитано данное транспортное средство.) Требуется перевезти груз массой 250 т. Установите зависимость между грузоподъемностью машины (m) и числом машин одинаковой грузоподъемности (n), необходимых для перевозки этого груза.

4.11. Обратная пропорциональность задана формулой $y = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k, если известно, что:
а) при значении аргумента, равном 2,5, значение функции равно 0,2; б) график функции проходит через точку с координатами (–10; 8).

4.12. Укажите область определения функции $y = \frac{8}{x}$ и постройте ее график. Возрастает или убывает данная функция при $x < 0$?

4.13. Укажите множество значений функции $y = -\frac{12}{x}$ и постройте ее график. Верно ли, что значения функции отрицательны при $x < 0$? Найдите координаты точек, в которых гипербола $y = -\frac{12}{x}$ пересекается с прямой $y = -4$; $y = 6$.

4.14. Выразите количество тетрадей n, которое можно купить на сумму 20 р., как функцию от цены тетради x (р.), где $x \in N$, $x \leqslant 10$. Постройте график этой функции.



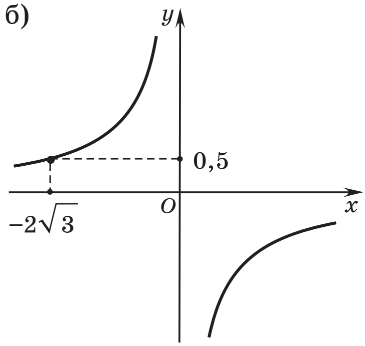


Рис. 97

4.15. По графику обратной пропорциональности (рис. 97) определите коэффициент k.

4.16. Известно, что график обратной пропорциональности проходит через точку $A\left(3\sqrt{5};\ -\sqrt{5}\right)$. Достаточно ли этих данных для построения графика функции? Если да, то постройте этот график.

4.17. Функция задана формулой $f(x) = \frac{7{,}8}{x}$. Найдите значение выражения:

а) $f(-9{,}5) + f(9{,}5)$; б) $f\left(\sqrt{3}\right) + f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ найдите $f(a) + f(-a)$, где a — любое действительное число.

4.18. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = \frac{6}{x}$ и $y = -x + 5$; б) $y = \frac{4}{x}$ и $y = x$.

4.19. Для каждой из обратных пропорциональностей, графики которых изображены на рисунке 98, найдите коэффициент k. Определите, какому из данных графиков принадлежит точка $(-64;\ -0{,}25)$.

4.20. График обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ расположен в первой и третьей координатных четвертях. Найдите промежутки знакопостоянства и промежутки монотонности данной функции.

4.21. Известно, что график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A(-13;\ 59)$.

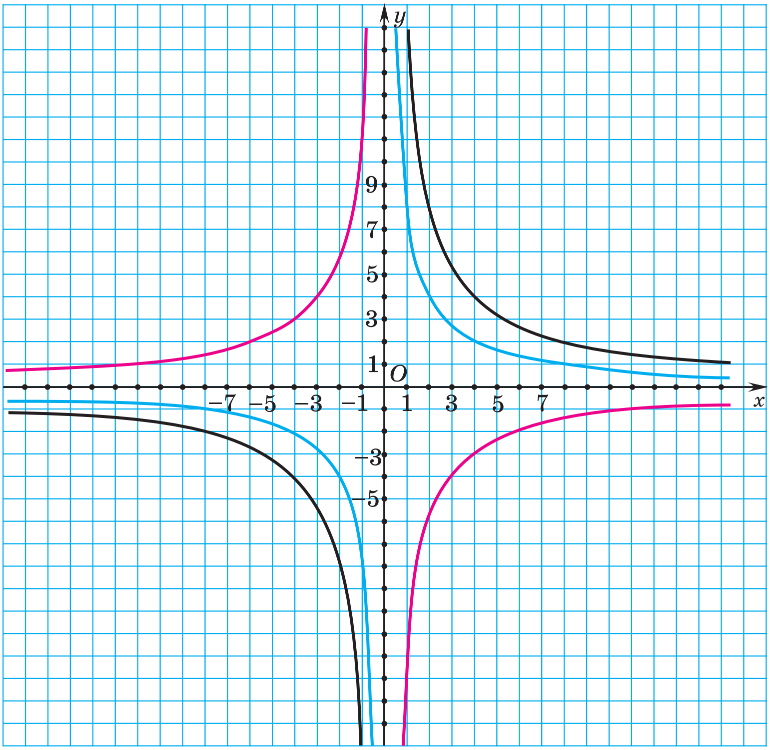


Рис. 98

Определите, имеет ли общие точки гипербола $f(x) = \frac{k}{x}$ и график функции:

а) $g(x) = \frac{17}{x}$;   б) $h(x) = -5x$.

4.22. Найдите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции $y = -\frac{10}{x}$ и находящихся от оси:

а) абсцисс на расстоянии, меньшем, чем 0,5;

б) ординат на расстоянии, большем, чем 100.

4.23. Верно ли, что все точки, для каждой из которых произведение координат равно 18, образуют на координатной плоскости гиперболу?

4.24. Найдите такие значения k и b, при которых графики функций $y = \frac{k}{x}$ и $y = kx + b$ проходят через точку:

а) (3; 1);   б) (0,1; −2).

4.25. Определите, сколько точек, у которых абсцисса противоположна ординате, принадлежит графику функции:

а) $y = -\frac{25}{x}$; б) $y = -\frac{3}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек. Рациональными или иррациональными числами являются координаты этих точек?

4.26. Постройте график функции:

а) $y = -\frac{6}{|x|}$; б) $y = \frac{8}{|x|}$.

4.27. Выберите функции, являющиеся обратной пропорциональностью:

а) $y = \frac{15}{x}$; б) $y = \frac{x}{9}$; в) $y = -\frac{7}{x}$;

г) $y = \frac{6{,}2}{x}$; д) $y = -\frac{x}{4} + 1$; е) $y = x^2$.

4.28. Для обратной пропорциональности $f(x) = \frac{14}{x}$ найдите:

а) $f(-2)$ и $f(3{,}5)$;

б) значение аргумента, при котором $f(x) = 7$.

4.29. Выберите функцию, графику которой принадлежит точка $A(-0{,}1;\ 12)$:

а) $f(x) = -\frac{12}{x}$; б) $g(x) = -\frac{120}{x}$;

в) $h(x) = -\frac{1{,}2}{x}$; г) $p(x) = \frac{12}{x}$.

4.30. Выберите функции, принимающие положительные значения при $x \in (0; +\infty)$:

а) $f(x) = -\frac{9}{x}$; б) $f(x) = -\frac{5{,}3}{x}$; в) $f(x) = \frac{17}{x}$;

г) $f(x) = \frac{9{,}4}{x}$; д) $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{x}$; е) $f(x) = \frac{\sqrt{5}}{x}$.

4.31. Обратная пропорциональность задана формулой $f(x) = -\frac{19}{x}$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(12)$; б) $f(-3{,}8)$ и $f(-3{,}9)$.

4.32. График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку с координатами $(5; -1{,}2)$. Найдите коэффициент k.

4.33. Постройте график функции:

а) $y = \frac{6}{x}$; б) $y = -\frac{8}{x}$.

Укажите область определения, множество значений и промежутки знакопостоянства функции.

4.34. Площадь прямоугольного участка земли равна 15 а. Одна из его сторон равна x м. Выразите длину другой стороны участка как функцию от x и постройте график этой функции, выбрав удобные единичные отрезки на осях координат.

4.35. Найдите значение k, при котором график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(12\sqrt{2};\ \sqrt{2}\right)$. Постройте этот график.

4.36. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = 2x$, найдите координаты их общих точек.

4.37. На рисунке 99 изображен график обратной пропорциональности $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите коэффициент k. Определите, принадлежат ли точки (–100; 1); (50; –0,5) графику данной функции.

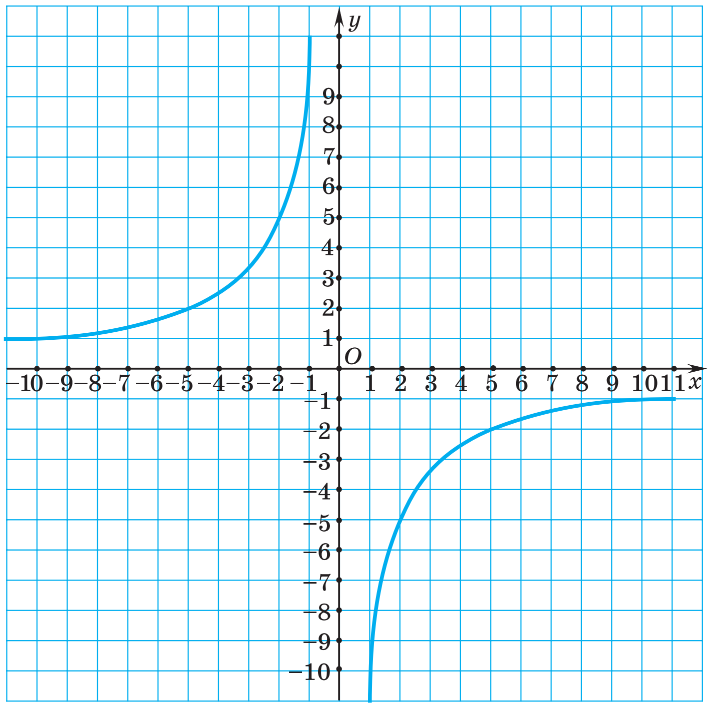


Рис. 99

4.38. Известно, что обратная пропорциональность $y = \frac{k}{x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$. В каких координатных четвертях расположен ее график? Найдите промежутки знакопостоянства данной функции.

4.39. Определите, сколько точек, у которых абсцисса равна ординате, имеет график функции:

а) $y = \frac{36}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$.

Найдите координаты всех таких точек.

4.40. Постройте график функции $y = -\frac{15}{|x|}$.

4.41. Расположите в порядке возрастания числа a, a^2 и a^3, если $a < -1$.

4.42. Найдите значение выражения $\frac{6^{-3} \cdot 2^{-4}}{18^{-2}}$.

4.43. Вычислите: $\frac{|-21| + |-4|}{|24| \cdot |-5|}$.

4.44. Вынесите множитель за знак корня в выражении $\sqrt{18x^6}$ при $x \leqslant 0$.

4.45. Друзья подарили однокласснику аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда. Длина аквариума равна $6\frac{2}{5}$ дм, ширина — $2\frac{1}{4}$ дм, высота — $1\frac{7}{8}$ дм. Сколько полных 4-литровых ведер воды пришлось влить в аквариум, чтобы наполнить его до $\frac{8}{9}$ высоты?

§ 18. Свойства и график функции $y = x^3$

4.46. Найдите объем куба, если длина его ребра равна:

а) 6 см; б) 10 дм; в) x м.

4.47. Найдите значение выражения: 2^3; $(-3)^3$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(-\frac{4}{7}\right)^3$; $(0{,}1)^3$.

В математике функции вида $y = x^k$ изучают для различных значений k. Мы уже рассмотрели свойства функции $y = x^2$, $k = 2$ и обратной пропорциональности $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $k = -1$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = x^3$.

1. Область определения функции. Так как выражение x^3 является степенью с натуральным показателем, то оно имеет смысл для любого действительного числа x, значит, областью определения функции $y = x^3$ являются все действительные числа: $D = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции. Степень x^3 может принимать положительные и отрицательные значения, быть равной нулю. Множеством значений функции $y = x^3$ является промежуток $(-\infty; +\infty)$: $E = \boldsymbol{R}$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $x^3 = 0$, при $x = 0$, то это значение аргумента есть нуль функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. Функция принимает положительные значения ($y > 0$), если $x \in (0; +\infty)$. Функция принимает отрицательные значения ($y < 0$), если $x \in (-\infty; 0)$.

5. График функции $y = x^3$. Для построения графика функции $y = x^3$ составим таблицу значений функции, соответствующих некоторым значениям аргумента.

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–1	0	1	8

Соединим точки плавной линией, получим график функции $y = x^3$ (рис. 100). Эта линия называется ***кубической параболой***.

6. Промежутки монотонности функции. С увеличением значений аргумента значения функции увеличиваются, т. е. функция возрастает на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

7. Точки графика функции $y = x^3$ **симметричны** относительно точки (0; 0).

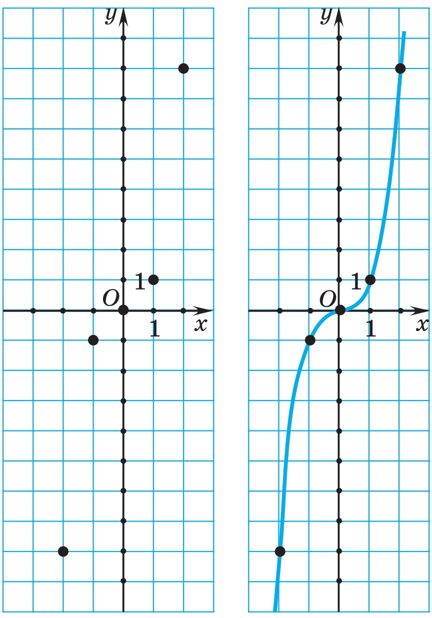


Рис. 100

Свойства функции $y = x^3$	
1. Найдите значения функции $y = x^3$, если: а) $x = 0{,}02$; б) $x = -0{,}02$; в) $x = 1{,}2$; г) $x = -1{,}2$.	а) $0{,}02^3 = 0{,}000008$; б) $(-0{,}02)^3 = -0{,}000008$; в) $1{,}2^3 = 1{,}44 \cdot 1{,}2 = 1{,}728$; г) $(-1{,}2)^3 = -1{,}728$.
2. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните: а) $f(2{,}356)$ и $f(2{,}365)$; б) $f(-4{,}006)$ и $f(-4{,}0006)$.	а) Так как функция $f(x) = x^3$ возрастающая для $x \in \boldsymbol{R}$, то из того, что $2{,}356 < 2{,}365$, следует, что $$f(2{,}356) < f(2{,}365).$$ б) Так как $-4{,}006 < -4{,}0006$, то $f(-4{,}006) < f(-4{,}0006)$, поскольку функция $f(x) = x^3$ возрастающая для $x \in \boldsymbol{R}$.
График функции $y = x^3$	
3. Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка с координатами: а) $(1; 0)$; б) $(1; 1)$; в) $(1; -1)$; г) $(-1; -1)$?	а) Подставим координаты точки в уравнение $y = x^3$, получим $1^3 = 0$ — равенство неверное, значит, точка $(1; 0)$ не принадлежит графику функции $y = x^3$. б) Равенство $1^3 = 1$ верное, значит, точка $(1; 1)$ принадлежит графику функции $y = x^3$. в) Равенство $1^3 = -1$ неверное, значит, точка $(1; -1)$ не принадлежит графику функции $y = x^3$. г) Равенство $(-1)^3 = -1$ верное, значит, точка $(-1; -1)$ принадлежит графику функции $y = x^3$.

4. Точка $M(m;\ n)$ принадлежит графику функции $y = x^3$. Какая из точек также принадлежит этому графику: а) $N(-m;\ n)$; б) $K(m;\ -n)$; в) $L(-m;\ -n)$?	Так как график функции $y = x^3$ симметричен относительно начала координат, то координаты симметричных точек — противоположные числа. У точки L координаты являются числами, противоположными числам m и n. Таким образом, графику функции $y = x^3$ принадлежит точка L.

Определите, какой из графиков на рисунке 101 является кубической параболой.

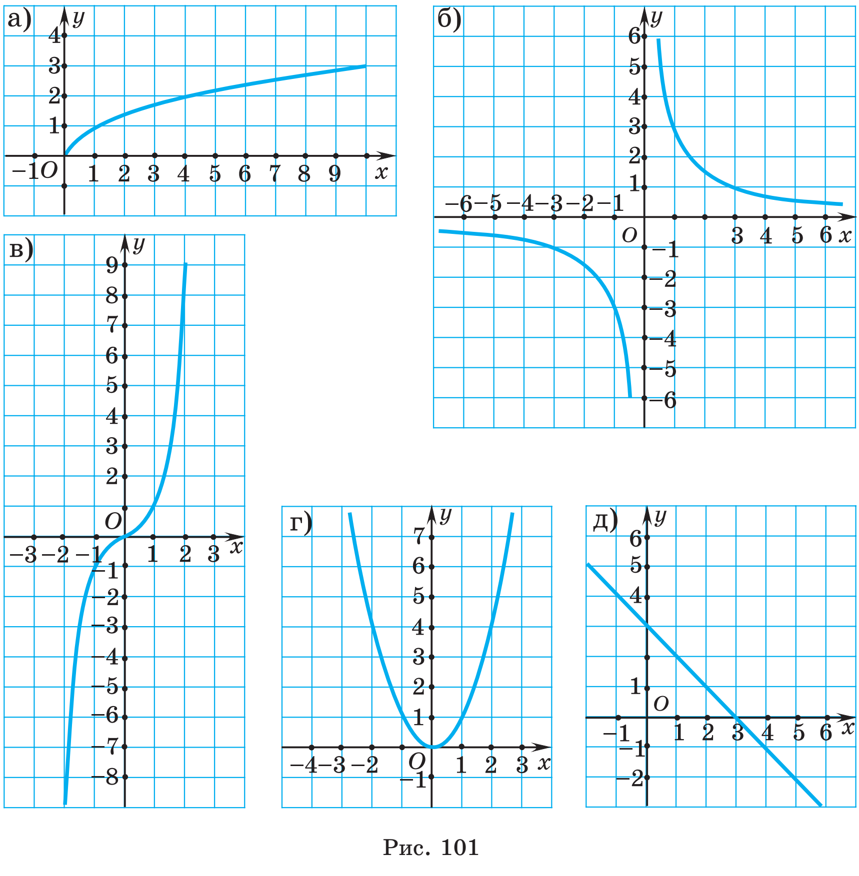


Рис. 101

4.48. Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(0)$; $f(4)$; $f(-5)$; $f(-0{,}01)$; $f(0{,}5)$.

4.49. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно 1; 0; -8; $2\sqrt{2}$.

4.50. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = x^3$:

а) $A(-5;\ -125)$; б) $B(4;\ -64)$; в) $C(10;\ 100)$;

г) $D(-0{,}1;\ -0{,}001)$; д) $E(2;\ 6)$; е) $M\left(\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}\right)$.

Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = x^3$.

4.51. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(2{,}1)$ и $f(3{,}9)$; б) $f(-8{,}97)$ и $f(-9{,}52)$;

в) $f\left(-\sqrt{5}\right)$ и $f(-2)$; г) $f\left(2\sqrt{3}\right)$ и $f(13)$.

4.52. Дана функция $g(x) = x^3$. Расположите в порядке убывания $g(-2{,}8)$; $g(0)$; $g(-4{,}65)$ и $g(15)$.

4.53. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = x^3$ и $y = 2 - x$; б) $y = x^3$ и $y = \frac{16}{x}$.

4.54. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Найдите значение выражения:

а) $f(-3) + f(3) - f(5)$; б) $f(2{,}45) + f(-2{,}45) + f(0)$;

в) $f\left(-\sqrt{7}\right) + f\left(\sqrt{7}\right)$; г) $f\left(\sqrt{2}\right) + f\left(-\sqrt{2}\right) + f(-1)$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = x^3$ найдите $f(a) + f(-a) + f(1)$, где a — любое действительное число.

4.55. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^3$ и $y = x$. Сравните свойства функций $y = x^3$ и $y = x$.

4.56. Найдите значения функции $y = x^3$ при значениях аргумента, равных 1; -3; 0,1; $-2{,}5$.

4.57. Для функции $f(x) = x^3$ найдите значение аргумента, при котором $f(x) = -1$; $f(x) = 27$; $f(x) = -125$; $f(x) = 7\sqrt{7}$.

4.58. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = x^3$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(6;\ 216)$;

в) $C(-10;\ -1000)$; г) $D(0{,}2;\ -0{,}008)$.

4.59. Функция задана формулой $f(x) = x^3$. Сравните:

а) $f(3{,}6)$ и $f(4{,}8)$; б) $f(-10{,}25)$ и $f(-8{,}26)$;

в) $f\left(\sqrt{11}\right)$ и $f(3)$; г) $f\left(-\sqrt{3}\right)$ и $f\left(-\sqrt{2}\right)$.

4.60. В одной системе координат постройте графики функций $y = x^3$ и $y = -8$, найдите координаты их общей точки.

4.61. Найдите значение выражения $f(18) + f(-18) - f(-1)$, если $f(x) = x^3$.

4.62. Выполните действия:

а) $\left(5\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^5$; б) $\frac{4^7 \cdot 64}{16^4}$.

4.63. Постоянное пополнение рубрик на национальном образовательном портале (adu.by) считается эффективным, если рубрику читает не менее 50 % посетителей портала. Анкетирование показало, что из 100 700 посетителей портала 41 600 человек читают рубрику «Электронные образовательные ресурсы», 39 250 — рубрику «Профильное обучение», 30 650 — обе эти рубрики. Все остальные посетители портала читают только рубрику «Актуальная информация». Будет ли постоянное пополнение рубрики «Актуальная информация» эффективным?

§ 19. Свойства и график функции $y = |x|$

4.64. Найдите значение выражения $|x|$, если:

а) $x = 1{,}5$; б) $x = -4{,}5$; в) $x = 6{,}5$.

4.65. Найдите значение выражения $|-1| + |2{,}4| + |-4{,}5|$.

Во многих практических задачах ставится вопрос о вычислении расстояния между двумя точками. Для решения таких задач используется понятие модуля числа. Определение модуля числа как расстояния от начала отсчета до точки на координатной прямой, соответствующей этому числу, приводит к правилу: модуль числа равен самому числу, если число неотрицательное, и равен противоположному ему числу, если число отрицательное, т. е. $|a| = \begin{cases} a, \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{если } a < 0. \end{cases}$

Рассмотрим свойства и график функции $y = |x|$.

1. Область определения функции. Так как $|x|$ определяется для любого действительного числа, то областью определения функции $y = |x|$ являются все действительные числа: $D = \boldsymbol{R}$.

2. Множество значений функции. Так как по определению модуля числа значение выражения $|x|$ неотрицательно для любого числа x, то множеством значений функции $y = |x|$ является множество неотрицательных чисел: $E = [0; +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $|x| = 0$, при $x = 0$, то $x = 0$ есть нуль функции.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ для $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

5. График функции. Построим график функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Поскольку при $x \geqslant 0$ $|x| = x$, то при $x \geqslant 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = x$ — луч с началом в точке $(0; 0)$, т. е. биссектриса первого координатного угла.

Так как при $x < 0$ $|x| = -x$, то при $x < 0$ график функции $y = |x|$ есть часть прямой $y = -x$, расположенная во второй координатной четверти.

Объединим части графиков функций $y = x$ при $x \in [0; +\infty)$ и $y = -x$ при $x \in (-\infty; 0)$ и получим график функции $y = |x|$ (рис. 102).

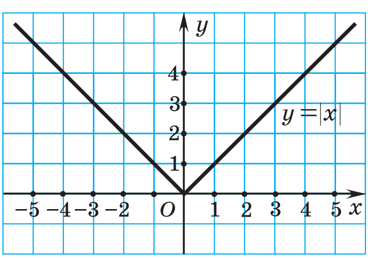


Рис. 102

6. Промежутки монотонности функции. Функция $y = |x|$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

7. Точки графика функции $y = |x|$ **симметричны** относительно оси ординат.

Свойства функции $y = \lvert x \rvert$	
1. Функция задана формулой $f(x) = \lvert x \rvert$. Сравните: а) $f(2,3)$ и $f(-2,3)$; б) $f(-4)$ и $f(0)$.	а) Так как $\lvert 2,3 \rvert = \lvert -2,3 \rvert$, то $f(2,3) = f(-2,3)$; б) $f(-4) > f(0)$, так как $f(-4) = \lvert -4 \rvert = 4$, а $f(0) = \lvert 0 \rvert = 0$.
2. Сколько существует значений аргумента, при которых значение функции $y = \lvert x \rvert$ равно: а) 6,287; б) 0; в) –5,5?	а) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = 6,287$, получим $6,287 = \lvert x \rvert$. Это уравнение имеет два корня: 6,287 и –6,287. б) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = 0$, получим $0 = \lvert x \rvert$. Это уравнение имеет один корень $x = 0$. в) Подставим в уравнение $y = \lvert x \rvert$ значение $y = -5,5$, получим $-5,5 = \lvert x \rvert$. Это уравнение не имеет корней, так как модуль числа есть число неотрицательное.
График функции $y = \lvert x \rvert$	
3. Определите, принадлежит ли точка графику функции $y = \lvert x \rvert$: а) (3; 3); б) (–4; 4); в) (2; –2); г) (–5; 4).	а) Подставим координаты точки в уравнение $y = \lvert x \rvert$, получим $3 = \lvert 3 \rvert$ — равенство верное, значит, точка (3; 3) принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$. б) Равенство $4 = \lvert -4 \rvert$ верное, значит, точка (–4; 4) принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$. в) Равенство $-2 = \lvert 2 \rvert$ неверное, значит, точка (2; –2) не принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$.

	г) Равенство $4 = \lvert -5 \rvert$ неверное, значит, точка (–5; 4) не принадлежит графику функции $y = \lvert x \rvert$.
4. Сколько точек пересечения имеет график функции $y = \lvert x \rvert$ с прямой $y = c$, если: а) $c = 6$; б) $c = 0$; в) $c = -5$?	а) Прямая $y = 6$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; 6). Она пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$ в двух точках. б) Прямая $y = 0$ — ось абсцисс. Она пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$ в одной точке. в) Прямая $y = -5$ параллельна оси абсцисс и проходит через точку (0; –5). Она не пересекает график функции $y = \lvert x \rvert$.

Сколько корней имеют уравнения:

а) $\lvert x \rvert = 4$ и $x^2 = 16$; б) $\lvert x \rvert = 0$ и $x^2 = 0$; в) $\lvert x \rvert = -3$ и $x^2 = -3$?

4.66. Найдите значения функции $y = \lvert x \rvert$ при значении аргумента, равном 1; –1; 0; –3,5; 3,5.

4.67. Для функции $f(x) = \lvert x \rvert$ найдите значения аргумента, при которых:

а) $f(x) = 7$; б) $f(x) = 3{,}9$; в) $f(x) = 0$.

4.68. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \lvert x \rvert$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(-7;\ -7)$; в) $C(-1{,}25;\ 1{,}25)$;

г) $D(11;\ -11)$; д) $E(28{,}9;\ 28{,}9)$; е) $N\left(-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right)$.

Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = \lvert x \rvert$.

4.69. Функция задана формулой $f(x) = \lvert x \rvert$. Сравните:

а) $f(80{,}7)$ и $f(83{,}9)$; б) $f(-5{,}43)$ и $f(-6{,}21)$;

в) $f\left(-\sqrt{7}\right)$ и $f\left(-2\sqrt{2}\right)$; г) $f\left(2\sqrt{5}\right)$ и $f\left(-\sqrt{20}\right)$.

4.70. Дана функция $g(x) = \lvert x \rvert$. Расположите в порядке убывания $g(-2{,}8)$; $g(-3{,}1)$; $g(-4{,}6)$.

4.71. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = \frac{x}{2} + 3$; б) $y = |x|$ и $y = -\frac{4}{x}$;

в) $y = |x|$ и $y = x^2 - 2$.

4.72. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(-10) - f(10) + f(85)$; б) $f(\sqrt{3}) - f(-\sqrt{3}) + f(\sqrt{2})$.

Обобщите полученные результаты. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(a) - f(-a) + f(5)$, где a — любое действительное число.

4.73. Постройте графики функций $y = |x|$ и $y = x^2$. Сравните свойства функций $y = |x|$ и $y = x^2$.

4.74. В разных системах координат постройте графики функций $y = x$; $y = \sqrt{x^2}$ и $y = (\sqrt{x})^2$. Верно ли, что графики всех этих функций различны?

4.75. Для функции $f(x) = |x|$ найдите $f(4)$; $f(-4)$; $f(-0,8)$; $f(0,8)$.

4.76. Для функции $y = |x|$ найдите все значения аргумента, при которых значение функции равно 5; 0; 48.

4.77. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = |x|$:

а) $A(8; -8)$; б) $B(1; 1)$;

в) $C(-6,2; -6,2)$; г) $D(-18,3; 18,3)$.

4.78. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Сравните:

а) $f(7)$ и $f(10)$; б) $f(-56,32)$ и $f(-58,97)$;

в) $f(3\sqrt{3})$ и $f(5)$; г) $f(\sqrt{8})$ и $f(-2\sqrt{2})$.

4.79. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = |x|$ и $y = 5$; б) $y = |x|$ и $y = -x^2 + 6$.

4.80. Функция задана формулой $f(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(2,6) - f(-2,6) - f(15)$; б) $-f(2\sqrt{15}) + f(\sqrt{60}) + f(8)$.

4.81. Вычислите:

а) $\frac{(3\sqrt{8})^2}{24}$; б) $6\sqrt{1,21} - 2(\sqrt{2})^2$.

4.82. Найдите количество целых решений неравенства

$$\frac{x^2+6x}{6} - \frac{2x+3}{2} \leqslant 12.$$

4.83. В рамках республиканской акции по благоустройству и озеленению территорий «Цветы добра» учащиеся создавали проекты цветников. Группа восьмиклассников высаживала цветы в городском парке 4 ч, а группа семиклассников — 3 ч. Вместе они высадили 440 цветов. Сколько цветов высадили восьмиклассники, если за 1 ч работы две группы вместе высадили 130 цветов?

§ 20. Свойства и график функции $y = \sqrt{x}$

4.84. Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:

а) 36 см^2; б) 10 дм^2; в) x м^2.

4.85. Найдите значение выражения $\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$.

4.86. Сравните $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ и $2\sqrt{0,25}$.

Зависимость между двумя переменными величинами, при которой каждому значению одной переменной величины x из множества неотрицательных чисел ставится в соответствие значение $\sqrt{x}$, задает функцию $y = \sqrt{x}$.

Рассмотрим свойства и график функции $y = \sqrt{x}$.

1. Область определения функции. Так как по определению квадратного корня из числа $(\sqrt{x})^2 = x$, а $(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$, то аргумент x принимает только неотрицательные значения, т. е. $D = [0; +\infty)$.

2. Множество значений функции. По определению арифметический квадратный корень из числа есть число неотрицательное, т. е. множеством значений функции $y = \sqrt{x}$ является множество неотрицательных чисел: $E(y) = [0; +\infty)$.

3. Нули функции. Так как $y = 0$, т. е. $\sqrt{x} = 0$, при $x = 0$, то значение $x = 0$ является нулем функции.

Три рассмотренных свойства позволяют утверждать, что график функции $y = \sqrt{x}$ лежит в первой координатной четверти и проходит через начало координат.

4. Промежутки знакопостоянства функции. $y > 0$ при всех $x \in (0; +\infty)$.

5. График функции $y = \sqrt{x}$. Для построения графика функции $y = \sqrt{x}$ составим таблицу значений функции, соответствующих некоторым значениям аргумента.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

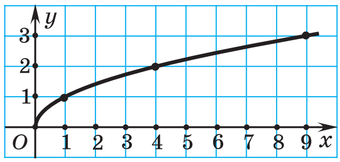


Рис. 103

Соединим точки плавной линией, получим график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 103).

6. Промежутки монотонности функции. С увеличением значений аргумента x значения функции $y = \sqrt{x}$ увеличиваются, значит, функция $y = \sqrt{x}$ возрастает для всех $x \in [0; +\infty)$.

<table>
<tr><th colspan="2">Свойства функции $y = \sqrt{x}$</th></tr>
<tr><td>1. Найдите значение функции $y = \sqrt{x}$, если:
а) $x = 0{,}04$;
б) $x = 1{,}21$;
в) $x = 4{,}84$;
г) $x = 1225$.</td><td>а) Подставим значение $x = 0{,}04$ в формулу $y = \sqrt{x}$, получим $y = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2$;
б) $y = \sqrt{1{,}21} = 1{,}1$;
в) $y = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$;
г) $y = \sqrt{1225} = 35$.</td></tr>
<tr><td>2. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x}$. Сравните:
а) $f(8{,}35)$ и $f(5{,}35)$;
б) $f(41{,}06)$ и $f(42{,}06)$.</td><td>а) Так как функция $y = \sqrt{x}$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, то из того, что $8{,}35 > 5{,}35$, следует, что $f(8{,}35) > f(5{,}35)$.
б) Так как $41{,}06 < 42{,}06$ и функция $y = \sqrt{x}$ возрастающая для $x \in [0; +\infty)$, то $f(41{,}06) < f(42{,}06)$.</td></tr>
</table>

График функции $y = \sqrt{x}$	
3. Какие из точек: а) (1; 1); б) (16; 4); в) (1; –1); г) (16; –4) — принадлежат графику функции $y = \sqrt{x}$?	а) Подставим координаты точки (1; 1) в уравнение $y = \sqrt{x}$, получим $\sqrt{1} = 1$ — верное равенство, значит, точка (1; 1) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. б) Равенство $\sqrt{16} = 4$ верное, значит, точка (16; 4) принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. в) Равенство $\sqrt{1} = -1$ неверное, значит, точка (1; –1) не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$. г) Равенство $\sqrt{16} = -4$ неверное, значит, точка (16; –4) не принадлежит графику функции $y = \sqrt{x}$.
4. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ на отрезке [0; 5] (рис. 104), найдите приближенное значение $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.	По значению абсцисс точек находим приближенное значение ординат точек графика: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, $\sqrt{5} \approx 2{,}2$.

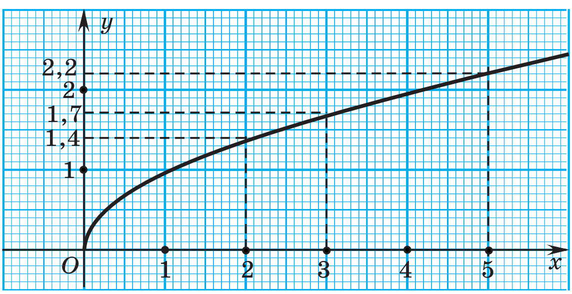


Рис. 104

1. Выберите функции, областью определения которых являются все действительные числа:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{k}{x}$; г) $y = |x|$.

2. Определите функции, которые при всех значениях x из области определения принимают неотрицательные значения:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = \frac{k}{x}$; г) $y = |x|$.

4.87. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите $f(0)$; $f(4)$; $f(0{,}25)$; $f(49)$; $f(6400)$.

4.88. Из чисел 9; –3; 0; –1,25; 12,3; 8 выберите те, которые не принадлежат области определения функции $y = \sqrt{x}$.

4.89. Найдите значение аргумента, при котором значение функции $y = \sqrt{x}$ равно 0; 1; 2,5; $\sqrt{7}$; $2\sqrt{5}$. Может ли данная функция принимать значение, равное –8?

4.90. Выберите точки, через которые проходит график функции $y = \sqrt{x}$:

а) $A(36; 6)$; б) $B(0{,}25; 0{,}5)$; в) $C(1; -1)$;

г) $D(0{,}01; 0{,}1)$; д) $E(144; -12)$; е) $F\left(5; \sqrt{5}\right)$.

Определите, какие из данных точек расположены ниже графика функции $y = \sqrt{x}$, а какие выше. Запишите координаты еще каких-либо двух точек, принадлежащих графику функции $y = \sqrt{x}$.

4.91. Функция задана формулой $f(x) = \sqrt{x}$. Сравните:

а) $f(6)$ и $f(11)$; б) $f(29{,}18)$ и $f(31{,}9)$.

4.92. Пользуясь свойствами функции $f(x) = \sqrt{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt{37}$ и $\sqrt{35}$; б) $\sqrt{24}$ и 5; в) $5\sqrt{3}$ и $4\sqrt{5}$.

4.93. Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\sqrt{17}$; $3\sqrt{2}$; 4; б) $5\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $\sqrt{42}$.

4.94. Найдите какое-нибудь рациональное число, заключенное между числами $\sqrt{5}$ и $\sqrt{6}$.

4.95. Между какими последовательными целыми числами заключено число $-\sqrt{18}$?

4.96. Определите, пересекается ли график функции $y = \sqrt{x}$ с прямой:

а) $y = 2$; б) $y = 1{,}5$; в) $y = -3$;

г) $y = 0$; д) $y = \sqrt{5}$; е) $y = -\sqrt{2}$.

Если да, то найдите координаты точки пересечения.

4.97. Используя график функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 105), найдите приближенное значение $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$.

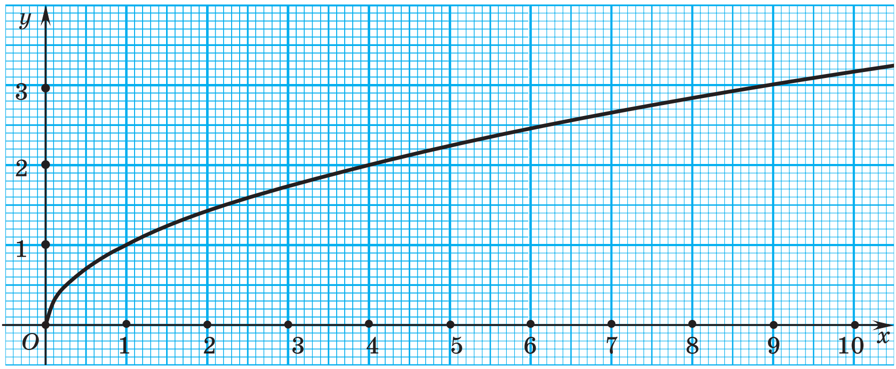


Рис. 105

4.98. Выберите прямые, которые пересекает график функции $y = \sqrt{x}$:

а) $y = 3x$; б) $y = -x + 2$;

в) $y = 2x + 5$; г) $y = -4x - 3$.

4.99. В одной системе координат постройте графики функций и найдите координаты их общих точек:

а) $y = \sqrt{x}$ и $y = \frac{8}{x}$; б) $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 2$.

4.100. В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ и $y = x$. Найдите координаты общих точек построенных графиков. Сравните свойства функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$.

4.101. Среди функций $y = \sqrt{x}$; $y = |x|$; $y = x^3$ и $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, выберите функции:

а) нулем которых является $x = 0$;

б) возрастающие при $x \in (0; +\infty)$;

в) значения которых отрицательны при $x < 0$.

4.102. Сравните значения функции $y = \sqrt{x}$ при $x = \left(\frac{5}{\sqrt{6}+1}\right)^2$ и $x = 7 - 2\sqrt{6}$.

4.103. Даны функции $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = |x|$. Найдите значение выражения:

а) $f(g(-25))$; б) $g(f(0,36))$.

4.104. Найдите значения функции $y = \sqrt{x}$ при значении аргумента, равном 1; 25; 2,56.

4.105. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ найдите значение аргумента, при котором $f(x) = 12$; $f(x) = 0,8$; $f(x) = 3\sqrt{2}$.

4.106. Выберите точки, принадлежащие графику функции $y = \sqrt{x}$:

а) $A(0;\ 0)$; б) $B(16;\ -4)$; в) $C(-100;\ 10)$;

г) $D(0,81;\ 0,9)$; д) $E\left(8;\ 2\sqrt{2}\right)$; е) $K\left(\sqrt{6};\ 36\right)$.

4.107. Дана функция $f(x) = \sqrt{x}$. Расположите в порядке возрастания $f(2)$; $f(5)$; $f(0,1)$ и $f(3,8)$.

4.108. Пользуясь свойствами функции $y = \sqrt{x}$, сравните числа:

а) $\sqrt{11}$ и $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{37}$ и 6; в) $2\sqrt{6}$ и $4\sqrt{7}$.

4.109. Расположите в порядке убывания числа 7; $3\sqrt{5}$; $\sqrt{47}$.

4.110. Найдите два последовательных целых числа, между которыми заключено число $\sqrt{95}$.

4.111. Определите, пересекается ли график функции $y = \sqrt{x}$ с прямой:

а) $y = 1$; б) $y = \frac{1}{3}$; в) $y = -7$; г) $y = \sqrt{13}$.

Если да, то найдите координаты точки пересечения.

4.112. В одной системе координат постройте графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = x - 6$, найдите координаты их общей точки.

4.113. За 800 г конфет заплатили 9 р. 60 к. Сколько граммов таких же конфет можно купить на 3 р.?

4.114. Решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x - 7 \geqslant 0, \\ 2 - 3x > 0. \end{cases}$

4.115. Представьте в виде произведения:

а) $(y + 2)^2 - 2y(y + 2)$; б) $-3y^2 + 10y - 3$.

4.116. Выполните действия и запишите результат в стандартном виде:

а) $13\ 000^2$; б) $0{,}004^3$; в) 5000^{-4}.

Итоговая самооценка

После изучения этой главы я должен:

- знать свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$;
- уметь строить график функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, для различных значений k;
- применять свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, при решении задач;
- знать свойства функции $y = x^3$, уметь строить график этой функции;
- применять свойства функции $y = x^3$ при решении задач;
- знать свойства функции $y = \sqrt{x}$, уметь строить ее график;
- применять свойства функции $y = \sqrt{x}$ при решении задач;
- знать свойства функции $y = |x|$, уметь строить ее график;
- применять свойства функции $y = |x|$ и использовать ее график при решении задач.

Я проверяю свои знания

1. Установите соответствие между графиком функции (рис. 106) и ее записью с помощью формулы:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = x^3$; в) $y = |x|$; г) $y = \frac{3}{x}$.

Как называется функция вида $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$? Как называется график этой функции?

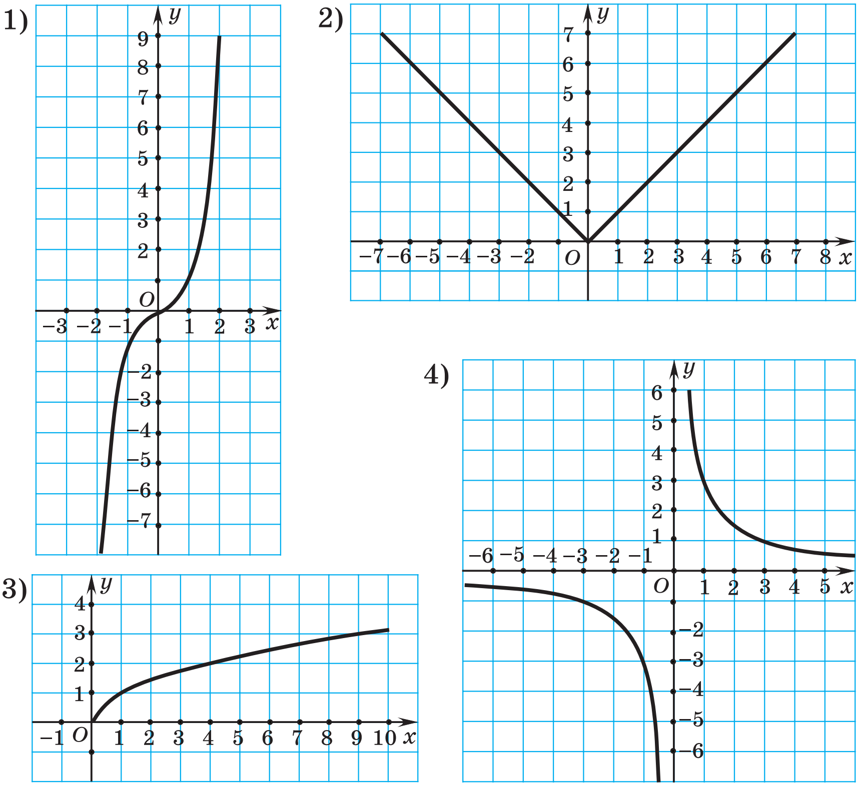


Рис. 106

2. Выберите функции, графикам которых принадлежит точка $A(-2;\ 2)$:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = -\frac{4}{x}$; г) $f(x) = x^3$.

3. Найдите $f(9)$ для функции:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = -\frac{18}{x}$; г) $f(x) = x^3$.

4. Найдите все значения аргумента, при которых выполняется равенство $g(x) = 8$, если:

а) $g(x) = |x|$; б) $g(x) = \sqrt{x}$;

в) $g(x) = \frac{24}{x}$; г) $g(x) = x^3$.

5. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{8}{x}$ и $y = \sqrt{x}$, найдите координаты их общей точки. Имеют ли общие точки графики функций:

а) $y = \frac{8}{x}$ и $y = -\frac{5}{x}$; б) $y = \frac{8}{x}$ и $y = -2x$?

Можно ли ответить на этот вопрос, не выполняя построения графиков?

6. Для каждой из функций $f(x) = |x|$; $f(x) = \sqrt{x}$; $f(x) = \frac{k}{x}$, $k < 0$, и $f(x) = x^3$ укажите: а) область определения функции; б) множество значений функции; в) нули функции; г) промежутки знакопостоянства функции; д) промежутки монотонности функции.

7. Расположите в порядке возрастания $f(5{,}12)$; $f(13{,}7)$; $f(9{,}29)$, если:

а) $f(x) = |x|$; б) $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f(x) = \frac{k}{x}$, $k > 0$; г) $f(x) = x^3$.

8. Вычислите $f(-1{,}2) + f(1{,}2) + g(7{,}8) + g(-7{,}8) + h(9{,}5) - h(-9{,}5)$, если $f(x) = \frac{79}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = |x|$.

9. Сравните $f\left(\frac{36}{8 - 2\sqrt{7}}\right)$ и $f\left(8 - 2\sqrt{7}\right)$, если $f(x) = \sqrt{x}$.

10. Задайте формулой обратную пропорциональность, график которой проходит через одну из точек пересечения графиков функций $y = |x|$ и $y = x^3$.

Практическая математика

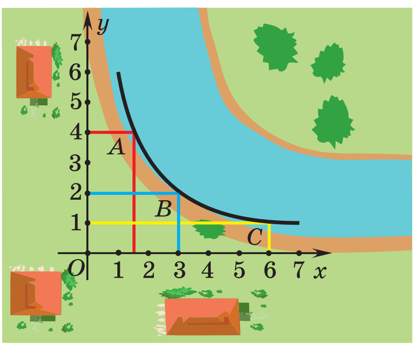


Рис. 107

1. Река огибает садовое товарищество так, как показано на рисунке 107. Дачникам предлагается устроить зону отдыха на одном из трех участков. При выборе из предлагаемых вариантов участка максимальной площади мнения разделились. Какое решение предлагаете вы?

2. Пастила продается в виде кубиков с ребром 4 см и 8 см. Восьмиклассник решил выбрать два кубика с ребром 4 см, а его старшая сестра утверждает, что лучше купить один кубик с ребром 8 см. Кто из них сумеет угостить большее число друзей, разделив купленные кубики на меньшие, с ребром 2 см?

Увлекательная математика

Исследуем, обобщаем, делаем выводы

Исследовательское задание

а) Постройте графики функций $f_1(x) = 2|x|$; $g_1(x) = 2\sqrt{x}$; $h_1(x) = 2x^3$ и $f_2(x) = 0{,}5|x|$; $g_2(x) = 0{,}5\sqrt{x}$; $h_2(x) = 0{,}5x^3$.

б) Обобщите полученные результаты для функций вида $f(x) = k|x|$; $g(x) = k\sqrt{x}$ и $h(x) = kx^3$, где $k \neq 0$.

Готовимся к олимпиадам

1. Название одного из городов Беларуси зашифровано с помощью некоторого кода: –14 –10 –15 –19 –12. Расшифруйте это слово.

2. Число x таково, что среди четырех чисел $x - \sqrt{2}$; $x^2 - 2\sqrt{2}$; $x + \frac{1}{x}$ и $x - \frac{1}{x}$ ровно одно не является целым. Найдите все такие x.

Повторение курса алгебры 8-го класса

Квадратные корни

1. Среди чисел 36; 0; $-\frac{1}{9}$; 0,04; –25; 1; 0,49 выберите те, из которых можно извлечь квадратный корень. Объясните свой выбор.

2. Вычислите:

а) $\sqrt{625}-3\sqrt{144}$;   б) $\sqrt{11\frac{1}{9}}+\sqrt{10\frac{9}{16}}$;

в) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}-\sqrt{4^2+9}$;   г) $3\sqrt{0,25}+5\sqrt{3,24}$.

3. Найдите значение выражения при $m = 0,04$, $n = \frac{1}{4}$:

а) $m\sqrt{n}-n\sqrt{m}$;

б) $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right):\sqrt{mn}$;

в) $\sqrt{m:n}+\sqrt{m+n+0,2}$.

4. Вычислите:

а) $\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{2,25}$;   б) $\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(5\sqrt{2}\right)^2$;

в) $\left(-\sqrt{6}\right)^2+\left(-3\sqrt{7}\right)^2$;   г) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\sqrt{1\frac{19}{81}}$.

5. Используя свойства квадратного корня, вычислите:

а) $\sqrt{0,16\cdot 49}$;   б) $\sqrt{2\cdot 800}$;   в) $\sqrt{160}\cdot\sqrt{250}$;

г) $\sqrt{108}\cdot\sqrt{3}$;   д) $\sqrt{\frac{36}{169}}$;   е) $\sqrt{18\frac{1}{16}}$;

ж) $\frac{\sqrt{288}}{\sqrt{2}}$;   з) $\frac{\sqrt{90}}{\sqrt{0,225}}$;   и) $\frac{\sqrt{64,8}}{\sqrt{0,2}}$.

6. Выполните действия и определите, рациональным или иррациональным числом является значение выражения:

а) $7\sqrt{300}-\sqrt{75}-5\sqrt{48}$;   б) $3\sqrt{54}+\sqrt{96}-5\sqrt{150}$;

в) $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{20}\right)\cdot\sqrt{5}$;   г) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}+0,5\sqrt{24}$;

д) $\left(6-\sqrt{3}\right)^2$;   е) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\sqrt{20}$;

ж) $\left(7-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+7\right)$;   з) $\left(\sqrt{7}-3\right)^2\left(16+6\sqrt{7}\right)$.

7. Используйте свойства арифметического квадратного корня для вычисления значения выражения:

а) $\sqrt{80}+\sqrt{1{,}25}-\frac{1}{14}\sqrt{245}-\sqrt{180}$;

б) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2\left(7+4\sqrt{3}\right)+3\sqrt{12\frac{1}{4}}$.

8. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

а) $\frac{21}{\sqrt{7}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{3}+1}$.

9. Упростите выражение $2x^3-\sqrt{25x^6}$, если $x<0$.

10. Упростите выражение:

а) $\sqrt{(y-3)^2}+\sqrt{(5-y)^2}$ при $3\leqslant y\leqslant 5$;

б) $\sqrt{4a^2+4a+1}-\sqrt{9a^2}$ при $-4<a<-2$.

11. Внесите множитель под знак корня:

а) $6\sqrt{2}$; б) $a\sqrt{7}$ при $a\geqslant 0$; в) $b\sqrt{3}$ при $b<0$;

г) $n\sqrt{n}$; д) $c\sqrt{-c}$; е) $-a\sqrt{-a}$.

12. Найдите значение выражения $A+B+C+D$, если известно, что:

$A=\left(\sqrt{28}-\sqrt{175}+2\sqrt{63}\right):\left(2\sqrt{7}\right)$;

$B=\left(2\sqrt{3}+5\right)^2+\left(10-\sqrt{3}\right)^2$;

$C=\frac{2}{3}\sqrt{27}+\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)$;

$D=\sqrt{\left(1-\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{7}\right)^2}$.

13. Найдите значение выражения $\sqrt{19-8\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-2}$.

Квадратные уравнения

14. Определите вид уравнения и решите его:

а) $12x^2+3x=0$; б) $2x^2-18=0$;

в) $\frac{1}{3}x^2-6x=0$; г) $x^2=25$;

д) $x^2+3=3-x$; е) $12-x^2=11$;

ж) $17-x^2=14$; з) $25+100x^2=0$.

15. Воспользуйтесь формулой корней квадратного уравнения и решите уравнение:

а) $x^2 - 6x - 16 = 0$; б) $3x^2 + 4x + 5 = 0$;
в) $-x^2 + 7x - 10 = 0$; г) $32x^2 - 12x + 1 = 0$;
д) $25x^2 + 10x + 1 = 0$; е) $x^2 - x + 0{,}25 = 0$.

16. Решите уравнение:

а) $(x + 1)(3x + 1) = 5$;
б) $(2x + 3)(3x + 1) = 10x - 2$;
в) $(3x - 1)(2x + 6) = 8(2x + 3)$;
г) $(2x + 1)(x + 2) - (x - 1)(3x + 1) = 9$;
д) $(x - 2)^2 = 4(x + 6)$;
е) $3(x + 1)^2 = (x + 3)^2$.

17. Составьте какое-нибудь квадратное уравнение, которое:

а) не имеет корней;
б) имеет два целых корня;
в) имеет два иррациональных корня;
г) имеет только один корень.

18. Решите уравнение, не применяя формулы корней квадратного уравнения:

а) $x^2 - 11x + 18 = 0$; б) $x^2 - 5x - 14 = 0$;
в) $x^2 - x - 6 = 0$; г) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
д) $x^2 + 4x - 21 = 0$; е) $x^2 + 16x + 55 = 0$.

19. Выберите квадратное уравнение, корнями которого являются числа -1 и $\frac{1}{7}$:

а) $7x^2 + 6x + 1 = 0$; б) $-\frac{1}{7}x^2 + \frac{6}{7}x - 1 = 0$;
в) $x^2 - \frac{1}{7}x + 6 = 0$; г) $x^2 + \frac{1}{7}x - 6 = 0$;
д) $7x^2 + 6x - 1 = 0$; е) $x^2 - 7x - 1 = 0$.

20. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, зная, что:

а) его корни равны 1 и -7;
б) его корни равны $\frac{1}{6}$ и -6;
в) один из его корней равен $5 - \sqrt{2}$.

21. Найдите значение выражения $x_1 + x_2 + 2x_1x_2$, если x_1 и x_2 — корни уравнения $2x^2 - 3x - 7 = 0$.

22. Уравнение $x^2 + px - 13 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Выразите $x_1^2 + x_2^2$ через p.

23. Разложите, если это возможно, на множители квадратный трехчлен:

а) $x^2 - 7x - 8$; б) $4x^2 + 9x + 2$; в) $4x^2 - 3x + 1$.

24. Представьте квадратный трехчлен в виде произведения двух двучленов:

а) $6x^2 - x - 1$; б) $-x^2 - 4x + 5$.

25. Решите биквадратное уравнение:

а) $x^4 - 7x^2 + 6 = 0$;

б) $4x^4 + 3x^2 - 1 = 0$;

в) $5x^4 + 11x^2 + 2 = 0$.

26. Решите уравнение, используя метод замены переменной:

а) $(x^2 - 3)^4 + (x^2 - 3)^2 = 20$;

б) $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$;

в) $2(x^2 - x + 1)^2 - 3(x^2 - x + 1) = 2$;

г) $(x^2 + x)(x^2 + x - 4) - 12 = 0$;

д) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 5) = 84$;

е) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - 3x - 1) = 3$;

ж) $(2x^2 + x - 1)(2x^2 + x - 4) + 2 = 0$;

з) $(x^2 - 10x + 17)^2 - (x - 2)(x - 8) = 1$.

Квадратичная функция

27. Даны функции $f(x) = 4x^2 + 8x - 12$; $g(x) = 4(x + 1)^2 - 16$; $h(x) = 4(x - 1)(x + 3)$. Покажите, что $y = f(x)$; $y = g(x)$ и $y = h(x)$ являются тремя формами записи одной и той же функции.

28. Функция задана формулой $y = 3x^2 + 2x - 5$. Найдите:

а) значение функции при $x = -\frac{2}{3}$;

б) нули функции;

в) значения аргумента, при которых функция принимает значение, равное 3.

Проходит ли график функции через точку $A(-4;\ 32)$?

29. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 6x + 5$; б) $y = -x^2 - 4x - 3$;

в) $y = x^2 + 2x + 3$; г) $y = -x^2 + 4x$;

д) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$; е) $y = -x^2 + 9$;

ж) $y = (x - 4)(x + 2)$; з) $y = (x + 5)(1 - x)$;

и) $y = 2(x - 1)^2 - 8$; к) $y = -(x + 3)^2 + 4$.

Для каждой из функций запишите:

1) область определения функции;
2) множество значений функции;
3) наибольшее (наименьшее) значение функции;
4) уравнение оси симметрии параболы;
5) нули функции;
6) промежутки знакопостоянства функции;
7) промежутки монотонности функции.

30. Найдите координаты вершины параболы и промежутки монотонности квадратичной функции:

а) $f(x) = (x - 4)^2 + 5$;

б) $g(x) = -(x + 2)^2 - 7$;

в) $h(x) = x^2 + 4$;

г) $p(x) = -3(x - 1)^2$.

31. Выберите график функции, заданной формулой $y = x^2 - 5$ (рис. 108).

32. В одной системе координат постройте графики функций $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; $y = -2(x + 5)^2 + 8$; $y = (x + 3)^2 - 9$; $y = -(x - 5)^2$.

33. Числа -2 и 3 являются нулями квадратичной функции $y = 2x^2 + bx + c$. Найдите b и c.

34. Точка $A(2;\ 27)$ принадлежит графику функции $f(x) = -x^2 + bx + 1$. Найдите наибольшее значение функции.

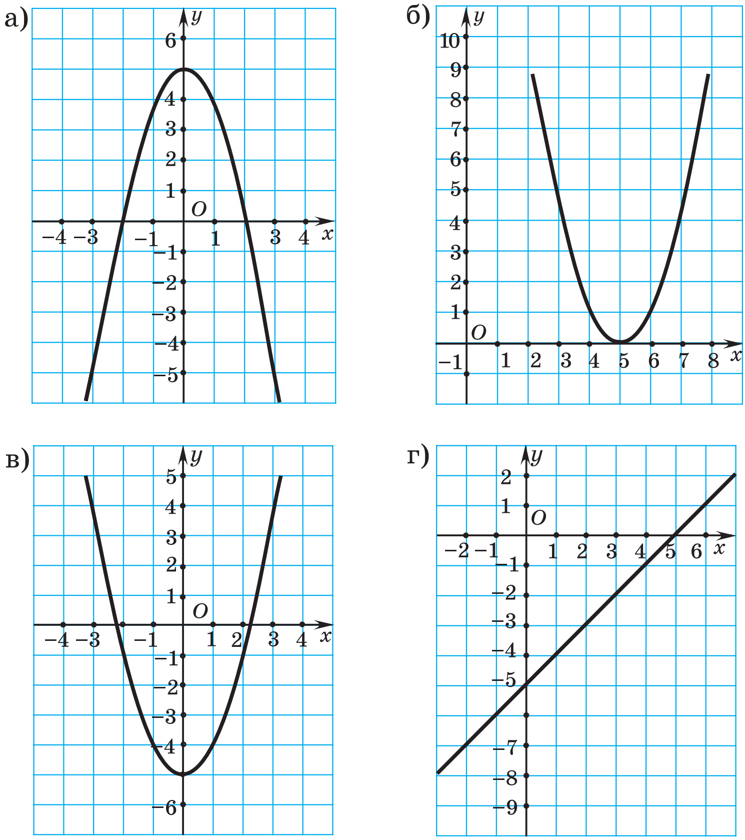


Рис. 108

35. Решите неравенство, используя свойства квадратичной функции:

а) $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$; б) $3x^2 - 4x + 7 < 0$;

в) $4x^2 - 4x - 15 \leqslant 0$; г) $x^2 - 8x + 16 \leqslant 0$;

д) $x^2 + 4x + 5 > 0$; е) $x^2 + 10x - 24 < 0$;

ж) $x^2 \leqslant 36$; з) $5x^2 + x > 0$;

и) $-4x^2 + 1 \leqslant 0$; к) $8x^2 \geqslant 16$.

36. Найдите область определения выражения:

а) $\sqrt{x^2 - 7x - 18}$; б) $\sqrt{13x - 6x^2 - 5}$;

в) $\sqrt{6x^2 - x}$; г) $\sqrt{9 - 49x^2}$.

37. Решите неравенство:

а) $(2x+1)^2-(x+1)(x-7)\leqslant 5$;

б) $5x(x+4)-(3+2x)(2x-3)>30$.

38. Найдите значения аргумента, при которых значения функции $f(x)=-x^2+3x+22$ больше соответствующих значений функции $g(x)=4x+2$.

39. Найдите сумму наибольшего целого отрицательного и наименьшего целого положительного решений неравенства

$$\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(x-2)^2}{4}\leqslant\frac{1-x}{2}.$$

40. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases}x^2-x-2\leqslant 0,\\ x>0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x^2-5x+2>0,\\ x-2\geqslant 0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2-8x-9\geqslant 0,\\ x^2\geqslant 4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2x^2-11x-6\leqslant 0,\\ x^2-6x\geqslant 0.\end{cases}$

41. Решите двойное неравенство $6-x<x^2\leqslant 16$.

42. Найдите область определения выражения

$$\sqrt{x^2-4x-12}+\sqrt{4-x^2}.$$

ОТВЕТЫ

Повторение курса алгебры 7-го класса

1. а) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{36}$; 1; б) $\frac{1}{49}$; $-\frac{1}{125}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; 1; в) $-\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{27}$; $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{25}$; –1; г) 1; –1; 1.

2. а) 16; б) $\frac{27}{64}$; в) 2,25; г) –125; д) $\frac{4}{25}$; е) 1.

3. а) 5; б) 1,2; в) –5; г) 36.

4. а) 0,5; б) 2500; в) 4; г) $-\frac{1}{3}$; д) $-\frac{1}{80}$; е) –0,25; ж) $-5\frac{1}{3}$; з) –100; и) –3000.

5. а) $-(-3)^{-5} > 0$; б) $-(-5)^{-6} < 0$; в) $(-3)^0 \cdot 6 - 5 > 0$; г) $-(-1{,}7)^{-6} \cdot (-2)^3 > 0$.

6. а) $\frac{1}{25}$; б) 2; в) 9; г) 64; д) 0,25; е) 6,25; ж) $\frac{1}{81}$; з) 0,75; и) 1000; к) 1; л) –8; м) –125.

7. а) 8; б) $\frac{1}{243}$.

8. а) 32; б) $\frac{1}{16}$; в) 0,01; г) $\frac{1}{16}$; д) $\frac{1}{625}$; е) $\frac{1}{32}$.

9. а) $\frac{1}{25}$; б) 0,00001; в) $\frac{1}{64}$; г) 4; д) 216; е) $\frac{1}{32}$; ж) $\frac{1}{49}$; з) $\frac{1}{25}$; и) $\frac{1}{36}$; к) 81; л) $\frac{1}{25}$; м) $\frac{1}{2}$.

10. а) 15; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{4}{7}$; г) 144.

11. а) $3a$; б) $\frac{a}{3}$; в) a^2; г) $3a^3$.

14. а) 2^{n+3}; б) 7^{m-1}; в) 3^{n+18}.

15. $1{,}230005 \cdot 10^7$; $1{,}7 \cdot 10^1$; $1{,}58 \cdot 10^{-4}$; $9 \cdot 10^6$; $7{,}586258 \cdot 10^3$; $1{,}32046 \cdot 10^1$; $6{,}9 \cdot 10^6$; $3{,}026 \cdot 10^{-2}$.

16. $3{,}02 \cdot 10^{-4}$; –4; $3{,}687 \cdot 10^{12}$; 12; $3{,}4 \cdot 10^{-10}$; –10; $5{,}7 \cdot 10^8$; 8; $1{,}42833 \cdot 10^{-4}$; –4; $6{,}50123 \cdot 10^7$; 7.

17. а) $4{,}9 \cdot 10^{17}$; $3{,}43 \cdot 10^{26}$; б) $1{,}44 \cdot 10^{-10}$; $1{,}728 \cdot 10^{-15}$.

18. Приблизительно в 81 раз.

19. а) На 3 порядка; б) на 4 порядка.

20. а) $3{,}7 \cdot 10^{10}$ г; б) $5{,}83 \cdot 10^9$ т; в) $9{,}8 \cdot 10^{-1}$ мм; г) $5{,}6 \cdot 10^{-13}$ м.

21. а) $7a^5b^7$; б) $81a^{32}b^4$; в) $4a^3b^9c$; г) $-200ab^{11}$.

22. $-7a^{13}b^{28}$.

23. $5x - 4$; $x - 10y^2 + 2$.

24. а) $16x - 5$; б) $7b + 13$; в) $x^2 + 5x + 5$; г) $-ab + 4$; д) $-10x + 3y$; е) $-32a - 13b$; ж) $-3a - 22b$; з) $8m - 9n$.

25. а) 11; б) 2,5; в) -7; г) $3\frac{2}{9}$.

26. а) $-4a^2 - 36a$; б) $3y^2 + 3y - 18$; в) $2ab$; г) $n^2 + 2$; д) $-b^2 + 3b - 6$; е) $a^2 - 10a - 2$.

27. 3,5.

28. а) 3; б) -7.

29. а) $b^2 - 12b + 36$; б) $k^2 + 2k + 1$; в) $25a^2 - 20ab + 4b^2$; г) $49a^2 - 2ab + \frac{1}{49}b^2$.

30. а) $-b^2 - 2a$; б) $9x^2 + 1$; в) $-b^2$; г) $10m + 41$; д) $8a - 32$; е) $11b - 48$; ж) 1; з) $-48xy$; и) $21a^2 - 21b^2$; к) $2a^2 + 8b^2$.

31. -120.

32. 1,5.

33. а) $3(3a - 5b)$; б) $m(3 + n)$; в) $5a(b - c)$; г) $6a(a - 4b)$; д) $x^2(x^3 + 1)$; е) $7ab(4a - 1)$; ж) $3a^2(1 - 4a^2 + 3a^4)$; з) $5x^2y(2x^2y + 5 - y^2)$.

34. а) $(a + 7)(a + b)$; б) $(x - 2)(x + 1)$; в) $(m - 2n)(5 - n)$; г) $(x - 5y)(4x + 5y)$.

35. а) $(a - 5)^2$; б) $(4x + 1)^2$; в) $(4a + 5b)^2$; г) $(m^4 - 2n)^2$.

36. а) $(n - 4)(n + 4)$; б) $(5 - 3a)(5 + 3a)$; в) $9(2a - 3b^2)(2a + 3b^2)$; г) $(mn - 1)(mn + 1)$; д) $(3a^6 - 5)(3a^6 + 5)$; е) $(x^9 - y^3)(x^9 + y^3)$.

37. а) $10(a - 1)(a + 1)$; б) $5a(a - 1)(a + 1)$; в) $3b(b - c)(b + c)$; г) $-x(2x^2 - 1)^2$; д) $(a - 5b)(a + 5b + 1)$; е) $k^4(k - 1)(k + 1)(m - 1)$.

38. а) $(m - n)(m - n - k)$; б) $(a - 2b)(1 + 4a - 8b)$; в) $4x(x + 3y^3)$; г) $(1{,}4b^2 - 1)(1 - 0{,}2b^2)$; д) $8a(a - 1)$; е) $(9x - 5)(3 - 5x)$.

39. а) 16; б) 11,2; в) -3; г) 60 000; д) 33.

40. $(a + b)(a + b - c)$.

41. а) -5; б) 2; в) $\frac{1}{12}$; г) $-8{,}25$; д) нет корней; е) любое число.

42. а) 13; б) $7\frac{7}{12}$.

43. а) 15; б) 8,5; в) $-37{,}5$; г) 13.

44. а) 0,5; б) любое число.

46. а) $\frac{2}{3}$; б) 2,25; в) -3.

47. а) $c + 8 < d + 8$; б) $c - 1{,}2 < d - 1{,}2$; в) $-5c > -5d$; г) $6c < 6d$; д) $-c > -d$.

48. а) $x < -21$; б) $x \geqslant -20$; в) $x < -35$.

49. а) Любое число; б) $x < 2{,}5$.

50. а) $x > 7$; б) $x < 1{,}25$.

51. $x \geqslant -\frac{7}{29}$; 0.

52. $x > -2\frac{2}{3}$.

53. а) $\varnothing$; б) $x > 2$.

54. 5.

55. $x < -\frac{14}{37}$.

56. а) –37; 5; –1,08; б) –3; 0,75; $1\frac{5}{8}$; в) C.

59. а) $b = 0$; б) $b = 9$; в) $b = 5$; г) $b = -13$.

62. а) (0; 2); (7; 0); б) (0; –4,5); (18; 0).

63. а) Бесконечно много решений; б) не имеет решений; в) одно решение.

64. а) (–1; 3); б) (4; –2).

65. а) (5; –2); б) (–5; –2); в) (–2; 10); г) (5; 4).

66. $y = 0{,}2x + 7{,}4$.

67. (–1; 1,4).

68. 100 пирогов и 30 тортов.

69. 560 Кбайт, 600 Кбайт.

70. Можно, если 40 человек поедут на автобусе, а 10 — на электричке.

Глава 1
Квадратные корни и их свойства. Действительные числа

1.35. а); в); д).

1.36. а) 3; б) 6; в) 20; г) 70; д) 0,5; е) 0,02; ж) 1,4; з) 1,5; и) $\frac{1}{4}$; к) $\frac{2}{5}$; л) $2\frac{2}{3}$; м) $1\frac{1}{9}$; н) $1\frac{2}{3}$; о) $1\frac{6}{7}$; п) $1\frac{4}{9}$; р) $2\frac{3}{11}$.

1.37. а) 0; б) 2; в) 30; г) 1,19; д) 6480; е) $\frac{42}{121}$; ж) $3\frac{1}{9}$; з) $3\frac{9}{25}$; и) $4\frac{13}{16}$.

1.38. а) 7; б) 2; в) 0,6; г) –0,1; д) –5,5; е) 1,3; ж) $-\frac{11}{56}$; з) 0,5; и) –65; к) 0,01; л) 30; м) $\frac{1}{3}$.

1.39. а) 65; 6500; 6,5; б) 38; 3800; 3,8.

1.40. 3,1; 2,89; 6,46; 2,5.

1.41. а) 24; б) $-6\frac{2}{3}$; в) 1,45; г) 0,185.

1.42. а) 7; б) 2; в) 1,8; г) невозможно; д) 0; е) 1.

1.43. а) 10; б) 3; в) 0,5; г) 1.

1.44. а) 1,9; б) –151; в) $-1\frac{2}{3}$; г) 40,6.

1.45. а) 1,7; б) 0,8; в) 0,4; г) 0,9.

1.46. а) 11; б) 1,3; в) 9; г) 12.

1.47. 26,4 м.

1.48. 54 м.

1.49. 1,5 м.

1.50. –17.

1.79. а) Да; б) да; в) нет; г) да; д) нет.

1.80. $\sqrt{5}$; $\sqrt{4,9}$.

1.83. 1 и 2; 3 и 4; 4 и 5.

1.84. 7; 8; 9; 10.

1.85. а) $\sqrt{35} < 6$; б) $\sqrt{2} > 1,4$; в) $\pi > 3,1415$.

1.86. $\sqrt{7}$; 3; $\sqrt{13}$.

1.87. $4,5 < 2\sqrt{2} + \sqrt{3} < 4,8$.

1.146. а) 36; б) 8,3; в) 3; г) $\frac{11}{16}$; д) 18; е) 0,07.

1.147. а) 7; 11; 50; б) –1; –3; –8.

1.148. а) 221; б) –139.

1.149. а) 24; б) 1,5; в) 8,4; г) 0,88; д) $\frac{5}{8}$; е) $\frac{7}{18}$; ж) 1,7; з) $1\frac{7}{9}$.

1.150. а) 6; б) 9,75.

1.152. а) $\frac{28}{45}$; б) $\frac{13}{150}$; в) 6,75; г) $1\frac{1}{14}$.

1.153. а) 6; б) 12; в) 6; г) 0,2; д) 0,25; е) 0,2; ж) 8; з) 10; и) $\frac{1}{18}$.

1.154. а) 400; б) 30; в) 1,5; г) 18,7.

1.155. а) $\frac{1}{3}$; б) 5.

1.156. а) 0,8; б) $\frac{2}{3}$.

1.157. а) 24; б) –60; в) –52; г) –7.

1.158. а) 9; б) 160; в) 8; г) 3,9.

1.159. а) 42; б) 17,5; в) 0,48.

1.160. а) 72; б) $\frac{4}{7}$.

1.161. а) 41,5; б) 53,4.

1.162. а) 2; б) 42; в) 0,5.

1.164. а) 31; б) $1\frac{1}{3}$; в) 13; г) 18,1.

1.165. а) $|y|$; б) $7|a|$; в) $5|n|$; г) $\frac{4|x|}{9}$.

1.166. а) c; б) $-y$; в) $5a$; г) $-\frac{x}{3}$; д) $-2m$; е) $10c$; ж) $-\frac{n}{5}$; з) $-1,5b$.

1.167. а) a^9; б) $-3b^3$; в) $4n^9$; г) $-0{,}6m^5$; д) k^4; е) $-\frac{x^8}{5}$; ж) $\frac{c^2}{7}$; з) $-\frac{6y^{10}}{11}$.

1.168. а) 125; б) 16; в) 135; г) $\frac{4}{7}$.

1.169. а) 0,006; б) 700.

1.170. а) $\frac{2}{5}m^2n^5$; б) $-\frac{2}{5}m^2n^5$.

1.171. а) $a-4$; б) $-b-2$; в) $3b+20{,}4$; г) $-4a+9{,}6$.

1.172. а) $-x+3y$; б) 12.

1.239. а) $2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{7}$; в) $7\sqrt{2}$; г) $10\sqrt{3}$; д) $6\sqrt{5}$; е) $7\sqrt{3}$; ж) $2\sqrt{5}$; з) $-\sqrt{5}$.

1.240. а) $|b|\sqrt{3}$; б) $3a^2\sqrt{2}$; в) $6k^2|p|\sqrt{2}$; г) $0{,}2y^4\left|z^3\right|\sqrt{x}$.

1.241. а) $n\sqrt{5}$; б) $-m\sqrt{7}$; в) $4m^2n^3\sqrt{3}$; г) $-\frac{2}{3}mn\sqrt{n}$; д) $m^4n^2\sqrt{24{,}1}$; е) $-m^9n^5\sqrt{4{,}3}$.

1.242. а) $6a\sqrt{b}$; б) $-4m^3n^3\sqrt{2n}$; в) $-1{,}1x^2y^3\sqrt{xy}$.

1.243. а) $x\sqrt{2x}$; б) $-y\sqrt{-y}$; в) $a^2b^2\sqrt{a}$.

1.244. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{45}$; в) $-\sqrt{50}$; г) $\sqrt{5}$; д) $-\sqrt{28}$; е) $-\sqrt{2}$.

1.245. а) $\sqrt{4x}$; б) $\sqrt{2y}$; в) $-\sqrt{36a}$; г) $-\sqrt{2b^5}$.

1.246. а) $\sqrt{2k^2}$; б) $-\sqrt{2k^2}$.

1.247. а) $\sqrt{5n^2}$; б) $-\sqrt{3m^2}$; в) $\sqrt{x^3}$; г) $-\sqrt{(b-a)^3}$.

1.248. а) $9\sqrt{2}$; б) $-3\sqrt{3}$; в) $7\sqrt{7}$; г) $-\sqrt{5}$.

1.249. а) $10\sqrt{3}$; $2\sqrt{3}$; 72; 1,5; б) $-2\sqrt{2}$; $-4\sqrt{2}$; -6; -3; в) 0; $-4\sqrt{7}$; -28; -1.

1.250. а) $13\sqrt{5}$; б) $\sqrt{6}$; в) $6\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; д) $-11\sqrt{3}$; е) 0.

1.251. а) 3; б) 50; в) 0,4.

1.252. а) 9; б) -45; в) 8; г) 3.

1.253. а) $-\sqrt{3}-3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{5}+3\sqrt{3}$.

1.254. а) $4\sqrt{6}+8$ — иррациональное число; б) $3\sqrt{2}$ — иррациональное число; в) 9 — рациональное число; г) -15 — рациональное число.

1.255. а) $4+\sqrt{6}$; б) $5+13\sqrt{5}$; в) $43\sqrt{3}-74$; г) $13\sqrt{11}-51$; д) $3-2\sqrt{6}$; е) $187-34\sqrt{35}$.

1.256. $\left(4\sqrt{3}+2\right)$ см^2.

1.257. а) 19; б) -11; в) -3; г) 15.

1.258. а) $11+6\sqrt{2}$; б) $28-6\sqrt{3}$; в) $17+2\sqrt{66}$; г) $153-30\sqrt{2}$; д) 24,5; е) 12,5.

1.259. а) 11; б) 20; в) 0; г) 110; д) 4; е) 121.

1.260. а) $4\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{21}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; г) $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

1.261. а) $-4\sqrt{2}$; б) $10\sqrt{5}$; в) 9.

1.262. а) $\sqrt{2}-1$; б) $\frac{7+\sqrt{5}}{4}$; в) $4\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)$; г) $3\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

1.263. а) $9\sqrt{11}-3$; б) -2; в) $2\sqrt{3}+2\sqrt{2}$; г) $\sqrt{7}-3\sqrt{2}$.

1.265. а) $\sqrt{7}\left(1+\sqrt{7}\right)$; б) $\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)$; в) $\sqrt{5}\left(7+\sqrt{5}\right)$; г) $\sqrt{2}\left(\sqrt{7}-1\right)$.

1.266. а) $1+\sqrt{6}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{30}}{5}$; г) $-\frac{\sqrt{15}}{5}$.

1.267. а) 2; б) 3; в) 0,5.

1.268. а) $\sqrt{3}-1$; б) $\sqrt{5}-2$; в) $3\sqrt{2}-8$; г) 2.

1.269. а) $1+\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7}-2$; в) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

1.270. а) 2; б) 10.

1.271. 1.

1.307. а); б).

1.308. а) 9; б) 0; в) 6; г) 3; д) –3; е) –9.

1.309. б); г).

1.310. а); д).

1.312. а) $[2;\ 7]$; б) $(1;\ 3]$; в) $[-5;\ 6)$; г) $[1;\ 3)$.

1.313. а) $\{6\}$; б) $(6;\ +\infty)$; в) $\varnothing$; г) $[4;\ 9)$.

1.314. а) $[-3;\ 12]$; б) $(0;\ 5]$; в) $(-\infty;\ 11]$; г) $(-5;\ +\infty)$.

1.315. а) $[-2;\ 8)$; б) $[3;\ +\infty)$; в) $[2;\ 4]$; г) $\left[-2;\ \sqrt{5}\right]$.

1.316. а) $(-8;\ -3)$; $(-\infty;\ +\infty)$; б) $\varnothing$; $(-2;\ 12)$; в) $\varnothing$; $(0;\ +\infty)$; г) $\left(0;\ \sqrt{5}\right)$; $(-\infty;\ 12)$; д) $(-7;\ 12)$; $[-7;\ 12]$; е) $\left(0;\ \sqrt{10}\right)$; $\left[0;\ \sqrt{10}\right]$.

1.371. в).

1.372. а) $[4;\ 5]$; б) $(-\infty;\ 4)$; в) $[7;\ +\infty)$; г) $\varnothing$.

1.373. а) 4; б) 0.

1.375. а) $[0{,}6;\ 2)$; б) $[-5;\ 0)$; в) $[-2{,}5;\ 7{,}5]$; г) $(0{,}5;\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ 3]$; е) $(-\infty;\ 5)$.

1.376. а) $[3;\ 7]$; б) $[0{,}25;\ +\infty)$.

1.377. а) $[0;\ 17)$; б) $\left[-4{,}2;\ -1\frac{8}{13}\right)$.

1.378. а) $(-\infty;\ 2)$; б) $\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right]$; в) $\left[-1\frac{2}{3};\ 3{,}5\right)$; г) $\left(-\frac{2}{3};\ 4{,}2\right]$.

1.379. а) $\left(-\frac{2}{3};\ +\infty\right)$; б) $[-5;\ 17)$.

1.380. 48.

1.381. Больше 14, но меньше 24 см.

1.382. Более 100, но менее 150 мин.

1.383. а) $(-\infty; 4]$; б) $[5; +\infty)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 3] \cup [7; +\infty)$.

1.384. а) $(-\infty; 2] \cup (5; +\infty)$; б) $(-\infty; 0) \cup [2,5; +\infty)$; в) $(-\infty; 1,4]$.

1.385. а) $(-2; 4]$; б) $[1; 7)$; в) $[-9; 5)$; г) $(-2; 2)$.

1.386. $\left[-5; \frac{3}{8}\right]$.

1.387. а) $[-2; 3)$; б) $[-5; 11)$; в) $(-10; 20)$.

1.388. а) $\left(-12; -\frac{1}{3}\right]$; б) $\left(-3\frac{4}{7}; -\frac{4}{7}\right]$.

1.389. $[5; 7,1)$.

1.390. 4; 0.

1.391. а) $(-\infty; -2)$; б) $\varnothing$.

1.392. При $a \geqslant 5$.

1.393. При $a \in [-8; +\infty)$.

Я проверяю свои знания

2. а); в); г); д); е).

3. а) 8; б) –25; в) 5; г) 2,6.

4. а) $(-0,8; -0,5]$; б) $(-\infty; 4) \cup [7,5; +\infty)$; в) $[-0,5; +\infty)$; г) $(-\infty; +\infty)$.

5. а) 60; 0,8; б) 0,63; $2\frac{1}{3}$; в) 0,5; 3,8.

6. 48.

7. а) $4\sqrt{5}$; б) $7\sqrt{3}$; в) –13; г) $-2\sqrt{21}$.

8. $[-0,25; 15]$.

9. а) $\sqrt{3(c-2)^3}$; б) $-\sqrt{5(9-n)^3}$.

10. а) $\sqrt{6}-1$; б) $\sqrt{3}+1$; в) $3+\sqrt{2}$.

Практическая математика

1. 26 кустов.

2. От 81 до 99 мешков.

Глава 2
Квадратные уравнения

2.23. а) 0; 7; б) $-\frac{2}{3}$; 0; в) –6; 6; г) –1,25; 1,25; д) –8; 0; е) $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$; ж) 0; 2; з) нет корней; и) 0; 5.

2.24. а) –9; 9; б) –15; 0; в) –4; 4; г) –7; 0.

2.25. 4.

2.26. а) 0; 1,75; б) –4; 4; в) –2; 2; г) нет корней.

2.27. а) –1; 0; б) 0; $2\frac{1}{3}$.

2.28. а) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; б) –2; 2.

2.29. а) –23; 0; б) –1; 1; в) 0; $1\frac{1}{3}$; г) 0.

2.30. 0; 3.

2.31. При $a = 1$.

2.67. а) –0,4; 1; б) –2; 0,5; в) $\frac{1}{3}$; 3; г) –1,5; 1; д) 1; 4; е) –3; –0,5; ж) $-1\frac{2}{3}$; 1; з) 3.

2.68. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; б) –5; –4; в) –1; 0,75; г) 1; $1\frac{2}{3}$; д) 1,5; е) $\frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$.

2.69. а) –1; 0,6; б) –1; 5; в) –2; 0,25; г) $-1\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$.

2.70. При $x = 1$.

2.71. а) –9; 2; б) $-\frac{1}{2}$; 5; в) $-\frac{1}{3}$; 2,5; г) –0,5; 1,5.

2.72. а) 2; 5; б) 4; 5; в) –4; 1; г) –19; 1.

2.73. –4 и –2 или 2 и 4.

2.74. а) 1; 7; б) 1; 4; в) 8; г) –11; $-\frac{1}{3}$.

2.75. а) $-\frac{1}{3}$; 1; б) $-\frac{2}{9}$; 1.

2.76. 1; 2,75.

2.77. а) –9; –1; б) $-1\frac{1}{8}$; 1; в) –1; 1,5; г) –1; 0,6.

2.78. а) 2,5; 6; б) –1,5; 3; в) $\frac{3}{8}$; 1; г) –10; 1.

2.79. а) $\frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{2}$; в) 1; $\sqrt{5}$; г) $-\sqrt{6}$; 2.

2.80. а) При $c < -4$; б) при $c > -4$.

2.81. 3; 5.

2.118. а) 5; 1; б) –8; –3; в) 9; $-\sqrt{2}$; г) нет корней; д) –6; 7; е) –3,5; –6,5; ж) 8; 0; з) 0; –4,25.

2.121. а) 1; 4; б) –7; –1; в) 3; 5; г) –1; 3; д) 2; 9; е) –13; –1; ж) –3; 7; з) –7; 8.

2.122. а) –2; б) –7.

2.123. а) 25; б) 21.

2.125. а) –2; –12; б) –0,75; –3.

2.126. –6; 3; $q = 18$.

2.128. 2; 12; $q = 24$.

2.129. $x^2 \pm 3x - 10 = 0$.

2.151. а) $\frac{1}{3}$; 3; б) 2; 6; в) 0,2; г) нет корней.

2.152. а) $(x + 5)(x - 4)$; б) $(x - 2)(x - 5)$; в) $(2x + 5)(x - 1)$; г) $(x - 1)(3x + 1)$; д) $(x+1)(3x-2)$; е) $-(x+7)(x-5)$; ж) $(x-1)(1-4x)$; з) $(x+4)^2$; и) $(3x+14)(x-1)$; к) $(2x-3)^2$; л) невозможно; м) невозможно.

2.153. а) $(2x-3)(3x+4)$; б) $(1-3x)(4x+1)$.

2.154. а) $\left(x+1-\sqrt{2}\right)\left(x+1+\sqrt{2}\right)$; б) $\left(x-2-\sqrt{6}\right)\left(x-2+\sqrt{6}\right)$;

в) $3\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{3}\right)$.

2.155. а) $(x+4)(x+10)$; б) $(x-2)(3x-1)$; в) $(2x-3)(3x-1)$; г) $(6x+1)^2$.

2.156. а) $x(x+4)(x-3)$; б) $x(x-4)(2-3x)$; в) $x^2(x-4)(2x+1)$; г) $-x^2(6x-1)^2$.

2.157. $(x^2+3)(x-5)(x+2)$.

2.158. $(x-4y)(3x-2y)$.

2.193. 3 и 9.

2.194. 6 и 7.

2.195. а) 9; б) $2\frac{1}{3}$.

2.196. а) 2 и 7; б) –8 и –7; 7 и 8; в) 7 и 8.

2.197. Три по 35 м.

2.198. Нет.

2.199. На втором.

2.200. 11.

2.201. 16.

2.202. 12×18 м, 216 м^2.

2.203. 15 дм.

2.204. Нет.

2.205. 5 %.

2.206. –17 и –16; 16 и 17.

2.207. –13, –12, –11; 11, 12, 13.

2.208. 40 %.

2.229. а) –2; –1; 1; 2; б) –1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}$; 1; в) –1; 1; г) –2; $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 2.

2.230. а) 0; б) –3; –1; 1; 3.

2.231. а) –6; 0; б) 0,5; 1; 2; 2,5.

2.232. а) 1; 2; 3; 4; б) –1; 2; 4; 7.

2.233. а) –4; 3; б) 0; 3; в) $-1\pm\sqrt{2}$; г) –2; –1.

2.234. а) –4; 1; б) $4\pm\sqrt{5}$.

2.235. а) –4; 2; б) –1; 2; 5.

2.236. а) –9; –1; 1; 9; б) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

Я проверяю свои знания

1. а) $a = 7$; $b = -6$; $c = 3$; б) $a = 2$; $b = -1$; $c = -5$; в) $a = 3$; $b = 0$; $c = -8$; г) $a = 1$; $b = -6$; $c = 0$.

2. а) 29; б) –20; в) 0; г) 13.

3. а) –2; 2; б) $-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; 0; г) нет корней; д) 5; е) –3; 2; ж) –2; 0,4.

4. а) $(x+4)(x+5)$; б) $-(x-1)(x-3)$; в) $(x-2)(2x+1)$; г) $(5x+1)^2$.

5. $\frac{1}{2}$; 2.

6. 149,6 м.

7. –3,25.

8. а) $-\sqrt{10}$; –1; 1; $\sqrt{10}$; б) –1; 6; $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$; в) 1; –1,5; $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$; г) –2; 1; 4.

9. В банке A.

10. $(2x+3y)(3x-4y)$.

Практическая математика

1. 12.

2. 9 м^2.

3. 20 %.

4. 30 человек.

Глава 3
Квадратичная функция

3.50. а); г).

3.51. г).

3.52. а) 19; б) –2; в) –4; –2.

3.53. а) (–5; –4); $x = -5$; б) (8; 1); $x = 8$; в) (0; 6); $x = 0$; г) (1; 0); $x = 1$.

3.54. в).

3.55. а) –7; б) 7; в) –4; г) 10.

3.56. а) $D = \boldsymbol{R}$; $E = (-\infty; 8]$; б) $D = \boldsymbol{R}$; $E = [-13; +\infty)$; в) $D = \boldsymbol{R}$; $E = [-144; +\infty)$; г) $D = \boldsymbol{R}$; $E = (-\infty; 0]$.

3.57. а) (–2; 0); (8; 0); (0; –16); б) (1; 0); (7; 0); (0; –7); в) (3; 0); (9; 0); (0; –27); г) (0; 1).

3.62. $A(-1; 0)$; $B(4{,}5; 0)$.

3.64. б).

3.66. а) $R(x) = 50x$; б) 700 р., 1000 р., 300 р.; г) 30.

3.67. 128.

3.68. $b = -9$; $c = 14$.

3.70. а) (0,5; –60,75); б) $x = 0{,}5$; в) –60,75.

3.71. (1; –2).

3.114. б).

3.115. а) Убывает на промежутке $(-\infty; -5]$ и возрастает на промежутке $[-5; +\infty)$; б) убывает на промежутке $[-1{,}5; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; -1{,}5]$; в) убывает на промежутке $(-\infty; 0]$ и возрастает на промежутке $[0; +\infty)$; г) убывает на промежутке $\left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$ и возрастает на промежутке $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right]$.

3.117. $x = -6$.

3.119. б); г).

3.120. а) $f(5) < f(6)$; б) $f(2) > f(3)$; в) $f(-2{,}4) > f(3{,}75)$.

3.121. а) $g(-6{,}5)$; $g(-4{,}8)$; $g(-3)$; б) $g(18)$; $g(15)$; $g(10)$.

3.122. а) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$, $y < 0$ при $x \in (-4; 2)$; б) $y > 0$ при $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right)$, $y < 0$ при $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$; в) $y > 0$ при $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; г) $y < 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$.

3.123. а) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$; б) $y > 0$ при $x \in (-9; 1{,}5)$; в) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; г) $y > 0$ при $x \in (0; 5)$.

3.128. $m > 1\frac{1}{8}$.

3.171. а) $(-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$; б) $(1; 2)$; в) $(-\infty; 0) \cup (7; +\infty)$; г) $[-2; 2]$; д) $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$; е) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $\varnothing$.

3.172. а) $(-\infty; 0{,}5) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; б) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$; в) $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$; г) $(-4; 4)$; д) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$; е) $(-\infty; -3] \cup [0{,}5; +\infty)$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $\{4\}$.

3.173. а) 1; 2; 3; б) –1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; в) –2; –1; 0; 1; 2; г) 0; 1.

3.174. а) $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$; б) $[-3; 3]$.

3.175. а) $\left[-\frac{1}{9}; 1\right]$; б) $(-6; 6)$; в) $[0; 3]$; г) $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; д) $\varnothing$; е) $\left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right]$; ж) $(-\infty; +\infty)$; з) $(-\infty; 0] \cup [7; +\infty)$.

3.176. а) $\left(-1 - 2\sqrt{2}; -1 + 2\sqrt{2}\right)$; б) $\left(-\infty; \frac{7 - \sqrt{29}}{10}\right] \cup \left[\frac{7 + \sqrt{29}}{10}; +\infty\right)$.

3.177. а) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$; б) $\left[0; 1\frac{2}{3}\right]$.

3.178. а) $(-\infty; -9) \cup (5; +\infty)$; б) $\left\{-1\frac{1}{3}\right\}$.

3.179. $(-1; 4{,}5)$.

3.180. а) $(1; 3)$; б) $(-\infty; -0{,}5] \cup [1; +\infty)$; в) $(-5; -1)$; г) $\left[0; 2\frac{2}{3}\right]$.

3.181. Не более 10 рядов.

3.182. а) –2; 0; б) 2; 4; в) 0; 2; г) –4; 4.

3.183. а) $[-3; 2]$; б) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

3.184. а) $(-\infty; -6] \cup [4; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $(-\infty; 1) \cup (1{,}8; +\infty)$;
г) $\left(-\infty; 5 - \sqrt{5}\right) \cup \left(5 + \sqrt{5}; +\infty\right)$.

3.185. $\left[-\frac{2}{3}; 1\right]$.

3.187. а) $[0{,}4; 4]$; б) $(-\infty; -3] \cup \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right)$; в) $(-2{,}6; 3)$; г) $(-\infty; -9) \cup (9; +\infty)$.

3.188. $[-1; 0{,}75]$.

3.189. а) $(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$; б) $(-\infty; -2{,}5] \cup [1{,}5; +\infty)$; в) $\left[0; \frac{1}{2}\right]$; г) $\left(-1; -\frac{1}{3}\right)$.

3.190. $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

3.218. а) $[-4; -3) \cup (8; 9]$; б) $(5; 6]$.

3.219. $[2; 4)$.

3.220. а) $\left(-\frac{1}{3}; 0\right]$; б) $(1{,}75; +\infty)$.

3.221. а) 1; 2; б) -5; 5.

3.222. $(-3; -2) \cup (2; 3)$.

3.223. а) $\{-5\} \cup [3; 5]$; б) $(0; 0{,}5]$.

3.224. а) $[-1; 1]$; б) $\{5\}$.

3.225. 18.

3.226. 2.

3.227. а) $[-1; 0) \cup (6; 7]$; б) $[-4; -1) \cup (2; 4]$.

3.228. а) $[-1; 3] \cup (4; 7)$; б) $(-\infty; +\infty)$.

3.229. $(-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; +\infty)$.

3.230. а) $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$; б) $(-\infty; +\infty)$.

3.231. а) $(-\infty; 0{,}75)$; б) $(-\infty; 6]$.

Я проверяю свои знания

1. а); б); в); д).

2. б).

3. а) -3; б) 3; в) -9.

4. а) $(1; -3)$; б) $(-6; 5)$; в) $(2; -16)$; г) $(0; 9)$.

5. а) $(-\infty; 1] \cup [10; +\infty)$; б) $(-2; -0{,}25)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $\{4\}$; д) $\left(0; \frac{1}{3}\right)$;
е) $(-\infty; -1{,}5] \cup [1{,}5; +\infty)$.

6. $f(x) = (x - 4)^2 - 1$ (рис. 109); а) $D = \boldsymbol{R}$; б) $E = [-1; +\infty)$; в) -1; г) $x = 4$; д) 3; 5; е) $y > 0$ при $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (3; 5)$; ж) промежуток возрастания $[4; +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty; 4]$.

$g(x) = -2x^2 + 8x - 6$ (рис. 110); а) $D = \boldsymbol{R}$; б) $E = (-\infty; 2]$; в) 2; г) $x = 2$; д) 1; 3;

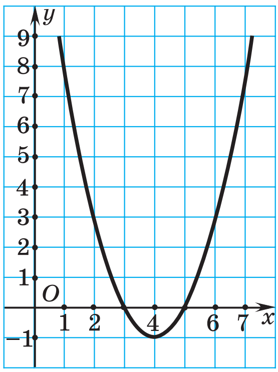


Рис. 109

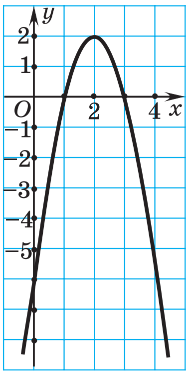


Рис. 110

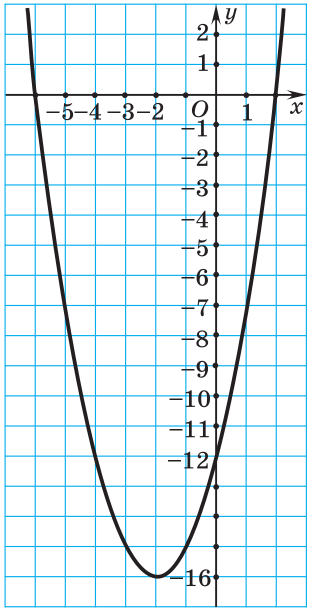


Рис. 111

е) $y > 0$ при $x \in (1; 3)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; 1) \cup (3; +\infty)$; ж) промежуток возрастания $(-\infty; 2]$, промежуток убывания $[2; +\infty)$.

$h(x) = (x - 2)(x + 6)$ (рис. 111); а) $D = \boldsymbol{R}$; б) $E = [-16; +\infty)$; в) -16; г) $x = -2$; д) -6; 2; е) $y > 0$ при $x \in (-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-6; 2)$; ж) промежуток возрастания $[-2; +\infty)$, промежуток убывания $(-\infty; -2]$.

7. а) $(-1; 0] \cup [6; 10)$; б) $[-5; -3)$.

8. а) $(-\infty; -4] \cup (-0{,}5; 6)$; б) $(-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$.

9. а) 300 р.; б) 30 ваз.

10. а) $(-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$; б) $\left(-2\sqrt{15}; 2\sqrt{15}\right)$.

Практическая математика

1. 625 м^2.

2. Около 1,5 ч.

3. 6,2 м.

4. а) 17,5 м; 12,5 м; б) 20 м; в) $\alpha = 1{,}75$ с, $\beta = 20$ м; г) $y = -12{,}5x + 50$.

Глава 4
Функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

4.27. а); в); г).

4.28. а) –7; 4; б) 2.

4.29. в).

4.30. в); г); е).

4.31. а) $f(7) < f(12)$; б) $f(-3{,}8) > f(-3{,}9)$.

4.32. –6.

4.39. а) (–6; –6); (6; 6); б) $\left(-\sqrt{5};\ -\sqrt{5}\right)$; $\left(\sqrt{5};\ \sqrt{5}\right)$.

4.56. 1; –27; 0,001; –15,625.

4.57. –1; 3; –5; $\sqrt{7}$.

4.58. а); б); в).

4.59. а) $f(3{,}6) < f(4{,}8)$; б) $f(-10{,}25) < f(-8{,}26)$; в) $f\left(\sqrt{11}\right) > f(3)$; г) $f\left(-\sqrt{3}\right) < f\left(-\sqrt{2}\right)$.

4.61. 1.

4.75. 4; 4; 0,8; 0,8.

4.76. –5; 5; 0; –48; 48.

4.77. б); г).

4.78. а) $f(7) < f(10)$; б) $f(-56{,}32) < f(-58{,}97)$; в) $f\left(3\sqrt{3}\right) > f(5)$; г) $f\left(\sqrt{8}\right) = f\left(-2\sqrt{2}\right)$.

4.80. а) –15; б) 8.

4.104. 1; 5; 1,6.

4.105. 144; 0,64; 18.

4.106. а); г); д).

4.107. $f(0{,}1)$; $f(2)$; $f(3{,}8)$; $f(5)$.

4.108. а) $\sqrt{11} < \sqrt{13}$; б) $\sqrt{37} > 6$; в) $2\sqrt{6} < 4\sqrt{7}$.

4.109. 7; $\sqrt{47}$; $3\sqrt{5}$.

4.110. 9 и 10.

Я проверяю свои знания

2. а); в).

3. а) 9; б) 3; в) –2; г) 729.

4. а) –8; 8; б) 64; в) 3; г) 2.

7. а) $f(5{,}12)$; $f(9{,}29)$; $f(13{,}7)$; б) $f(5{,}12)$; $f(9{,}29)$; $f(13{,}7)$; в) $f(13{,}7)$; $f(9{,}29)$; $f(5{,}12)$; г) $f(5{,}12)$; $f(9{,}29)$; $f(13{,}7)$.

8. 0.

9. $f\left(\frac{36}{8 - 2\sqrt{7}}\right) > f\left(8 - 2\sqrt{7}\right)$.

10. $y = \frac{1}{x}$.

Повторение курса алгебры 8-го класса

1. 36; 0; 0,04; 1; 0,49.

2. а) –11; б) $6\frac{7}{12}$; в) 35; г) 10,5.

3. а) –0,03; б) 7; в) 1,1.

4. а) 4,5; б) –30; в) 69; г) $1\frac{1}{3}$.

5. а) 2,8; б) 40; в) 200; г) 18; д) $\frac{6}{13}$; е) 4,25; ж) 12; з) 20; и) 18.

6. а) $45\sqrt{3}$; б) $-12\sqrt{6}$; в) 5; г) 6; д) $39-12\sqrt{3}$; е) 6; ж) 44; з) 4.

7. а) $-2\sqrt{5}$; б) 11,5.

8. а) $3\sqrt{7}$; б) $2\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$; в) $\frac{2\sqrt{3}-1}{11}$.

9. $7x^3$.

10. а) 2; б) $a-1$.

11. а) $\sqrt{72}$; б) $\sqrt{7a^2}$; в) $-\sqrt{3b^2}$; г) $\sqrt{n^3}$; д) $\sqrt{-c^3}$.

12. 147,5.

13. 6.

14. а) –0,25; 0; б) –3; 3; в) 0; 18; г) –5; 5; д) –1; 0; е) –1; 1; ж) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; з) нет корней.

15. а) –2; 8; б) нет корней; в) 2; 5; г) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$.

16. а) –2; $\frac{2}{3}$; б) нет корней; в) $-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}$; г) 1; 6; д) –2; 10; е) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$.

18. а) 2; 9; б) –2; 7; в) –2; 3; г) –3; 1; д) –7; 3; е) –11; –5.

19. д) $7x^2+6x-1=0$.

21. –5,5.

22. p^2+26.

23. а) $(x-8)(x+1)$; б) $(x+2)(4x+1)$; в) невозможно разложить.

24. а) $(2x-1)(3x+1)$; б) $(x+5)(1-x)$.

25. а) $-\sqrt{6}$; –1; 1; $\sqrt{6}$; б) –0,5; 0,5; в) нет корней.

26. а) $-\sqrt{5}$; –1; 1; $\sqrt{5}$; б) –6; –4; –1; 1; в) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; г) –3; 2; д) $-1\pm\sqrt{13}$; е) 1; 2; $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$; ж) –1,5; 1; $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$; з) 2; 8; $5\pm2\sqrt{2}$.

28. а) –5; б) $-1\frac{2}{3}$; 1; в) –2; $1\frac{1}{3}$.

30. а) (4; 5); функция возрастает на промежутке $[4; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 4]$; б) (–2; –7); функция возрастает на промежутке $(-\infty; -2]$ и убывает на промежутке $[-2; +\infty)$; в) (0; 4); функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$; г) (1; 0); функция возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$ и убывает на промежутке $[1; +\infty)$.

31. в).

33. $b = -2$; $c = -12$.

34. 57,25.

35. а) $(-\infty; -3] \cup [5; +\infty)$; б) $\varnothing$; в) $[-1,5; 2,5]$; г) $\{4\}$; д) $(-\infty; +\infty)$; е) $(-12; 2)$; ж) $[-6; 6]$; з) $(-\infty; -0,2) \cup (0; +\infty)$; и) $(-\infty; -0,5] \cup [0,5; +\infty)$; к) $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; +\infty\right)$.

36. а) $(-\infty; -2] \cup [9; +\infty)$; б) $\left[\frac{1}{2}; 1\frac{2}{3}\right]$; в) $(-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$; г) $\left[-\frac{3}{7}; \frac{3}{7}\right]$.

37. а) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; б) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$.

38. $(-5; 4)$.

39. 0.

40. а) $(0; 2]$; б) $(2; +\infty)$; в) $(-\infty; -2] \cup [9; +\infty)$; г) $[-0,5; 0] \cup \{6\}$.

41. $[-4; -3) \cup (2; 4]$.

42. $\{-2\}$.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 3
Квадратичная функция

Глава 4
Функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, $y = x^3$, $y = |x|$, $y = \sqrt{x}$

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

АЛГЕБРА

Учебное пособие для **8** класса
учреждений образования, реализующих
образовательные программы общего среднего образования,
с русским языком обучения и воспитания

2-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*.
Художественный редактор *Е. А. Ждановская*.
Обложка *Н. В. Кузьменковой*.
Техническое редактирование и компьютерная верстка
И. И. Дубровской, Г. А. Дудко.
Корректор *О. С. Козицкая*.

Подписано в печать 18.05.2024. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0 + 0,25 форз.
Уч.-изд. л. 11,7 + 0,3 форз. Тираж 118 000 экз. Заказ .

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство "Адукацыя і выхаванне"».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.
Ул. Буденного, 21, 220070, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.

(Название учреждения образования)

Учебный год	Имя и фамилия учащегося	Состояние учебного пособия при получении	Оценка учащемуся за пользование учебным пособием
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Учебное издание

Арефьева Ирина Глебовна
Пирютко Ольга Николаевна

АЛГЕБРА

Учебное пособие для **8** класса
учреждений образования, реализующих
образовательные программы общего среднего образования,
с русским языком обучения и воспитания

2-е издание, исправленное и дополненное

Зав. редакцией *Г. А. Бабаева*. Редактор *Н. М. Алганова*.
Художественный редактор *Е. А. Ждановская*.
Обложка *Н. В. Кузьменковой*.
Техническое редактирование и компьютерная верстка
И. И. Дубровской, Г. А. Дудко.
Корректор *О. С. Козицкая*.

Подписано в печать 18.05.2024. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,0 + 0,25 форз.
Уч.-изд. л. 11,7 + 0,3 форз. Тираж 118 000 экз. Заказ .

Республиканское унитарное предприятие
«Издательство “Адукацыя і выхаванне”».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/19 от 02.08.2013.
Ул. Буденного, 21, 220070, Минск, Республика Беларусь.

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.
Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск, Республика Беларусь.