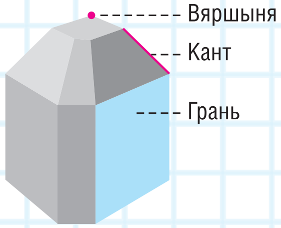
Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі, І. У. Гарбунова

ГЕАМЕТРЫЯ

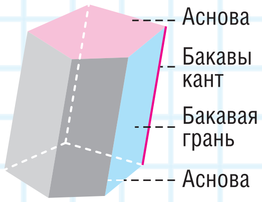
10

Целы

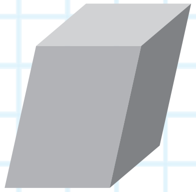
Мнагаграннік



Прызма

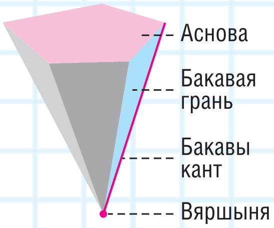


Паралелепіпед

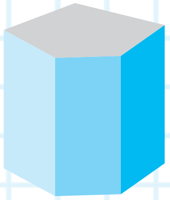


Супрацьлеглыя грані роўныя.
Супрацьлеглыя канты роўныя.
Супрацьлеглыя грані паралельныя.
Дыяганалі перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Піраміда



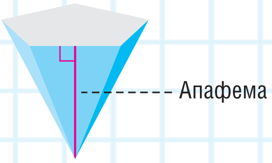
Прамая прызма



$S_{бак} = Pl$

P — перыметр асновы,
l — бакавы кант.

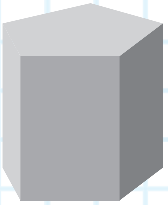
Правільная піраміда



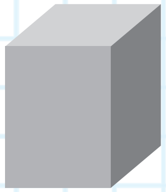
$S_{бак} = pl$

p — паўперыметр асновы,
l — апафема.

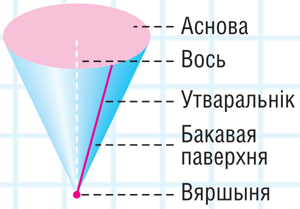
Правільная прызма



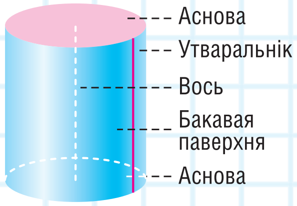
Прамы паралелепіпед



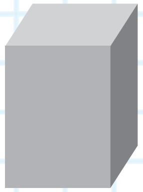
Конус



Цыліндр



Прамавугольны паралелепіпед



$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

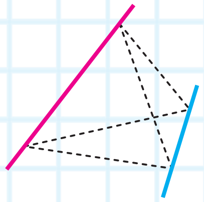
d — дыяганаль,
a, b, c — вымярэнні.

Прамыя ў прасторы

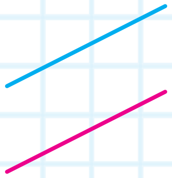
Дзве прамыя

Належаць адной плоскасці: Не → Скрыжаваныя; Так → Маюць агульны пункт: Не → Паралельныя; Так → Перасякальныя

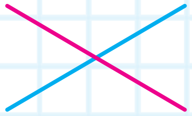
Скрыжаваныя



Паралельныя



Перасякальныя

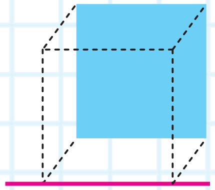


Прамая і плоскасць у прасторы

Прамая і плоскасць

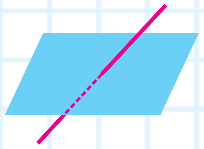
Маюць агульныя пункты: Не → Паралельныя; Так → Агульны пункт адзіны: Не → Прамая ляжыць у плоскасці; Так → Перасякальныя

Паралельныя



Прамая ляжыць у плоскасці

Перасякальныя



Дзве плоскасці ў прасторы

Дзве плоскасці

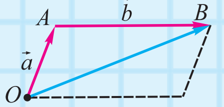
Маюць агульныя пункты: Не → Паралельныя; Так → Перасякальныя

Паралельныя

Перасякальныя

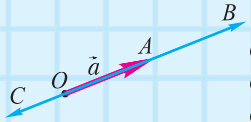
Вектары

Складанне вектараў



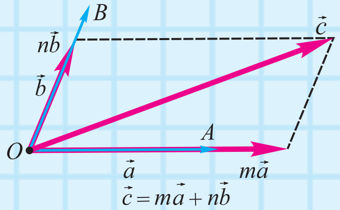
$\vec a = \overrightarrow{OA}$
$\vec b = \overrightarrow{AB}$
$\vec a + \vec b = \overrightarrow{OB}$

Множанне вектара на лік



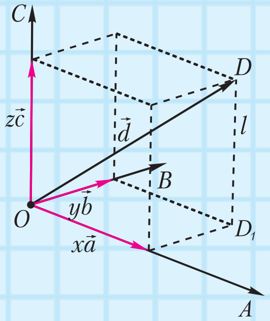
$\overrightarrow{OA} = \vec a$
$\overrightarrow{OB} = k\vec a,\ k > 0$
$\overrightarrow{OC} = l\vec a,\ l < 0$

Выражэнне любога вектара праз два некалінеярныя вектары



$\vec c = m\vec a + n\vec b$

Выражэнне любога вектара праз тры некампланарныя вектары

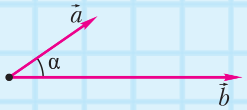


Вектары $\vec a, \vec b, \vec c$ кампланарныя толькі тады, калі $m\vec a + n\vec b + k\vec c = \vec 0$ і $m^2 + n^2 + k^2 \neq 0$.

Калі вектары $\vec a, \vec b, \vec c$ некампланарныя, то праз іх адназначна выражаецца любы вектар $\vec d$:

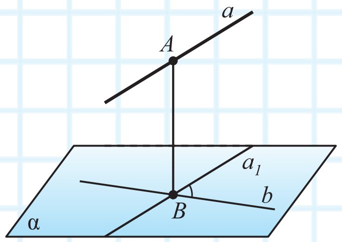
$\vec d = x\vec a + y\vec b + z\vec c$

Скалярны здабытак вектараў



$\vec a \cdot \vec b = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos\alpha$

Дзве прамыя ў прасторы



Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, паралельнымі дадзеным скрыжаваным прамым.

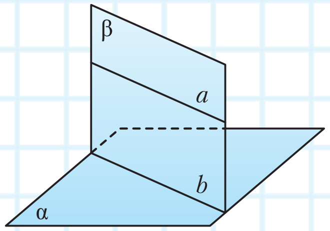
Калі $a \dot{-} b$, $a_1 \parallel a$ і $a_1 \cap b = B$, то $\angle (a, b) = \angle (a_1, b)$.

Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

Калі $a \dot{-} b$, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$ і $AB \perp b$, то $d(a, b) = AB$.

Прамая і плоскасць у прасторы

Паралельнасць прамой і плоскасці



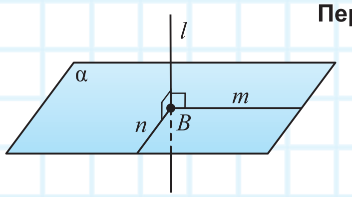
Калі прамая, што не ляжыць у плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.

Калі $a \not\subset \alpha$, $a \parallel b$ і $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.

Калі плоскасць праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, і перасякае гэту плоскасць, то лінія перасячэння паралельная гэтай прамой.

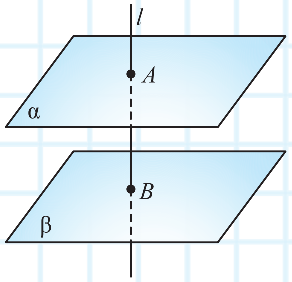
Калі $a \parallel \alpha$, $a \subset \beta$ і $\beta \cap \alpha = b$, то $b \parallel a$.

Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці



Калі прамая перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Калі $l \perp m$, $m \subset \alpha$, $l \perp n$, $n \subset \alpha$ і $m \cap n \neq \varnothing$, то $l \perp \alpha$.



Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

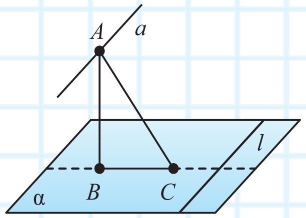
Калі $l \perp \alpha$ і $\alpha \parallel \beta$, то $l \perp \beta$.

Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.

Калі $\alpha \perp l$ і $\beta \perp l$, то $\alpha \parallel \beta$.

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

Калі $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$ і $AB \perp \beta$, то $d(\alpha, \beta) = AB$.



Прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць тады і толькі тады, калі яна перпендыкулярная самой нахіленай.

Калі $BC = \text{Пр}_\alpha AC$ і $l \subset \alpha$, то $l \perp BC$ раўназначна $l \perp AC$.

Вуглом паміж прамой і плоскасцю, што перасякае гэту прамую і не перпендыкулярная ёй, называецца вугал паміж прамой і яе праекцыяй на плоскасць.

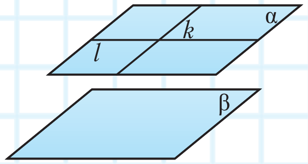
Калі $\text{Пр}_\alpha AC = BC$ і $AC \not\perp \alpha$, то $\angle (AC, \alpha) = \angle ACB$.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага да плоскасці з якога-небудзь пункта прамой.

Калі $a \parallel \alpha$, $A \in a$, $AB \perp \alpha$ і $B \in \alpha$, то $d(a, \alpha) = AB$.

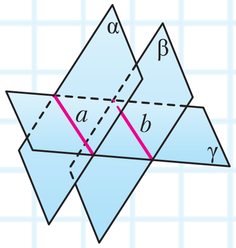
Дзве плоскасці ў прасторы

Паралельнасць плоскасцей



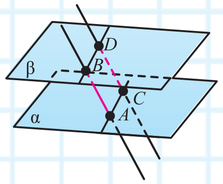
Калі плоскасць праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя іншай плоскасці, то яна паралельная гэтай самай плоскасці.

Калі $k \subset \alpha$ і $k \parallel \beta$, $l \subset \alpha$ і $l \parallel \beta$ і $l \cap k \neq \varnothing$, то $\alpha \parallel \beta$.



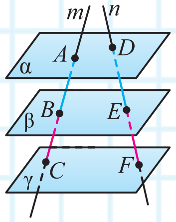
Лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю паралельныя адна адной.

Калі $\alpha \cap \gamma = a$ і $\beta \cap \gamma = b$, $\alpha \parallel \beta$, то $a \parallel b$.



Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя адзін аднаму.

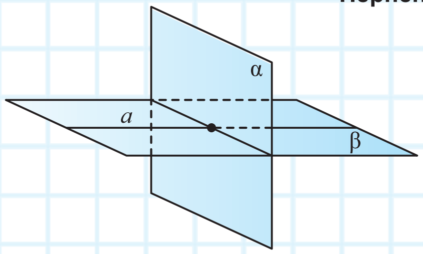
Калі $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$ і $AB \parallel CD$, то $AB = CD$.



Адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

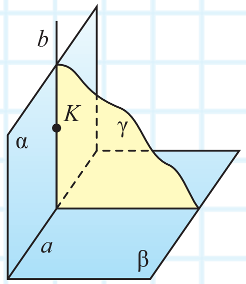
Калі $l \parallel \beta \parallel \gamma$, $A \in \alpha$, $D \in \alpha$, $B \in \beta$, $E \in \beta$, $AB \cap \gamma = C$, і $DE \cap \gamma = F$, то $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$.

Перпендыкулярнасць плоскасцей



Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то такія плоскасці перпендыкулярныя.

Калі $a \subset \beta$ і $a \perp \alpha$, то $\beta \perp \alpha$.



Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння дзвюх дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная да кожнай з іх.

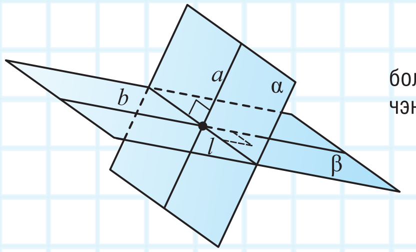
Калі $\alpha \cap \beta = a$ і $\gamma \perp a$, то $\gamma \perp \alpha$ і $\gamma \perp \beta$.

Калі дзве перасякальныя плоскасці перпендыкулярныя трэцяй плоскасці, то іх лінія перасячэння перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Калі $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ і $\alpha \cap \beta = a$, то $a \perp \gamma$.

Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей правесці прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэта прамая належыць першай плоскасці.

Калі $\alpha \perp \beta$, $K \in \alpha$, $K \in b$ і $b \perp \beta$, то $b \subset \alpha$.



Вуглом паміж перасякальнымі плоскасцямі называецца не большы за 90° вугал паміж перпендыкулярамі да лініі іх перасячэння, праведзенымі ў кожнай плоскасці.

Калі $\alpha \cap \beta = l$, $a \subset \alpha$, $a \perp l$, $b \subset \beta$, і $b \perp l$, то $\angle (\alpha, \beta) = \angle (a, b)$.

Л. А. Латоцін, Б. Д. Чабатарэўскі, І. У. Гарбунова

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў
агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Дапушчана Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск
«Адукацыя і выхаванне»
2020

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
Л27

Р э ц э н з е н т ы: кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт *С. Г. Кананаў*); настаўнік матэматыкі вышэйшай кваліфікацыйнай катэгорыі дзяржаўнай установы адукацыі «Гімназія № 25 г. Мінска» *С. А. Скарукіна*

ISBN 978-985-599-209-8

ПАВАЖАНЫЯ ДЗЕСЯЦІКЛАСНІКІ!

У гэтым навучальным годзе вы будзеце вывучаць геаметрыю прасторы — стэрэаметрыю. Калі ў планіметрыі асноўнымі аб'ектамі вывучэння з'яўляюцца пункт, прамая і тыя фігуры, усе пункты якіх належаць адной плоскасці, то ў стэрэаметрыі да асноўных аб'ектаў вывучэння дадаецца плоскасць і вывучаюцца тыя фігуры, што маюць тры вымярэнні і якія прынята называць целамі. Да асноўных цел адносяцца прызма, цыліндр, піраміда, конус, шар.

Стэрэаметрыя, як і планіметрыя, узнікла ў Старажытным Егіпце і развівалася ў сувязі з патрэбамі практычнай дзейнасці чалавека. Пры ўзвядзенні розных збудаванняў патрабавалася разлічыць, колькі матэрыялу спатрэбіцца, умець вылічваць адлегласці паміж пунктамі ў прасторы і велічыні вуглоў паміж прамымі і плоскасцямі, ведаць уласцівасці геаметрычных цел. Егіпецкія піраміды, збудаваныя 2–3 тыс. гадоў да н. э., уражваюць дакладнасцю метрычных суадносін, якія сведчаць пра тое, што іх будаўнікі мелі значныя веды па стэрэаметрыі.

Стэрэаметрыю можна разглядаць як абагульненне планіметрыі, таму на любой плоскасці ў прасторы з'яўляюцца праўдзівымі ўсе аксіёмы і тэарэмы планіметрыі, застаюцца такімі самымі і азначэнні.

Каб палегчыць успрыманне таго ці іншага сцверджання стэрэаметрыі і зрабіць яго больш наглядным, карысна змест сцверджання падмацаваць рысункам. Выявы планіметрычнай фігуры роўныя або падобныя ёй самой. Для стэрэаметрычнай фігуры і яе плоскай выявы такое немагчыма. Таму неабходна навучыцца рабіць плоскія выявы геаметрычных фігур такімі, каб яны выклікалі ў нашай свядомасці прасторавыя вобразы гэтых фігур, а таксама «чытаць» плоскія выявы прасторавых фігур. У гэтым нам дапамогуць правілы, прынятыя для такіх выяў, у прыватнасці, штрыхавое выяўленне ліній, нябачных пры ўспрыманні рэальнай прасторавай фігуры.

Матэматыка, асабліва геаметрыя, у пэўным сэнсе з'яўляецца самым лёгкім вучэбным прадметам, бо ў ёй не трэба займацца механічным завучваннем зместу. Дастаткова зразумець тое, што завучваецца, і тады яно само запамінаецца. Разам з гэтым матэматыка — магутны сродак удасканалення разумовых здольнасцей. Яна дае магчымасць навучыцца аналізаваць, выяўляць памылкі ў разважаннях іншых. Таму можна пагадзіцца з выказваннем італьянскага вучонага Галілеа Галілея (1564–1642): «Трэба прызнацца, што спроба трактаваць рэальныя праблемы без геаметрыі ёсць спроба зрабіць немагчымае».

Вучэбны дапаможнік складаецца з чатырох раздзелаў: «Уводзіны ў стэрэаметрыю»; «Паралельнасць прамых і плоскасцей»; «Перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей»; «Каардынаты і вектары ў прасторы» (для вучняў, якія вывучаюць матэматыку на павышаным узроўні).

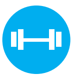
Кожны раздзел адкрываецца ілюстраванай старонкай з назвай параграфа. Параграф пачынаецца з абмеркавання пытання, абазначанага ў яго назве. Найбольш важныя новыя паняцці, правілы і сцверджанні вылучаны **паўтлустым шрыфтам**; паняцці і факты, на якія варта звярнуць увагу, — *курсівам*. Сэнсавыя блокі ў параграфе адзначаны каляровымі літарамі, напрыклад, **А)**, **Б)**, **В)**, **Г)**.

У вучэбным дапаможніку вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

 — асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязнымі апісаннямі паслядоўнасці дзеянняў;

 — важныя правілы і сцверджанні;

 — пытанні і заданні для самакантролю;

 — заданні для работы ў класе і дома;

 — матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў;

 — дадатковы матэрыял для самастойнага азнаямлення і вывучэння;

 — вучэбны матэрыял павышанага ўзроўню.

Для праверкі разумення зместу тлумачальнага тэксту, фарміравання ўменняў па яго прымяненні ў канцы параграфаў прадугледжаны кантрольныя пытанні, практычная частка (практыкаванні, задачы). Калі вы не змаглі адказаць на тое ці іншае пытанне, неабходна звярнуцца да тлумачальнага тэксту і з яго дапамогай паспрабаваць адказаць на гэта пытанне або, калі спатрэбіцца, выкарыстаць дадатковую літаратуру ці інтэрнэт. Практычная частка ўлучае згрупаваныя па сэнсавых блоках практыкаванні і задачы з улікам іх прызначэння (практыкаванні па прапанаваных рысунках; практыкаванні і задачы для засваення і замацавання новых паняццяў і тэарэм; задачы, выкананне якіх патрабуе выкарыстання як новых ведаў, так і раней атрыманых; практыкаванні і задачы з рэальным зместам).

Пры выкананні заданняў з практычнай часткі вы навучыцеся супастаўляць, знаходзіць агульнае і адрознае, рабіць правільныя вывады, прымяняць атрыманыя веды на практыцы.

Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя-10» можна знайсці на сайце *http://e-vedy.adu.by*, раздзел «Матэматыка», курс «Матэматыка. 10 кл.».

Жадаем вам поспехаў!

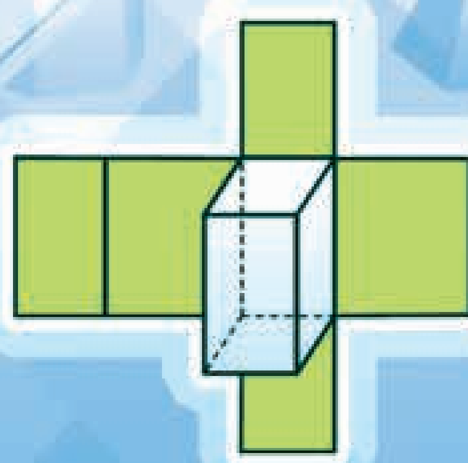
Аўтары

«Першыя паняцці, з якіх пачынаецца якая-небудзь навука,
павінны быць празрыстымі і прыведзенымі да найменшай колькасці.
Тады толькі яны могуць служыць трывалай і дастатковай асновай вучэння»
(М. І. Лабачэўскі).

РАЗДЗЕЛ 1
УВОДЗІНЫ Ў СТЭРЭАМЕТРЫЮ

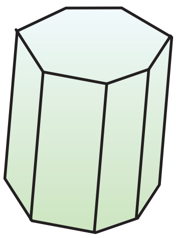
У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

- прасцейшыя прасторавыя фігуры;
- аксіёмы стэрэаметрыі і вынікі з іх;
- пабудаванні сячэнняў мнагаграннікаў.

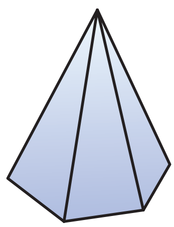


§ 1. Прасторавыя фігуры

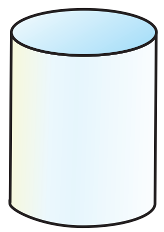
А) Геаметрычныя фігуры падзяляюцца на **плоскія** і **прасторавыя** ў залежнасці ад таго, усе ці не ўсе пункты фігуры належаць адной плоскасці. Плоскія фігуры вы вывучалі ў ранейшых класах, там пазнаёміліся і з некаторымі прасторавымі фігурамі — прызмай (рыс. 1), пірамідай (рыс. 2), цыліндрам (рыс. 3), конусам (рыс. 4), шарам (рыс. 5). Раздзел геаметрыі, у якім вывучаюцца плоскія фігуры, называецца *планіметрыяй*, а раздзел, у якім вывучаюцца прасторавыя фігуры, — *стэрэаметрыяй*.



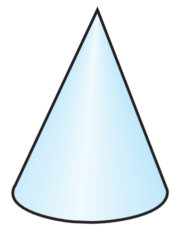
Рыс. 1



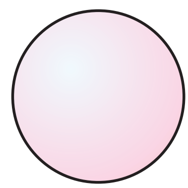
Рыс. 2



Рыс. 3

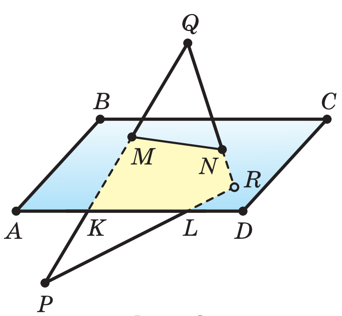


Рыс. 4



Рыс. 5

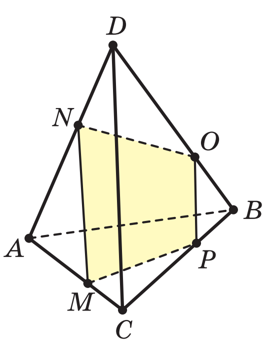
Тую ці іншую прасторавую фігуру даводзіцца рысаваць на плоскасці ліста ў сшытку або на плоскасці дошкі. Адпаведны рысунак выконваюць такім чынам, каб ён ствараў тое ўражанне, што і сама фігура, чый відарыс робіцца. Пры гэтым нябачныя лініі робяць *штрыхавымі*.



Рыс. 6

На рысунку 6 паказаны паралелаграм $ABCD$ і трохвугольнік PQR, якія перасякаюцца па адрэзку MN. Частка QMN трохвугольніка PQR знаходзіцца над паралелаграмам $ABCD$, частка $PMNR$ — пад ім. Пры гэтым частка PKL чатырохвугольніка $PMNR$ бачная, а частка $KMNRL$ — нябачная. Звяртаем увагу на тое, што пункты K і L трохвугольніка PQR не належаць паралелаграму $ABCD$, а значыць, і яго старане AD.

На рысунку 7 паказана трохвугольная піраміда $DABC$, якую перасякае плоскасць па чатырохвугольніку $MNOP$. Пры гэтым у піраміды нябачным з'яўляецца кант AB, а ў сячэння $MNOP$ — яго стораны NO і MP.



Рыс. 7

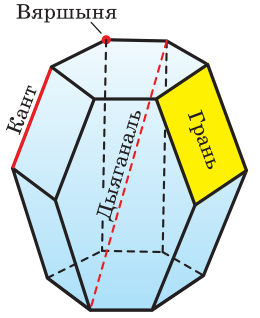
Адлюстраванне прасторавай фігуры на рысунку называюць **відарысам фігуры**.

Важным класам прасторавых фігур з'яўляюцца мнагаграннікі, пад якімі разумеюць целы, абмежаваныя плоскімі многавугольнікамі.

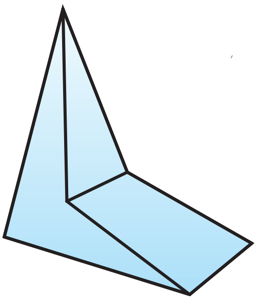
Гэтыя многавугольнікі называюцца **гранямі** мнагагранніка, іх вяршыні — **вяршынямі** мнагагранніка, а стораны — **кантамі** мнагагранніка.

Адрэзак, што злучае дзве вяршыні мнагагранніка, якія не належаць адной грані, называецца **дыяганаллю** мнагагранніка (рыс. 8).

Мнагаграннік называецца *выпуклым*, калі ён размешчаны па адзін бок ад плоскасці любой яго грані. На рысунку 9 паказаны нявыпуклы мнагаграннік.



Рыс. 8


Рыс. 9

Б) Мы будзем вывучаць найпрасцейшыя выпуклыя мнагагранніки — прызмы і піраміды.

Прызмай называецца мнагаграннік, дзве грані якога — роўныя n-вугольнікі, а астатнія n граняў — паралелаграмы.

Роўныя грані-многавугольнікі прызмы называюцца яе **асновамі**, а астатнія грані — **бакавымі гранямі**. Канты бакавой грані, якія не належаць асновам, называюцца **бакавымі кантамі** (рыс. 10).

У залежнасці ад колькасці старон асновы прызмы адрозніваюць **трохвугольную**, **чатырохвугольную**, **пяцівугольную** і г. д. прызмы. На рысунку 11 паказана шасцівугольная прызма.

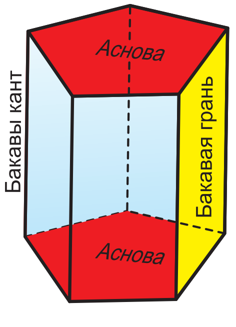
Сукупнасць бакавых граняў прызмы складаюць бакавую паверхню.

Плошча бакавой паверхні прызмы роўная суме плошчаў бакавых граняў.

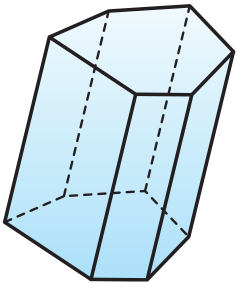
Прызмы падзяляюцца на *прамыя* і *нахіленыя*.

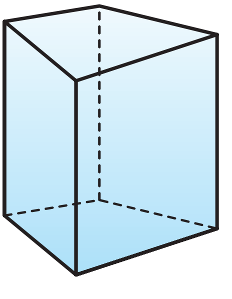
Прамая прызма — прызма, бакавыя грані якой з'яўляюцца прамавугольнікамі. Звычайна, рысуючы прамую прызму, яе бакавыя канты праводзяць вертыкальна (рыс. 12).

Прызма *прамая*, калі бакавыя канты перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.



Рыс. 10

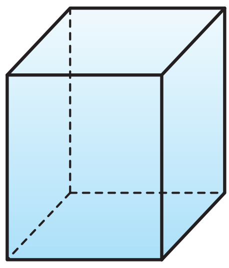

Рыс. 11


Рыс. 12

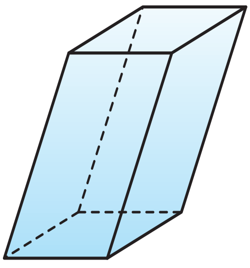
Прызма *нахіленая*, калі бакавыя канты не перпендыкулярныя кантам асновы прызмы.

Прамая прызма называецца **правільнай**, калі яе асновы з'яўляюцца правільнымі многавугольнікамі.

Прызма, асновамі якой з'яўляюцца паралелаграмы, называецца **паралелепіпедам.**



Рыс. 13



Рыс. 14

Паралелепіпед, як і прызма, можа быць і прамым (рыс. 13), і нахіленым (рыс. 14).

Прамы паралелепіпед, асновы якога з'яўляюцца прамавугольнікамі, называецца **прамавугольным паралелепіпедам.**

Усе грані прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляюцца прамавугольнікамі.

Тры канты прамавугольнага паралелепіпеда, якія збягаюцца ў адной вяршыні, называюцца **вымярэннямі** прамавугольнага паралелепіпеда.

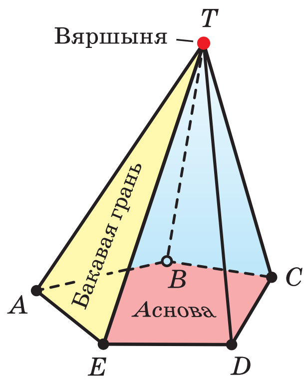
Прамавугольны паралелепіпед, вымярэнні якога роўныя, называецца **кубам.**

Усе грані куба — роўныя адзін аднаму квадраты.

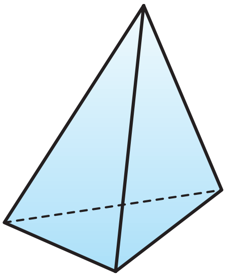
В) **Пірамідай** называецца мнагаграннік, адна грань якога — многавугольнік, а астатнія — трохвугольнікі з агульнай вяршыняй.

На рысунку 15 паказана піраміда $TABCDE$. Многавугольнік $ABCDE$ называюць **асновай піраміды**, трохвугольныя грані ATB, BTC, CTD, DTE, ETA — **бакавымі гранямі**, а агульную вяршыню T бакавых граняў — **вяршыняй піраміды.** Звычайна ў запісе абазначэння піраміды першая літара адпавядае яе вяршыні.

У залежнасці ад колькасці старон асноў піраміды адрозніваюць **трохвугольную, чатырохвугольную, пяцівугольную** і г. д. піраміды. Піраміда на рысунку 15 — пяцівугольная, а на рысунку 16 — трохвугольная.



Рыс. 15

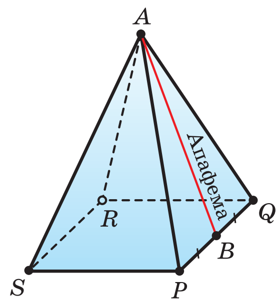


Рыс. 16

Піраміда, аснова якой — правільны многавугольнік, а адрэзак, што злучае яе вяршыню з цэнтрам асновы, перпендыкулярны да любой прамой, праведзенай у плоскасці асновы праз гэты цэнтр, называецца **правільнай**.

Вышыня бакавой грані правільнай піраміды, апушчаная з вяршыні піраміды, называецца **апафемай** піраміды.

На рысунку 17 паказана правільная чатырохвугольная піраміда $APQRS$, і адрэзак AB — адна з яе апафем.

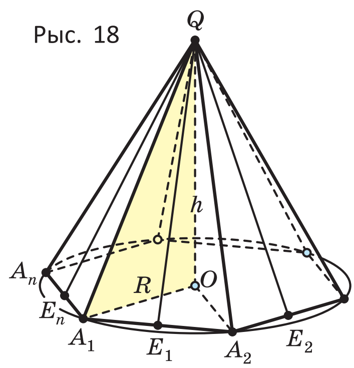


Рыс. 17

Т э а р э м а 1. У правільнай піраміды роўныя яе: а) бакавыя грані; б) апафемы.

Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правільная піраміда і пункт O — цэнтр яе асновы (рыс. 18).

а) Паколькі трохвугольнікі QOA_1 і QOA_2 абодва прамавугольныя, маюць агульны катэт QO і роўныя катэты OA_1 і OA_2, то яны роўныя. Таму роўныя і іх гіпатэнузы QA_1 і QA_2. Аналагічна даказваецца, што іншыя бакавыя канты таксама роўныя QA_1.

Рыс. 18


Бакавыя грані піраміды — раўнабедраныя трохвугольнікі з роўнымі бакавымі старанамі. Асновы гэтых трохвугольнікаў таксама роўныя паміж сабой як стораны правільнага многавугольніка, што ляжыць у аснове піраміды. Таму бакавыя грані роўныя адна адной па трох старанах.

б) Паколькі бакавыя грані піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя адна адной, то роўныя і іх вышыні, праведзеныя з вяршыні Q, г. зн. што ўсе апафемы піраміды $QA_1A_2...A_n$ роўныя.

Т э а р э м а 2. Плошча бакавой паверхні правільнай піраміды роўная здабытку паўперыметра яе асновы і апафемы.

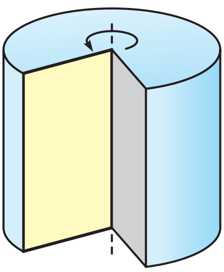
Доказ. Няхай $QA_1A_2...A_n$ — правільная піраміда (гл. рыс. 18). Плошча S яе бакавой паверхні складаецца з плошчаў бакавых граняў-трохвугольнікаў, якія з'яўляюцца роўнымі адзін аднаму раўнабедранымі трохвугольнікамі з апафемамі QE_1, QE_2, ..., QE_n, роўнымі адна адной. Таму

$$S = S_{A_1QA_2} + S_{A_2QA_3} + ... + S_{A_nQA_1} = \frac{1}{2}A_1A_2 \cdot QE_1 + \frac{1}{2}A_2A_3 \cdot QE_2 + ... +$$
$$+ \frac{1}{2}A_nA_1 \cdot QE_n = \frac{1}{2}QE_1 \cdot (A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1) =$$
$$= \frac{A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_nA_1}{2} \cdot QE_1 = p \cdot a,$$

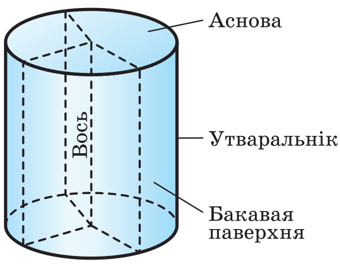
дзе p — паўперыметр асновы піраміды, a — апафема піраміды.

Г) Яшчэ адзін клас прасторавых фігур складаюць целы вярчэння, да якіх адносяцца цыліндр, конус, шар.

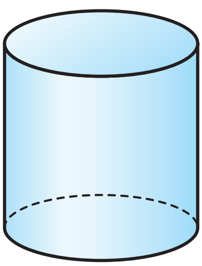
Цыліндрам называецца цела, атрыманае вярчэннем прамавугольніка вакол адной з яго старон (рыс. 19). Пры гэтым вярчэнні адна старана прамавугольніка застаецца нерухомай, яе называюць *воссю цыліндра*. Старана, супрацьлеглая восі, утварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй цыліндра*, а саму старану — *утваральнікам цыліндра*. Яшчэ дзве стараны прамавугольніка ўтвараюць паверхні, якія з'яўляюцца роўнымі кругамі, гэтыя кругі называюць *асновамі цыліндра* (рыс. 20). На рысунку 21 паказаны відарыс цыліндра.



Рыс. 19

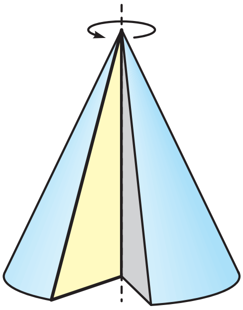


Рыс. 20

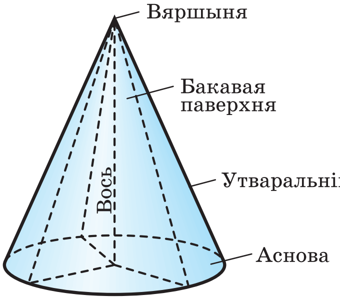


Рыс. 21

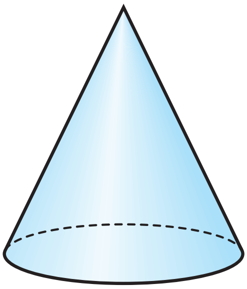
Конусам называецца цела, атрыманае вярчэннем прамавугольнага трохвугольніка вакол аднаго з яго катэтаў (рыс. 22), які называюць *воссю конуса*. Другі катэт апісвае круг, які называюць *асновай конуса*; нерухомую вяршыню, якая не належыць аснове, называюць *вяршыняй конуса*. Гіпатэнуза пры вярчэнні ўтварае паверхню, якую называюць *бакавой паверхняй конуса*, саму гіпатэнузу называюць *утваральнікам конуса* (рыс. 23). На рысунку 24 паказаны відарыс конуса.



Рыс. 22

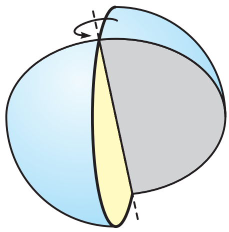


Рыс. 23

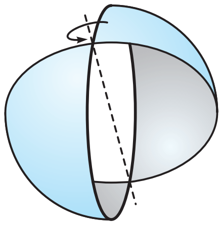


Рыс. 24

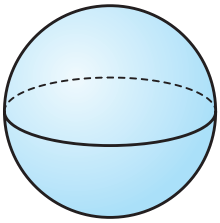
Шарам называецца цела, атрыманае вярчэннем круга вакол свайго дыяметра (рыс. 25). Пры гэтым вярчэнні акружнасць апісвае паверхню, якую называюць *сферай* (рыс. 26). На рысунку 27 паказаны відарыс шара.



Рыс. 25



Рыс. 26

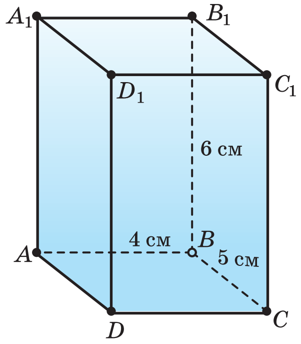


Рыс. 27

?

1. Якія геаметрычныя фігуры называюцца плоскімі; прасторавымі?
2. Якое цела называюць мнагаграннікам?
3. Што называюць гранямі мнагагранніка; кантамі мнагагранніка; вяршынямі мнагагранніка?
4. Які мнаграннік называецца прызмай?
5. Што называюць асновамі прызмы; бакавымі гранямі прызмы; бакавымі кантамі прызмы?
6. Якая прызма называецца прамой прызмай; нахіленай прызмай?
7. Якая прызма называецца правільнай прызмай?
8. Якая прызма называецца паралелепіпедам; прамым паралелепіпедам?
9. Які прамы паралелепіпед называецца прамавугольным паралелепіпедам?
10. Якія канты прамавугольнага паралелепіпеда называюцца яго вымярэннямі?
11. Які мнагаграннік называецца пірамідай?
12. Што называюць асновай піраміды; бакавымі гранямі піраміды; вяршыняй піраміды?
13. Якая піраміда называецца правільнай пірамідай?
14. Які адрэзак называецца апафемай правільнай піраміды?
15. Сфармулюйце ўласцівасць бакавых кантаў правільнай піраміды; бакавых граняў правільнай піраміды; апафем правільнай піраміды.
16. Чаму роўная плошча бакавой паверхні правільнай піраміды?
17. Якое цела называецца цыліндрам?
18. Якое цела называецца конусам?
19. Якое цела называецца шарам?
20. Ці праўда, што:
    а) колькасць вяршынь любой прызмы — лік цотны?
    б) колькасць кантаў любой прызмы — лік, кратны тром?
21. Знайдзіце колькасць дыяганалей сямівугольнай прызмы.
22. Ці існуе піраміда, якая мае 11 кантаў? Абгрунтуйце свой адказ.

Задача 1. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прамой чатырохвугольнай прызмы, у аснове якой знаходзіцца прамавугольнік з вымярэннямі 4 см і 5 см, а бакавы кант роўны 6 см.



Рыс. 28

Р а ш э н н е. Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамая прызма; $ABCD$ — прамавугольнік, $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $BB_1 = 6$ см (рыс. 28).

ABB_1A_1, CBB_1C_1, CDD_1C_1, ADD_1A_1 — прамавугольнікі ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамая прызма), таму $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1 = 6$ см.

$S_{ABB_1A_1} = AB \cdot BB_1 = 4 \cdot 6 = 24$ (см^2), бо $AB = CD$ і $BB_1 = CC_1$.

$S_{CBB_1C_1} = CB \cdot BB_1 = 5 \cdot 6 = 30$ (см^2), бо $AD = BC$ і $AA_1 = CC_1$.

Значыць, $S_{\text{бак}} = S_{ABB_1A_1} + S_{DCC_1D_1} + S_{CBB_1C_1} + S_{ADD_1A_1} = 2 \cdot \left(S_{ABB_1A_1} + S_{CBB_1C_1}\right) =$

$$= 2 \cdot (24 + 30) = 108 \text{ (см}^2\text{)}.$$

А д к а з: 108 см^2.

Бакавая паверхня прамой прызмы роўная здабытку перыметра яе асновы і бакавога канта. Дакажыце гэта самастойна.

Задача 2. Бакавая паверхня правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 240 см^2, а яе апафема — 12 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

Р а ш э н н е. Няхай $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда; $S_{\text{бак}} = 240$ см^2; SH — апафема; $SH = 12$ см (рыс. 29).

$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH$, бо піраміда правільная, таму $240 = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot 12$, бо $P_{ABCD} = 2 \cdot 240 : 12 = 40$ (см).

$AB = 40 : 4 = 10$ (см), бо $ABCD$ — квадрат.

$S_{ABCD} = AB^2 = 10^2 = 100$ (см^2).

А д к а з: 100 см^2.

Плошча бакавой паверхні піраміды роўная суме плошчаў бакавых граняў.

Задача 3. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 30 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 24 см. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

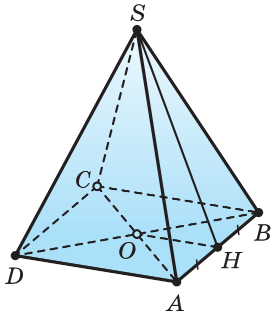
Р а ш э н н е. Няхай $SABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, SH — апафема, $SH = 30$ см, O — цэнтр асновы $ABCD$, $SO = 24$ см (гл. рыс. 29).

$OH = \sqrt{SH^2 - SO^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = 18$ (см), бо $SO \perp OH$,

$AB = 2 \cdot OH = 2 \cdot 18 = 36$ (см), бо $ABCD$ — квадрат, $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 4 \cdot 36 = 144$ (см).

$S_{\text{бак}} = \dfrac{1}{2} P_{ABCD} \cdot SH = \dfrac{1}{2} \cdot 144 \cdot 30 = 2160$ (см^2), бо піраміда правільная.

А д к а з: 2160 см^2.



Рыс. 29

У правільнай пірамідзе адрэзак, які злучае цэнтр асновы піраміды з асновай апафемы піраміды, — радыус акружнасці, умежанай у аснову піраміды. Дакажыце гэта самастойна.

Задача 4. Старана асновы AB правільнай трохвугольнай піраміды $MABC$ роўная $6\sqrt{3}$ см, а адрэзак, што злучае вяршыню M піраміды з цэнтрам O асновы, — 8 см. Знайдзіце:

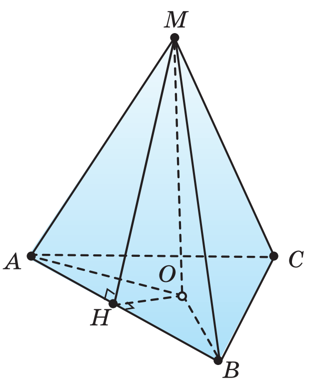
а) бакавыя канты піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

Р а ш э н н е. Няхай $MABC$ — правільная трохвугольная піраміда, $AB = 6\sqrt{3}$ см, O — цэнтр асновы ABC; $MO = 8$ см (рыс. 30).

а) $OA = \dfrac{AB\sqrt{3}}{3} = \dfrac{6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3} = 6$ (см), бо OA — радыус акружнасці, апісанай каля правільнага трохвугольніка ABC.



Рыс. 30

$MA = \sqrt{MO^2 + OA^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), бо $MO \perp OA$.

$MA = MB = MC = 10$ (см), бо $MABC$ — правільная трохвугольная піраміда.

б) Няхай MH — апафема. Тады H — сярэдзіна AB (у $\triangle\ AMB$ $MA = MB$ і $MH \perp AB$).

$OH \perp AB$ (медыяна, праведзеная да асновы раўнабедранага трохвугольніка OAB), таму OH — радыус умежанай у $\triangle ABC$ акружнасці і $OH = \frac{OA}{2} = \frac{6}{2} = 3$ (см).

$MH = \sqrt{MO^2 + OH^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$ (см), бо $MO \perp OH$.

$P_{ABC} = 3 \cdot AB = 3 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$ (см),

$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3} \cdot AB^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(6\sqrt{3})^2}{4} = 27\sqrt{3}$ (см^2), бо $\triangle ABC$ — правільны.

$$S_{\text{бак}} = \frac{1}{2} P_{ABC} \cdot MH = \frac{1}{2} \cdot 18\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} = 9\sqrt{219} \text{ (см}^2\text{)}.$$

в) $S_{\text{поўн}} = S_{\text{бак}} + S_{ABC} = 9\sqrt{219} + 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}(\sqrt{73} + 3)$ (см^2).

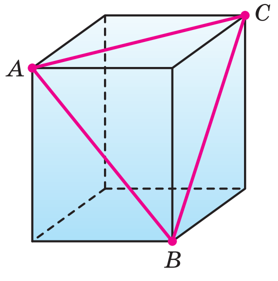
Адказ: а) $MA = MB = MC = 10$ см; б) $S_{\text{бак}} = 9\sqrt{219}$ см^2;

в) $S_{\text{поўн}} = 9\sqrt{3}\left(\sqrt{73} + 3\right)$ см^2.

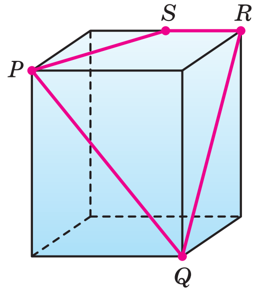
Плошча поўнай паверхні піраміды роўная суме плошчы бакавой паверхні і плошчы асновы.

1. Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — ломаная паказана на рысунку:

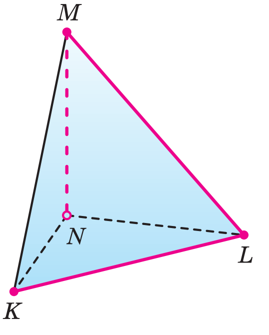
а) 31; в) 33; д) 35;
б) 32; г) 34; е) 36.



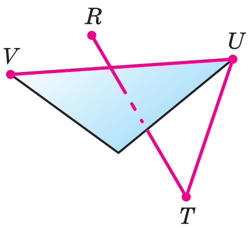
Рыс. 31



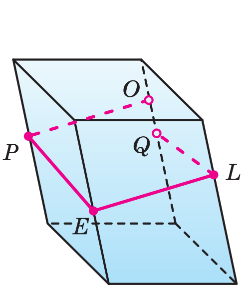
Рыс. 32



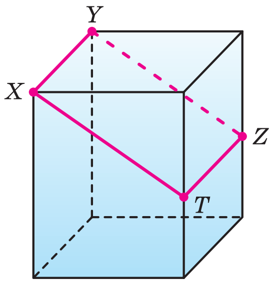
Рыс. 33



Рыс. 34

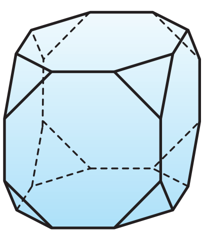


Рыс. 35

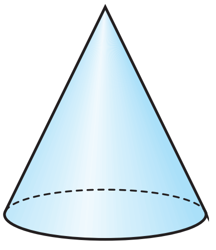


Рыс. 36

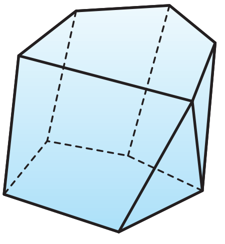
2. Вызначце, ці з'яўляецца мнагаграннікам цела, паказанае на рысунку:
а) 37; б) 38; в) 39; г) 40; д) 41; е) 42.



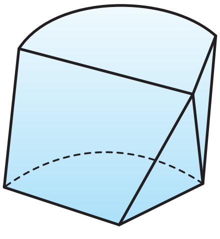
Рыс. 37



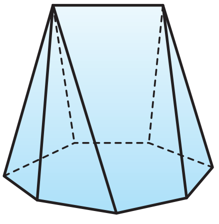
Рыс. 38



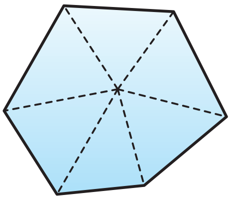
Рыс. 39



Рыс. 40



Рыс. 41



Рыс. 42

3. На рысунку 43 паказаны мнагаграннік $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Назавіце:

а) грані з агульным кантам CD;

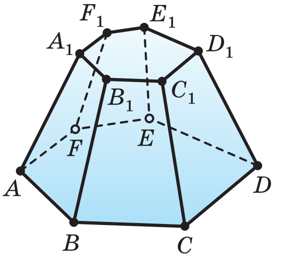
б) грані з агульным кантам DD_1;

в) грані з агульнай вяршыняй E;

г) грані з агульнай вяршыняй C_1;

д) канты з агульнай вяршыняй A;

е) канты з агульнай вяршыняй F_1.



Рыс. 43

4. На рысунку 44 паказана пяцівугольная прызма $UVWXYU_1V_1W_1X_1Y_1$ і яе дыяганаль UX_1. Назавіце іншыя дыяганалі гэтага мнагагранніка.

5. На рысунку 45 паказана чатырохвугольная прызма. Назавіце:
а) асновы прызмы;
б) бакавыя грані з кантам EE_1;
в) грані з кантам DE.

6. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 6 см, а бакавы кант — 11 см. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы.

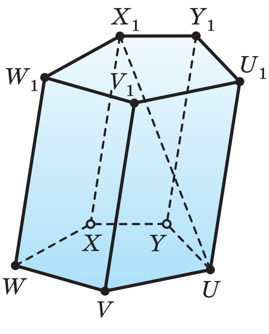
7. Старана асновы правільнай n-вугольнай прызмы роўная a, а яе бакавы кант — h. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні прызмы, улічыўшы, што:
а) $n = 3$, $a = 5$, $h = 10$;
б) $n = 4$, $a = 10$, $h = 30$;
в) $n = 6$, $a = 18$, $h = 32$.

8. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік са старанамі 3 см і 5 см і вуглом паміж імі ў $120°$, а найбольшая з плошчаў бакавых граняў роўная 35 см^2. Знайдзіце поўную паверхню прызмы.

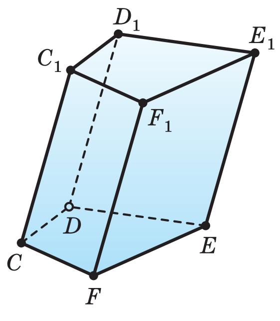
9. Асновай прамога паралелепіпеда з бакавым кантам 8 м з'яўляецца ромб з дыяганалямі 10 м і 24 м. Знайдзіце бакавую і поўную паверхні паралелепіпеда.

10. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраная трапецыя з асновамі 25 см і 15 см і вышынёй 12 см. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 20 см.

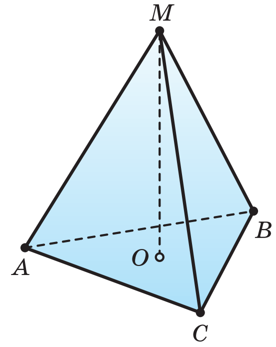
11. Старана асновы ABC правільнай трохвугольнай пірамiды $MABC$ роўная $10\sqrt{3}$ см, а адрэзак, што злучае вяршыню M піраміды з цэнтрам O асновы, — 12 см (рыс. 46). Знайдзіце:
а) апафему піраміды;
б) бакавую паверхню піраміды;
в) поўную паверхню піраміды.



Рыс. 44



Рыс. 45



Рыс. 46

12. Апафема правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 15 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 12 см. Знайдзіце:

а) бакавы кант;
б) бакавую паверхню піраміды;
в) поўную паверхню піраміды.

13. Бакавая паверхня правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 150 см^2, а яе апафема — 10 см. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

14. Старана асновы правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 10 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — $\sqrt{69}$ см. Знайдзіце:

а) бакавы кант і апафему піраміды;
б) бакавую паверхню піраміды;
в) поўную паверхню піраміды.

15. Апафема правільнай шасцівугольнай піраміды роўная 26 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 10 см. Знайдзіце:

а) бакавы кант і старану асновы піраміды;
б) бакавую паверхню піраміды;
в) поўную паверхню піраміды.

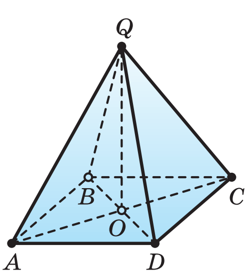
16. Асновай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ са стараной, роўнай 10 см, адна з дыяганалей якога 16 см. Адрэзак, што злучае вяршыню Q піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 14 см (рыс. 47). Знайдзіце:

а) бакавыя канты піраміды;
б) бакавую паверхню піраміды.

17. Асновай піраміды $REFGH$ з'яўляецца паралелаграм $EFGH$ са старанамі 10 см і 18 см, плошчай 90 см^2. Адрэзак, што злучае вяршыню R піраміды з пунктам O перасячэння дыяганалей асновы, перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 6 см. Знайдзіце:

а) бакавыя канты піраміды;
б) бакавую паверхню піраміды;
в) поўную паверхню піраміды.

18*. Асновай піраміды з'яўляецца паралелаграм са старанамі 8 м, 10 м і меншай дыяганаллю 6 м. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей асновы,



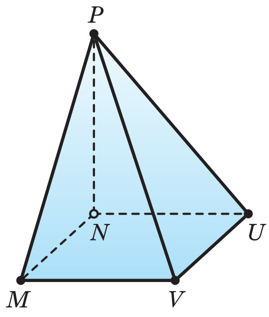
Рыс. 47

перпендыкулярны гэтым дыяганалям і роўны 4 м. Знайдзіце:

а) бакавыя канты піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.



Рыс. 48

19*. Асноваі піраміды $PMNUV$ з'яўляецца квадрат $MNUV$ (рыс. 48). Бакавы кант PN перпендыкулярны да кожнай прамой плоскасці асновы, што праходзіць праз пункт N, вуглы M і U граняў PMV і PUV прамыя, а вуглы M і U граняў PMN і PUN роўныя $45°$ кожны. Найбольшы бакавы кант роўны 24 см. Знайдзіце:

а) іншыя бакавыя канты піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

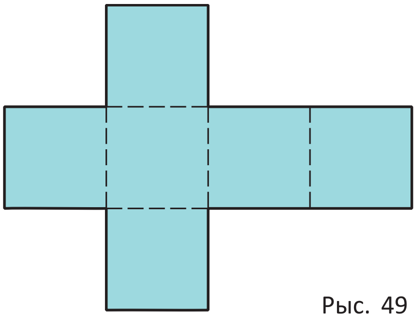
20*. Асноваі піраміды з'яўляецца ромб са стараной 15 см і меншай дыяганаллю 18 см. Адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з пунктам перасячэння дыяганалей, перпендыкулярны ім і роўны 12 см. Знайдзіце вышыні граняў піраміды.

Прасторавае мадэляванне

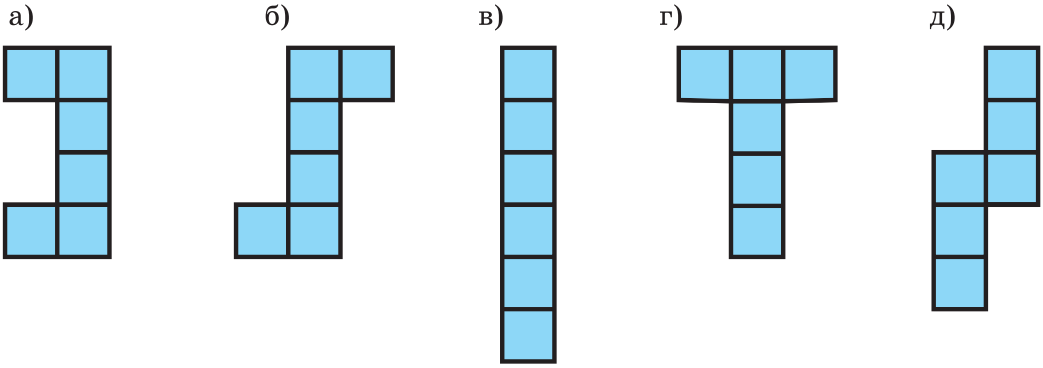
1. Зрабіце выкрайку паверхні куба з кантам 5 см, прадугледзеўшы палоскі для склейвання (рыс. 49), і склейце сам куб.

2. Якія з фігур, паказаных на рысунку 50, з'яўляюцца разгорткамі куба?

3. Зрабіце выкрайку паверхні прамой прызмы з бакавым кантам 5 см, у аснове якой знаходзіцца трапецыя са старанамі 6 см, 3 см, 3 см, 3 см, і склейце саму прызму.

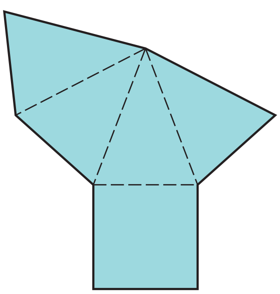


Рыс. 49



Рыс. 50

4. Зрабіце выкрайку паверхні правільнай чатырохвугольнай піраміды (рыс. 51), старана асновы якой роўная 5 см, а бакавы кант — 7 см, і склейце саму піраміду.



Рыс. 51

Рыс. 52

5. Зрабіце выкрайку паверхні піраміды, стораны асновы якой роўныя 4 см, 5 см і 7 см, а бакавыя канты — 7 см кожны, і склейце саму піраміду.

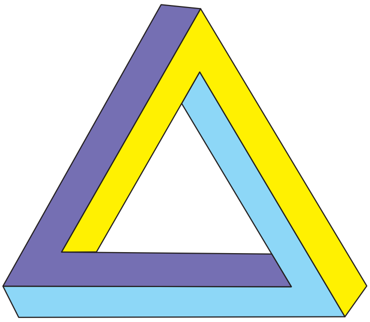
6. Знак нулявога кіламетра Беларусі ўстаноўлены на плошчы Незалежнасці (рыс. 52). Яго мадэллю з'яўляецца правільная чатырохвугольная піраміда, у якой суседнія бакавыя канты ўзаемна перпендыкулярныя, а старана асновы роўная 1 м 40 см. Якая колькасць матэрыялу спатрэбіцца для abліцоўвання бакавой паверхні такой піраміды?

7. Ці можа разгорткай піраміды быць:

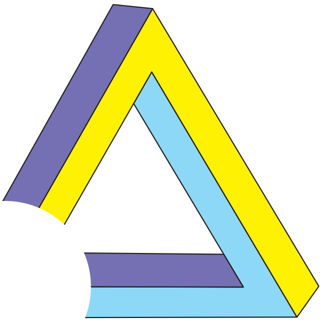
а) шасцівугольнік; в) ромб;
б) прамавугольнік; г) трохвугольнік?

Адлюстраванне прасторавых фігур

Каб атрымаць відарыс прызмы, дастаткова пабудаваць многавугольнік — аснову прызмы. З вяршынь асновы правесці прамыя, паралельныя пэўнай фіксаванай прамой, і адкласці на іх роўныя адрэзкі. Злучаючы канцы гэтых адрэзкаў, атрымаем многавугольнік — другую аснову прызмы.



Рыс. 53



Рыс. 54

Рыс. 55

Каб атрымаць відарыс піраміды, дастаткова пабудаваць відарыс асновы піраміды, выбраць пэўны пункт у якасці выявы вяршыні піраміды і злучыць яго з вяршынямі многавугольніка асновы піраміды.

Не кожны відарыс успрымаецца намі як адлюстраванне фігуры, якая рэальна існуе. Ходкі выраз «падман зроку» па сутнасці сваёй няправільны. Вочы не могуць падмануць нас, паколькі з'яўляюцца толькі прамежкавым звяном паміж аб'ектам і мозгам чалавека. Падман звычайна ўзнікае не з-за таго, што мы бачым, а з-за таго, што неўсвядомлена разважаем і міжвольна памыляемся.

Немагчымыя аб'екты ўяўляюць сабою рысункі на двухмернай плоскасці, і гэтыя рысункі адлюстроўваюць трохмерныя структуры, існаванне якіх у рэальным трохмерным свеце падаецца немагчымым. Класічным прыкладам такой простай фігуры з'яўляецца немагчымы трохвугольнік Пенроўза (рыс. 53). У гэтым трохвугольніку кожны вугал сам па сабе з'яўляецца магчымым, але парадокс узнікае тады, калі мы разглядаем яго цалкам. Стораны трохвугольніка накіраваны адначасова і на гледача, і ад яго, таму асобныя часткі трохвугольніка не могуць утварыць рэальны трохмерны аб'ект.

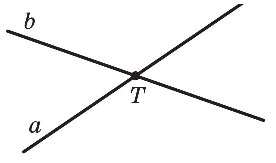
Наш мозг інтэрпрэтуе рысунак на плоскасці як трохмерную мадэль. Свядомасць задае «глыбіню», на якой знаходзіцца кожны пункт рысунка. Нашы ўяўленні пра рэальны свет сутыкаюцца з супярэчнасцю, з пэўнай непаслядоўнасцю, і даводзіцца рабіць некаторыя дапушчэнні: прамыя двухмерныя лініі інтэрпрэтуюцца як прамыя трохмерныя лініі; двухмерныя паралельныя лініі інтэрпрэтуюцца як трохмерныя паралельныя лініі; вострыя і тупыя вуглы інтэрпрэтуюцца як прамыя вуглы ў перспектыве; знешнія лініі разглядаюцца як мяжа формы, якая надзвычай важная для ўспрымання поўнай выявы.

Чалавечая свядомасць спачатку стварае агульны рысунак прадмета, а затым разглядае яго асобныя часткі. Кожны вугал сумяшчальны з прасторавай перспектывай, але, уз'яднаўшыся, яны ўтвараюць прасторавы парадокс. Калі закрыць любы з вуглоў трохвугольніка (рыс. 54), то немагчымасць існавання знікае.

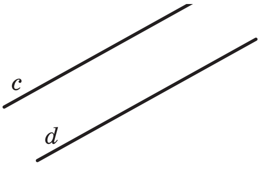
Падобныя фігуры сталі крыніцай натхнення для многіх творцаў. Графік Маўрыцыа Эшэр стварыў шэраг літаграфій (рыс. 55), якія прынеслі яму вядомасць мастака-ілюзіяніста.

§ 2. Прамыя і плоскасці

А) Прамыя і плоскасці ў прасторы могуць размяшчацца па-рознаму.

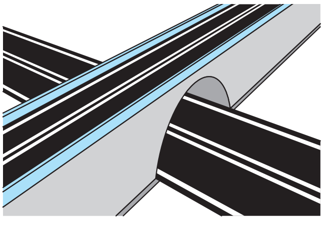


Рыс. 56

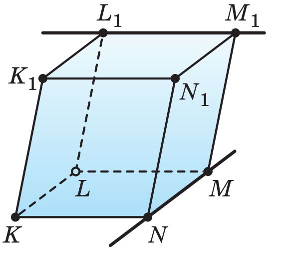


Рыс. 57

Дзве прамыя плоскасці могуць мець толькі адзін агульны пункт. Такія прамыя называюцца перасякальнымі. На рысунку 56 паказаны перасякальныя прамыя a і b і іх адзіны агульны пункт T. Дзве прамыя плоскасці могуць не мець агульных пунктаў. Тады іх называюць *паралельнымі*. На рысунку 57 паказаны паралельныя прамыя c і d. У прасторы дзве прамыя могуць быць размешчаны так, што яны не ляжаць у адной плоскасці, г. зн. няма такой плоскасці, якой бы яны абедзве належалі. Такія прамыя называюцца *скрыжаванымі*. Уяўленне пра такія прамыя даюць дзве дарогі, адна з якіх праходзіць па эстакадзе, а другая — пад эстакадай (рыс. 58). Такімі з'яўляюцца прамыя, што праходзяць праз канты MN і L_1M_1 паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рыс. 59).



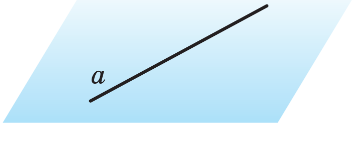
Рыс. 58



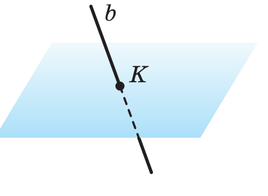
Рыс. 59

Якім можа быць узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці?

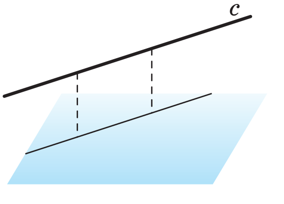
Прамая можа ляжаць у плоскасці (рыс. 60). Калі прамая не ляжыць у плоскасці, то яна можа перасякаць яе ў пэўным пункце (рыс. 61) або не мець з плоскасцю ніводнага агульнага пункта (рыс. 62). У апошнім выпадку прамая і плоскасць называюцца *паралельнымі*.



Рыс. 60

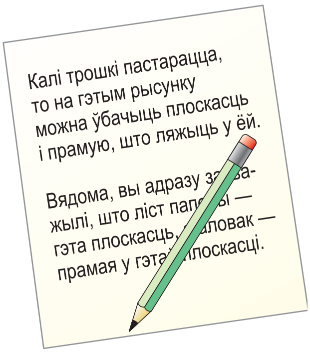


Рыс. 61

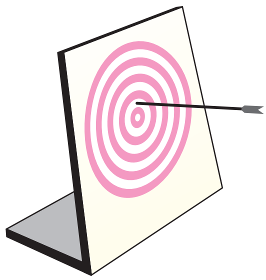


Рыс. 62

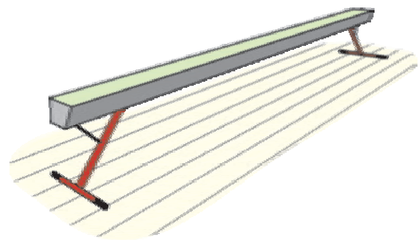
Уяўленне аб прамой, што ляжыць у плоскасці, дае аловак, які ляжыць на стале (рыс. 63), пра перасякальныя прамую і плоскасць — страла, выпушчаная з лука, якая патрапіла ў плоскую мішэнь (рыс. 64), аб прамой, якая не перасякае плоскасць, — падлога ў спартыўнай зале і гімнастычнае бервяно (рыс. 65).



Рыс. 63



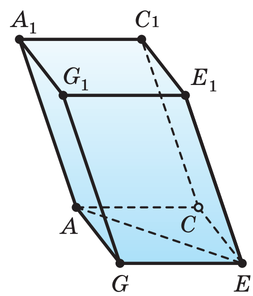
Рыс. 64



Рыс. 65

Названыя віды ўзаемнага размяшчэння прамой і плоскасці можна прасачыць і на відарысе паралелепіпеда (рыс. 66). Прамая, якой належыць дыяганаль AE грані $ACEG$, ляжыць у плоскасці гэтай грані. Прамая, якая праходзіць праз кант AA_1, перасякае плоскасць грані $ACEG$. Прамая, якая змяшчае кант A_1C_1, паралельная плоскасці грані $ACEG$.

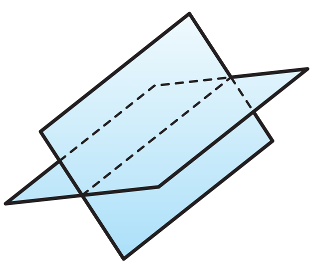
Як могуць размяшчацца ў прасторы дзве плоскасці?



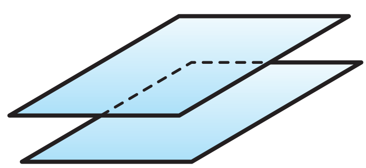
Рыс. 66

Плоскасці могуць перасякацца па прамой (рыс. 67) або не мець агульных пунктаў (рыс. 68). У адпаведнасці з гэтым іх называюць *перасякальнымі* або *паралельнымі*.

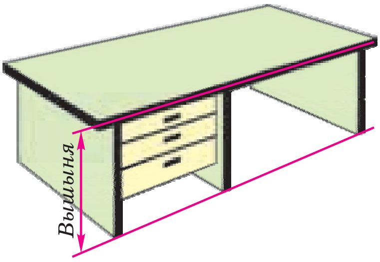
Уяўленне пра перасякальныя плоскасці даюць стальніца і бакавіна стала (рыс. 69), пра паралельныя плоскасці — падлога і столь у памяшканні (рыс. 70). На відарысе паралелепіпеда, што на рысунку 66, перасякальнымі з'яўляюцца плоскасці граняў AGG_1A_1 і $AGEC$, паралельнымі — плоскасці граняў AGG_1A_1 і CEE_1C_1.



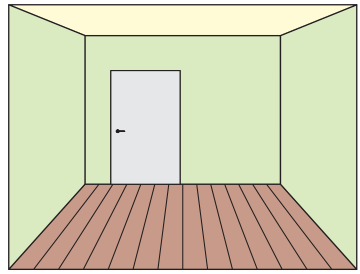
Рыс. 67



Рыс. 68



Рыс. 69



Рыс. 70

Знак || выкарыстоўваюць не толькі для абазначэння паралельнасці прамых, а і паралельнасці прамой і плоскасці і дзвюх плоскасцей. Калі ўлічыць, што прамыя абазначаюцца малымі лацінскімі літарамі a, b, c, ..., а плоскасці — малымі грэчаскімі літарамі α, β, γ, ..., то запісы $a \parallel b$, $c \parallel \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ азначаюць, што паралельнымі з'яўляюцца прамыя a і b, прамая c і плоскасць α, плоскасці α і β.

Б) Тэорыя ўзаемнага размяшчэння прамых і плоскасцей у прасторы грунтуецца на наступных аксіёмах.

Аксіёма 1. Калі тры пункты не ляжаць на адной прамой, то праз іх праходзіць адзіная плоскасць.

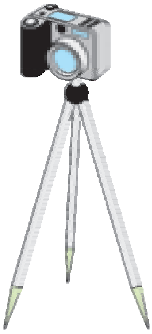
Аксіёма 2. Калі два пункты прамой ляжаць у плоскасці, то кожны пункт гэтай прамой належыць плоскасці.

У гэтым выпадку гавораць, што прамая ляжыць у плоскасці.

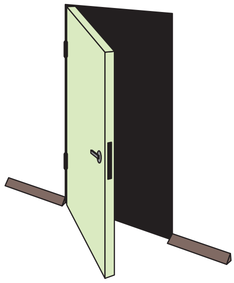
Аксіёма 3. Калі дзве плоскасці маюць агульны пункт, то яны маюць і агульную прамую, якая праходзіць праз гэты пункт.

Уласцівасць плоскасці, якую фіксуе аксіёма **1**, часта выкарыстоўваецца на практыцы. Вастрыі ножак штатыва фотаапарата (рыс. 71) належаць адной плоскасці, і таму становішча фотаапарата ўстойлівае. Дзверы, замацаваныя на дзвюх петлях, не займаюць пэўнае становішча (рыс. 72), а калі дадаць трэці пункт мацавання — замок, становішча дзвярэй фіксуецца (рыс. 73). Калі ножкі табурэта няправільна падрэзаныя, то табурэт стаіць на трох ножках, а чацвёртая ножка вісіць над падлогай (рыс. 74).

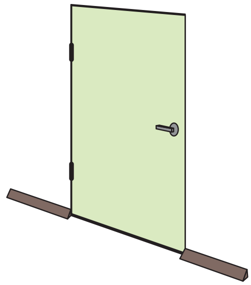
Уласцівасць плоскасці, якую выражае аксіёма **2**, выкарыстоўваюць для праверкі роўнасці рысавальнай лінейкі. Лінейку прыкладваюць



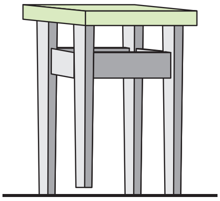
Рыс. 71



Рыс. 72

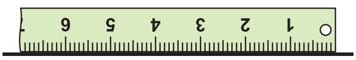


Рыс. 73

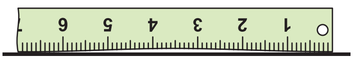


Рыс. 74

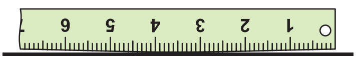
краем да паверхні стала: калі край прамалінейны, то ён усімі сваімі пунктамі прылягае да паверхні стала (рыс. 75), а калі няроўны, то паміж краем лінейкі і паверхняй стала ёсць шчыліна (рыс. 76 і 77).



Рыс. 75

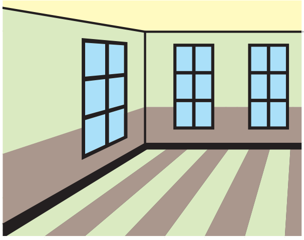


Рыс. 76



Рыс. 77

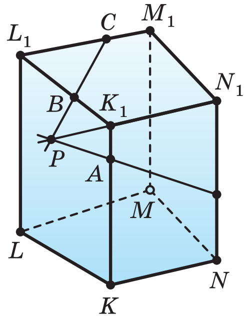
Уласцівасць плоскасці, зафіксаваная аксіёмай **3**, выяўляецца пры перасячэнні дзвюх сумежных сцен пакоя (рыс. 78).



Рыс. 78

Адзначым, што ў стэрэаметрыі праўдзяцца ўсе аксіёмы планіметрыі і доказаныя ў ёй сцверджанні. У прыватнасці, прыметы роўнасці і прыметы падобнасці трохвугольнікаў з'яўляюцца праўдзівымі і для трохвугольнікаў, што ляжаць у розных плоскасцях.

У адпаведнасці з аксіёмай **1** плоскасць вызначаецца трыма сваімі пунктамі A, B, C, таму іншы раз плоскасць абазначаюць трыма вялікімі лацінскімі літарамі: плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B, C, абазначаюць (ABC).



Рыс. 79

Прыклад. На кантах KK_1, K_1L_1, L_1M_1 прызмы $KLMNK_1L_1M_1N_1$ выбраны пункты A, B, C, прычым прамая, якую вызначаюць пункты B і C, не паралельная канту K_1N_1 (рыс. 79). Плоскасці ABC і KNN_1 маюць агульны пункт A. У адпаведнасці з аксіёмай **3** яны маюць агульную прамую. Пабудуем яе.

Пункт A належыць грані KK_1N_1N, а пункты B, C — грані $K_1L_1M_1N_1$, і гэтыя грані перасякаюцца па прамой K_1N_1. Гэта прамая і прамая BC ляжаць у адной плоскасці і не паралельныя. Таму яны перасякаюцца ў пэўным пункце. Знойдзем яго, прадоўжыўшы адрэзкі BC і K_1N_1, і атрымаем пункт P.

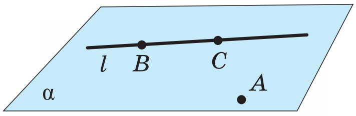
Пункт P належыць прамым BC і K_1N_1, значыць, ён належыць як плоскасці ABC, так і плоскасці KK_1N_1. Гэтым жа плоскасцям належыць і пункт A. Значыць, прамая, што вызначаецца пунктамі P і A, належыць і плоскасці ABC, і плоскасці KK_1N_1. Іншымі словамі, плоскасці ABC і KK_1N_1 перасякаюцца па прамой PA.

Тэарэма 3. Праз прамую і пункт па-за ёю праходзіць адзіная плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць прамая l і пункт A, які не належыць прамой l (рыс. 80).

Выберам на прамой l два пункты B і C. Пункты A, B, C не ляжаць на адной прамой, таму па аксіёме **1** праз іх праходзіць пэўная плоскасць α (рыс. 81). Плоскасць α у адпаведнасці з аксіёмай **2** праходзіць і праз прамую l, бо два яе пункты B і C належаць плоскасці α.

Рыс. 80

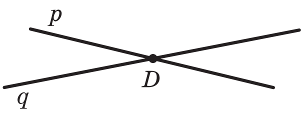


Рыс. 81

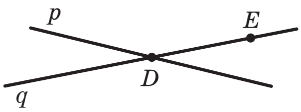
Дапусцім, што праз прамую l і пункт A праходзіць яшчэ адна плоскасць β. Тады плоскасць β праходзіць як праз пункт A, так і праз пункты B і C. Паколькі па аксіёме **1** праз тры розныя пункты праходзіць адзіная плоскасць, то плоскасць β супадае з плоскасцю α. Значыць, праз прамую і пункт A па-за ёю праходзіць адзіная плоскасць.

Тэарэма 4. Праз дзве перасякальныя прамыя праходзіць адзіная плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве перасякальныя прамыя p і q, і D — іх агульны пункт (рыс. 82).



Рыс. 82

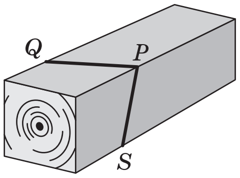


Рыс. 83

Выберам на прамой q які-небудзь пункт E, адрозны ад пункта D (рыс. 83). У адпаведнасці з тэарэмай **3** праз прамую p і пункт E праходзіць адзіная плоскасць γ. Плоскасць γ праходзіць і праз прамую q, бо два пункты D і E прамой q належаць плоскасці γ.

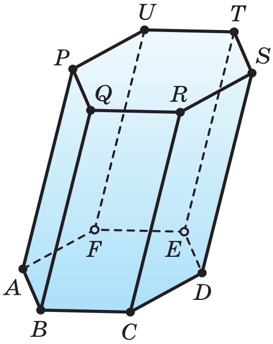
Дапусцім, што праз прамыя p і q праходзіць яшчэ адна плоскасць δ. Тады плоскасць δ праходзіць праз пункт E. Але праз гэты пункт і прамую p, у адпаведнасці з тэарэмай **3**, праходзіць адзіная плоскасць. Значыць, плоскасць δ супадае з плоскасцю γ. Такім чынам, праз перасякальныя прамыя p і q праходзіць адзіная плоскасць.

Тэарэма **4** знаходзіць сваё прымяненне на практыцы. Калі цесляру трэба распілаваць брус пад пэўным вуглом, ён, каб намеціць плоскасць распілу, праводзіць у дзвюх сумежных гранях бруса перасякальныя прамыя PQ і PS (рыс. 84).



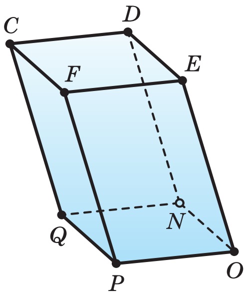
Рыс. 84

1. Якія дзве прамыя плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
2. Якія прамыя называюцца скрыжаванымі?
3. Як могуць размяшчацца дзве прамыя ў прасторы?
4. Якія прамая і плоскасць называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
5. Як могуць размяшчацца ў прасторы прамая і плоскасць?
6. Якія дзве плоскасці называюцца перасякальнымі; паралельнымі?
7. Як могуць размяшчацца ў прасторы дзве плоскасці?
8. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, што праходзіць праз тры пункты, і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
9. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, два пункты якой належаць плоскасці, і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
10. Сфармулюйце ўласцівасць пра агульную прамую дзвюх плоскасцей і прывядзіце прыклады мадэляў, што ілюструюць гэту ўласцівасць.
11. Як абазначаюцца пункты; прамыя; плоскасці?
12. Назавіце спосабы задання плоскасці.
13. Ці праўда, што:
а) праз любыя два пункты праходзіць адзіная прамая;
б) праз любыя тры пункты праходзіць адзіная плоскасць;
в) тры папарна перасякальныя прамыя ляжаць у адной плоскасці? Адказ абгрунтуйце.
14. На рысунку 85 паказана прызма, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:
а) прамыя, перасякальныя з плоскасцю ABC;
б) прамыя, перасякальныя з плоскасцю UTF;
в) прамыя, што ляжаць у плоскасці PTR;
г) прамыя, якія належаць плоскасці CDR.
д) прамыя, паралельныя плоскасці FEC;
е) прамыя, паралельныя плоскасці AQB.



Рыс. 85

15. На рысунку 86 паказаны паралелепіпед. Назавіце:
а) плоскасці, перасякальныя з прамой CQ;
б) плоскасці, перасякальныя з прамой OP;
в) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NO;
г) плоскасці, якім належаць прамая DN;
д) плоскасці, паралельныя прамой CF;
е) плоскасці, паралельныя прамой EO.



Рыс. 86

16. Ці могуць дзве плоскасці мець:
а) толькі адзін агульны пункт;
б) толькі два агульныя пункты;
в) толькі адну агульную прамую;
г) толькі дзве агульныя прамыя?

Задача 1. Дакажыце, што:

а) калі пэўны пункт A належыць прамой k, якая належыць плоскасці α, то пункт A належыць плоскасці α;

б) калі два пункты A і B належаць як прамой l, так і плоскасці α, то прамая l ляжыць у плоскасці α;

в) калі плоскасці α і β перасякаюцца па прамой l і пункт A належыць як плоскасці α, так і плоскасці β, то пункт A належыць прамой l;

г) прамая a, якая перасякае ў розных пунктах дзве перасякальныя прамыя k і l, належыць плоскасці гэтых прамых.

Рашэнне: а) $k \subset \alpha$ азначае, што *любы пункт* прамой k належыць таксама і плоскасці α.

Любы пункт прамой k належыць плоскасці α, таму і *пэўны пункт* A прамой k належыць плоскасці α.

б) $A \in l$ і $B \in l$, таму прамыя AB і l супадаюць ($AB = l$) (аксіёма прамой).
$A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, таму $AB \subset \alpha$ (аксіёма 2).
$AB \subset \alpha$ і $AB = l$, таму $l \subset \alpha$.

в) $A \in \alpha$ і $A \in \beta$, таму $A \in \alpha \cap \beta$.
$A \in \alpha \cap \beta$ і $\alpha \cap \beta = l$, таму $A \in l$.

г) $k \cap l = O$, таму існуе такая плоскасць α, што $k \subset \alpha$ і $l \subset \alpha$.
$a \cap k = A$, $k \subset \alpha$, таму $A \in \alpha$.
$a \cap l = B$ і $l \subset \alpha$, таму $B \in \alpha$.
$A \in \alpha$ і $B \in \alpha$, таму $AB \subset \alpha$ (аксіёма 2).
$a \cap k = A$, таму $A \in a$.
$a \cap l = B$, таму $B \in a$.
$A \in a$ і $B \in a$, таму $AB = a$.
$AB \subset \alpha$ і $AB = a$, таму $a \subset \alpha$.

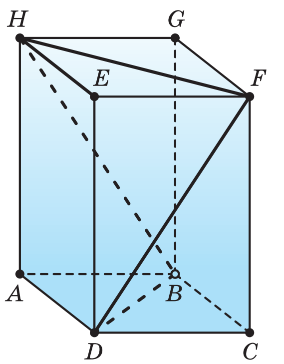
Задача 2. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDHGFE$ з'яўляецца квадрат $ABCD$ са стараной 6 см, а бакавы кант AH паралелепіпеда роўны 8 см (рыс. 86). Знайдзіце даўжыню прасторавай ломанай $HFDBH$.

Рашэнне. $DB = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (см), $AC = 6\sqrt{2}$, бо $ABCD$ — квадрат.

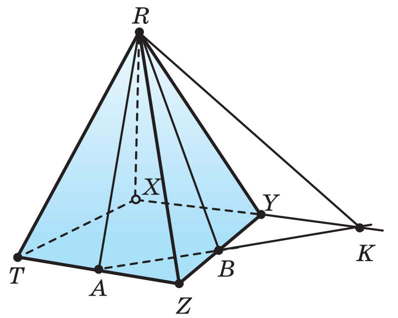
$FD = \sqrt{FC^2 + CD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см), бо $DEFC$ — прамавугольнік. $BH = FD = 10$ см, бо роўныя прамавугольнікі маюць роўныя дыяганалі.

$$l_{HFDBH} = HF + FD + DB + BH = 6\sqrt{2} + 10 + 6\sqrt{2} + 10 =$$
$$= \left(20 + 12\sqrt{2}\right) \text{ (см)} = 4\cdot\left(5 + 3\sqrt{2}\right) \text{ (см)}.$$

Адказ: $4\cdot\left(5+3\sqrt{2}\right)$ см.



Рыс. 86



Рыс. 87

Задача 3. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў TZ і YZ піраміды $RTXYZ$ (рыс. 87). Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой AB і плоскасці RXY;
б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RAB і RXY.

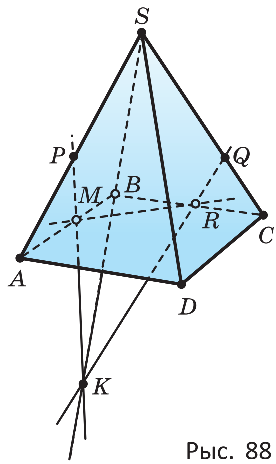
Рашэнне. а) $A \in TZ$, $TZ \subset (TXY)$, таму $A \in (TXY)$;
$B \in YZ$, $YZ \subset (TXY)$, таму $B \in (TXY)$.
$AB \subset (TXY)$ (аксіёма 2).
$XY \subset (TXY)$, таму $AB \cap XY = K$, $K \in XY$ і $K \in AB$.
$XY \subset (RXY)$, таму $K \in (RXY)$ і $K = AB \cap (RXY)$.

б) $K \in (RXY)$ і $R \in (RXY)$, таму $KR \subset (RXY)$.
$K \in AB$ і $AB \subset (RAB)$, таму $K \in (RAB)$.
$K \in (RAB)$ і $R \in (RAB)$, таму $KR \subset (RAB)$.
$KR \subset (RAB)$ і $KR \subset (RXY)$, таму $KR = (RAB) \cap (RXY)$.

Задача 4. Пункты P, Q і R належаць адпаведна кантам SA, SC і BC піраміды $SABCD$ (рыс. 88). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць PQR перасякае плоскасць ABC.

Рашэнне. $Q \in SC$ і $SC \subset (SBC)$, таму $Q \in (SBC)$.
$R \in BC$ і $BC \subset (SBC)$, таму $R \in (SBC)$.

Па аксіёме 2 $QR \subset (SBC)$.
$QR \subset (SBC)$ і $SB \subset (SBC)$,
таму $QR \cap SB = K$, $K \in SB$,
$SB \subset (SAB)$ і $K \in (SAB)$.
$P \in SA$ і $SA \subset (SAB)$, таму $P \in (SAB)$.
$K \in (SAB)$ і $P \in (SAB)$, таму $KP \subset (SAB)$.
$KP \subset (SAB)$ і $AB \subset (SAB)$,
таму $KP \cap AB = M \in AB$.
$R \in BC$ і $BC \subset (ABC)$, таму $R \in (ABC)$;
$R \in (PQR)$; тады $R \in (ABC) \cap (PQR)$.
$M \in AB$ і $AB \subset (ABC)$, таму $M \in (ABC)$;
$M \in KP$ і $KP \subset (PQR)$, таму $M \in (PQR)$;
тады $M \in (ABC) \cap (PQR)$.
Па аксіёме 3 $(PQR) \cap (ABC) = MR$.



Рыс. 88

21. Колькі агульных пунктаў могуць мець:
а) дзве прамыя; б) прамая і плоскасць; в) дзве плоскасці?

22. Ці могуць мець адзін агульны пункт:
а) дзве прамыя;
б) прамая і плоскасць;
в) дзве плоскасці;
г) тры плоскасці?

23. Колькі ўтвараецца ліній пры папарным перасячэнні трох плоскасцей?

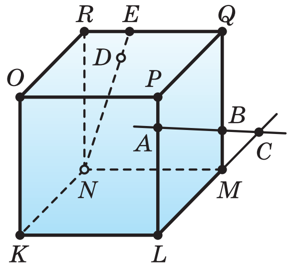
24. Колькі розных прамых могуць вызначаць розныя пункты?

25. Выкарыстаўшы рысунак 89, назавіце:
а) пункты, якія ляжаць у плоскасцях LMQ і NME;
б) плоскасці, у якіх ляжыць прамая NR;
в) пункт перасячэння прамой BC з плоскасцю KLN;
г) пункты перасячэння прамых PL і ND з плоскасцю OPR;
д) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці KON і KLM;
е) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці RDQ і MNK;
ж) пункт перасячэння прамых AB і LM;
з) пункт перасячэння прамых RQ і BD;
і) пункт перасячэння прамых BQ і MC.

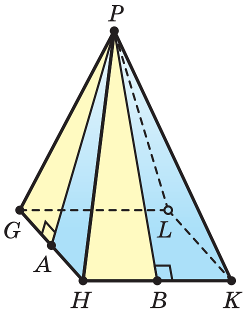
26. Чатырохвугольная піраміда $PGHKL$ на рысунку 90 — правільная, а PA і PB — вышыні яе граняў PGH і PHK. Дакажыце, што трохвугольнікі PGA і PHB роўныя.

27. Пункты A, B, C, D не ляжаць у адной плоскасці. Ці могуць:
а) якія-небудзь тры з іх ляжаць на адной прамой;
б) прамыя AB і CD перасякацца?

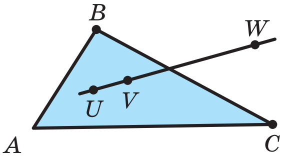
28. Пункты U і V з'яўляюцца пунктамі трохвугольніка ABC, а пункт W належыць прамой UV (рыс. 91). Ці належыць пункт W плоскасці ABC?



Рыс. 89



Рыс. 90



Рыс. 91

29. Дакажыце, што праз тры дадзеныя пункты, што ляжаць на адной прамой, праходзіць плоскасць. Колькі ёсць такіх плоскасцей?

30. Дакажыце, што калі дзве сумежныя вяршыні чатырохвугольніка і пункт перасячэння яго дыяганалей належаць пэўнай плоскасці, то чатырохвугольнік цалкам ляжыць у гэтай плоскасці.

31. Ці праўдзівае сцверджанне:

а) прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна перасякае дзве яго стараны ва ўнутраных пунктах;

б) прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна перасякае дзве яго стараны?

32. Дакажыце, што любая прамая, якая:

а) праходзіць праз вяршыню A трохвугольнай піраміды $ABCD$ і перасякае прамую CD, належыць плоскасці ACD;

б) не праходзіць праз вяршыню B трохвугольнай піраміды $ABCD$ і перасякае як прамую BC, так і прамую BD, належыць плоскасці BCD.

33. Плоскасць β праходзіць праз дзве сумежныя вяршыні трапецыі і пункт перасячэння яе дыяганалей. Дакажыце, што дзве іншыя вяршыні трапецыі ляжаць у плоскасці β.

34. Ёсць тры пункты A, B, C, якія не ляжаць на адной прамой. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія:

а) праходзяць праз пункт A і перасякаюць прамую BC, ляжаць у адной плоскасці;

б) не праходзяць праз пункт A і перасякаюць абедзве прамыя AB і AC, ляжаць у адной плоскасці.

35. Ці можна сцвярджаць, што прамая ляжыць у плоскасці дадзенага трохвугольніка, калі яна:

а) праходзіць праз вяршыню трохвугольніка;

б) перасякае дзве стараны трохвугольніка;

в) перасякае ў розных пунктах дзве стараны трохвугольніка;

г) перасякае дзве прамыя, на якіх ляжаць стараны трохвугольніка;

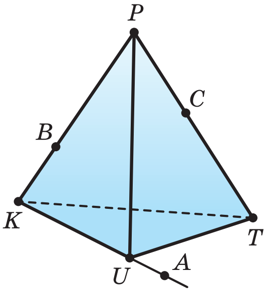
д) перасякае тры прамыя, на якіх ляжаць стараны трохвугольніка?

36. Ёсць прамая a і пункт K, не прыналежны ёй. Дакажыце, што ўсе прамыя, што праходзяць праз пункт K і перасякаюць прамую a, ляжаць у адной плоскасці.

37. Пункты M і N належаць кантам SS_1 і RR_1 прызмы $PQRSP_1Q_1R_1S_1$. Дакажыце, што прамая MN належыць плоскасці RSS_1.

38. Прамая a ляжыць у адной з перасякальных плоскасцей β і перасякае другую плоскасць γ. Дакажыце, што прамая a перасякае лінію перасячэння плоскасцей β і γ.

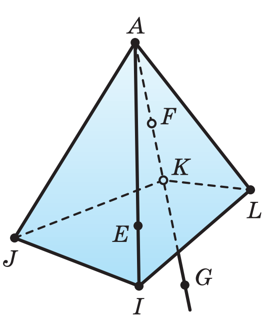
39. Выкарыстаўшы рысунак 92, на якім пункты B і C належаць кантам PK і PT трохвугольнай піраміды $KPTU$, а пункт A ляжыць на прамой, што праходзіць праз кант KU:
а) назавіце прамыя, якім належыць пункт U;
б) дакажыце, што прамая AB ляжыць у плоскасці KPU;
в) устанавіце, якім граням піраміды належыць прамая BC;
г) устанавіце, якім граням піраміды належыць прамая KT;
д) назавіце плоскасць, якой належыць пункт A;
е) назавіце прамыя, праз якія праходзіць плоскасць KPT.



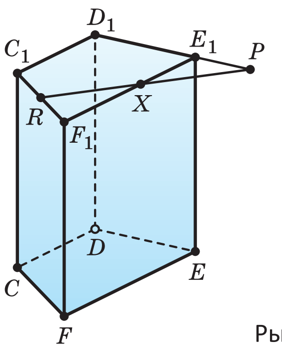
Рыс. 92

40. Выкарыстаўшы рысунак 93, на якім E — пункт канта AI чатырохвугольнай піраміды $AIJKL$, пункт F належыць канту AK, а пункт G ляжыць на прамені AK за пунктам K:
а) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IAJ і JAK;
б) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці AJG і KAL;
в) дакажыце, што прамая EF ляжыць у плоскасці IAK;
г) дакажыце, што прамыя EF і FG ляжаць у адной плоскасці;
д) назавіце плоскасці, якім належыць прамая JL.

41. На рысунку 94 адлюстравана чатырохвугольная прызма $CDEFC_1D_1E_1F_1$, пункт P выбраны на прамені D_1E_1 за пунктам E_1, а пункт R — на канце C_1F_1. Выкарыстаўшы гэты рысунак:



Рыс. 93



Рыс. 94

а) дакажыце, што прамая PR належыць плоскасці $C_1D_1F_1$;

б) дакажыце, што прамая PR перасякае прамую E_1F_1;

в) назавіце прамую, па якой плоскасць $C_1D_1F_1$ перасякае плоскасць DD_1E;

г) назавіце прамую, па якой плоскасць $C_1D_1F_1$ перасякае плоскасць PRF;

д) назавіце пункт, у якім прамая PR перасякае плоскасць DEE_1;

е) назавіце пункт, у якім прамая PR перасякае плоскасць FF_1E_1.

42. Ёсць прызма $MTUXM_1T_1U_1X_1$. На прамені TT_1 за пунктам T_1 выбраны пункт H, праз які праведзены прамыя HU і HX (рыс. 95). Выкарыстаўшы гэта:

а) дакажыце, што прамыя HU і T_1U_1 перасякаюцца ў пэўным пункце B;

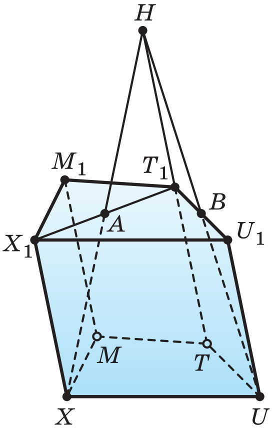
б) назавіце пункт, у якім прамая HU перасякае плоскасць $M_1T_1X_1$;

в) дакажыце, што прамыя HX і T_1X_1 перасякаюцца ў пэўным пункце A;

г) дакажыце, што прамая HX і плоскасць $M_1T_1U_1$ перасякаюцца ў пункце A;

д) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і T_1TU;

е) назавіце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці XHU і MTX.

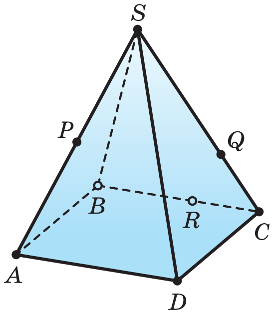


Рыс. 95

43. Пункты P, Q і R належаць адпаведна кантам SA, SC і BC пірамiды $SABCD$ (рыс. 96). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць PQR перасякае плоскасць:

а) SBC; в) SBD;

б) SAB; г) SDC.



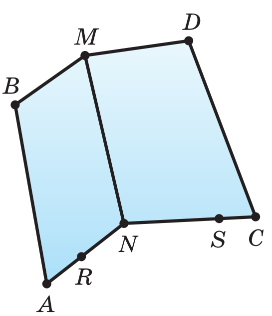
Рыс. 96

44. Пункт M — унутраны пункт канта AJ трохвугольнай пiрамiды $AIJK$, пункт N ляжыць на прамені AK за пунктам K. Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой MN з плоскасцю IJK;

б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці IMN і IJK.

45. На адрэзку MN як на старане ў розных плоскасцях пабудаваны два чатырохвугольнікі $MNAB$ і $MNCD$, на адрэзках NA і NC выбраны ўнутраныя пункты R і S адпаведна (рыс. 97).



Рыс. 97

Зрабіце такі рысунак у сшытку і:

а) пабудуйце пункт, у якім прамая MR перасякае плоскасць ABC;

б) пабудуйце пункт перасячэння прамой CD з плоскасцю ARS;

в) дакажыце, што прамая RS належыць плоскасці CAN.

46. Пункты A і B — унутраныя пункты кантаў KM і KQ прызмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$. Пабудуйце:

а) пункт, у якім прамая AB перасякае плоскасць M_1MO;

б) прамую, па якой плоскасць ABO_1 перасякае плоскасць MOO_1.

47. Пункты A, B, C з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў T_1U_1, U_1V_1, V_1V паралелепіпеда $TUVWT_1U_1V_1W_1$. Пабудуйце:

а) пункт, у якім прамая AB перасякае плоскасць WW_1V_1;

б) прамую, па якой плоскасць ABC перасякае плоскасць WW_1V_1.

48. Дыяганалі KM і LN асновы $KLMN$ пірамідзы $AKLMN$ перасякаюцца ў пункце O, пункт B — унутраны пункт адрэзка KO, а пункт C ляжыць на прамені LN за пунктам N. Пабудуйце:

а) пункт, у якім прамая BC перасякае плоскасць ALM;

б) прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і ALM.

49. Ёсць паралелепіпед $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Пабудуйце:

а) пункт перасячэння прамой EE_1 з лініяй перасячэння плоскасцей BC_1D і C_1CE;

б) лінію перасячэння плоскасцей BC_1D і EDD_1.

50. Пункты A і B ляжаць у гранях PQS і PRS трохвугольнай пірамідзы $PQRS$ (рыс. 98). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая AB перасякае:

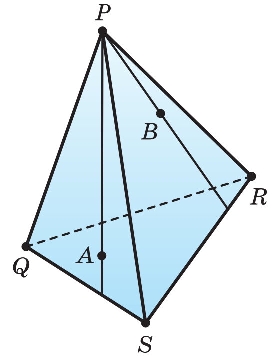
а) плоскасць QRS;

б) плоскасць PQR.

51. Бакавая паверхня прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай роўная 12 см^2. Знайдзіце дыяганаль бакавой грані, улічыўшы, што дыяганаль асновы роўная $\sqrt{2}$ см.

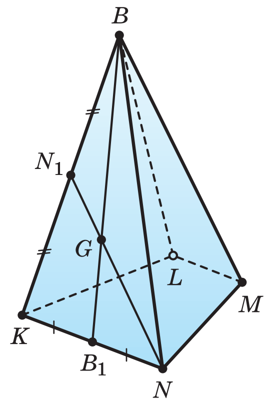
52. Асновай прамой трохвугольнай прызмы з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік, радыусы ўмежанай у яго і апісанай каля яго акружнасцей роўныя адпаведна 4 см і 10 см. Знайдзіце поўную паверхню прызмы, улічыўшы, што яе бакавы кант роўны 16 см.

53. Асновай прамой прызмы з'яўляецца раўнабедраная трапецыя, у якую можна ўмежыць акружнасць. Бакавая старана трапецыі роўная 12 см і ўтварае з асновай вугал у 30°. Знайдзіце бакавы кант прызмы, улічыўшы, што яе поўная паверхня роўная 336 см^2.



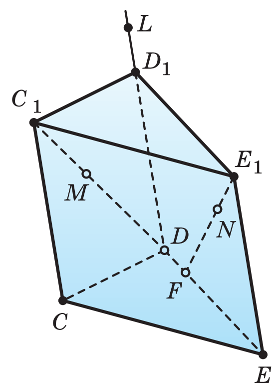
Рыс. 98

54. Медыяны BB_1 і NN_1 грані BKN чатырохвугольнай піраміды $BKLMN$ перасякаюцца ў пункце G (рыс. 99). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт, у якім прамая MG перасякае плоскасць BLN.



Рыс. 99

55. Пункт M выберыце на дыяганалі DC_1 грані трохвугольнай прызмы $CDEC_1D_1E_1$, пункт N — на адрэзку E_1F, дзе F — унутраны пункт канта DE, пункт L — на прамені DD_1 за пунктам D_1 (рыс. 100). Пабудуйце прамую, па якой плоскасць MNL перасякае плоскасць ECC_1.



Рыс. 100

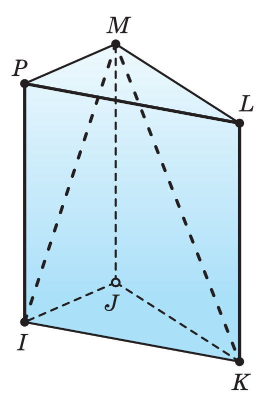
56. Выберыце пункты A і B адпаведна на кантах MX і MY чатырохвугольнай піраміды $MXYZV$, а пункт C — на прамені YZ за пунктам Z. Пабудуйце прамую, па якой перасякаюцца плоскасці ABC і XYZ.

57. Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы $IJKPML$ (рыс. 101) адносіцца да бакавога канта як 2 : 3. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што даўжыня ломанай $IPLKMI$ роўная $16 + 4\sqrt{13}$ дм.

58. Пункты A і B дзеляць канты QD і QE правільнай чатырохвугольнай піраміды $QCDEF$ з усімі роўнымі кантамі ў адносіне 5 : 7, калі лічыць ад вяршыні Q. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што даўжыня ломанай $ABQFA$ роўная 70 см.

59*. Плошча бакавой паверхні прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ з квадратнай асновай роўная 2640 мм^2. Знайдзіце канты паралелепіпеда, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік NKK_1, роўны 5 мм.

60*. Дыяганаль бакавой грані прамавугольнага паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай роўная 52 см, а радыус акружнасці, умежанай у трохвугольнік CC_1D, роўны 8 см. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда.



Рыс. 101

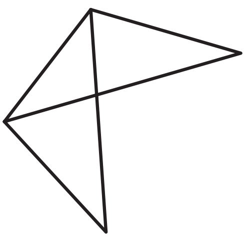
61*. Бакавы кант правільнай чатырохвугольнай піраміды роўны 8 см, а яе бакавая паверхня — $16\sqrt{15}$ см^2. Знайдзіце старану асновы піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, умежанай у бакавую грань, роўны $2\sqrt{0,6}$ см.

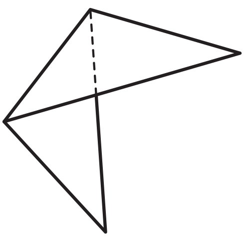
Прасторавае мадэляванне

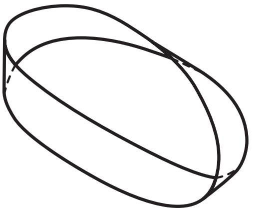
Адкажыце, якая — плоская ці прасторавая — фігура паказана на рысунку:

а) 102; б) 103; в) 104.

На рысунку 104 паказана паверхня, якую называюць стужкай Мёбіуса, або лістом Мёбіуса. Яе адкрылі незалежна адзін ад аднаго ў 1858 годзе нямецкія матэматыкі Аўгуст Мёбіус і Ёган Лістынг. Да гэтага меркавалася, што кожная паверхня мае два бакі, якія можна пафарбаваць рознымі колерамі.


Рыс. 102


Рыс. 103


Рыс. 104

Стужка Мёбіуса мае адзін бок і адзін край. У гэтым лёгка ўпэўніцца. Возьмем прамавугольную стужку $ABCD$ і склеім яе так, каб пункт A супаў з пунктам C, а пункт B — з пунктам D. Зрабіце гэта самі і паспрабуйце зафарбаваць атрыманую стужку, не пераходзячы праз яе край. Які вынік у вас атрымаўся?

Якая паверхня атрымаецца, калі ліст Мёбіуса разрэзаць па яго сярэдняй лініі? Паспрабуйце зафарбаваць гэту паверхню. Што атрымалася? А што будзе, калі ліст Мёбіуса разрэзаць, адступіўшы ад яго краю на трэць шырыні?

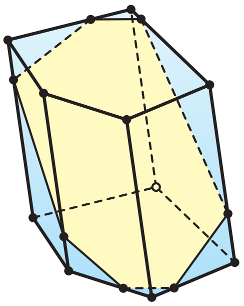
Памятны знак «Ліст Мёбіуса» (рыс. 105) быў устаноўлены 22 студзеня 2009 года да 80-годдзя Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі.

Уласцівасці стужкі Мёбіуса знайшлі практычнае прымяненне і ў прамысловасці. У выглядзе стужкі Мёбіуса робяць шліфавальныя стужкі, фарбавальную стужку матрычных прынтараў, паласу стужкавага канвеера, што дазваляе павялічыць тэрмін службы, таму што ўся паверхня стужкі раўнамерна зношваецца. Стужку Мёбіуса прымяняюць у сістэмах запісу на бесперапынную плёнку, каб падвоіць час запісу.

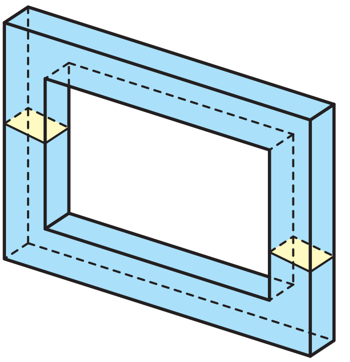

Рыс. 105

§ 3. Пабудаванне сячэнняў мнагаграннікаў

А) Пры вывучэнні стэрэаметрыі даводзіцца прасторавыя фігуры паказваць на плоскіх рысунках. Часта на рысунку трэба паказаць узаемнае размяшчэнне дзвюх фігур. Калі адна з фігур — мнагаграннік, а другая — плоскасць, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе тая частка мнагагранніка, якая належыць разгляданай плоскасці, або, іншымі словамі, *сячэнне мнагагранніка плоскасцю*. Плоскасць пры гэтым называюць *сякучай плоскасцю*.



Рыс. 106



Рыс. 107

Сякучая плоскасць перасякае паверхню мнагагранніка па адрэзках, а сячэннем мнагагранніка плоскасцю з'яўляецца адзін або некалькі многавугольнікаў.

На рысунку 106 паказана сячэнне пяцівугольнай прызмы, якое з'яўляецца сямівугольнікам. Сячэнне «рамы» плоскасцю на рысунку 107 складаецца з двух чатырохвугольнікаў.

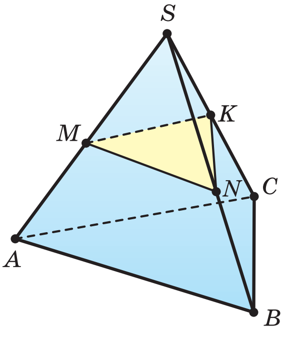
Для пабудавання сячэння мнагагранніка дастаткова пабудаваць агульныя пункты яго граняў і сякучай плоскасці.

Прыклад 1. Пабудуем сячэнне трохвугольнай піраміды $SABC$ плоскасцю, што праходзіць праз пункты M, N і K на кантах SA, SB і SC.

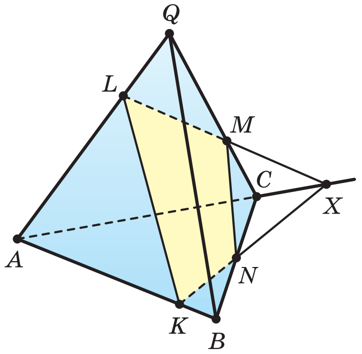
Сякучая плоскасць MNK мае з плоскасцю SAB два агульныя пункты M і N, таму прамая MN належыць як сякучай плоскасці, так і плоскасці SAB. Значыць, адрэзак MN — лінія перасячэння грані SAB з плоскасцю MNK.

Разважаючы аналагічна, атрымліваем, што плоскасць MNK перасякае грані SAC і SBC па адрэзках MK і NK адпаведна.

Трохвугольнік MNK — шуканае сячэнне (рыс. 108).



Рыс. 108



Рыс. 109

Прыклад 2. Пабудуем сячэнне трохвугольнай піраміды $QABC$ плоскасцю α, што праходзіць праз пункты K, L, M кантаў AB, AQ, CQ.

Сякучая плоскасць α (рыс. 109) мае з гранню AQB два агульныя пункты K і L, таму яна перасякае гэту грань па адрэзку KL.

Гэтаксама, паколькі пункты L і M — агульныя пункты сякучай плоскасці і грані AQC, то LM — лінія перасячэння гэтых плоскасцей.

Грань ABC мае з сякучай плоскасцю агульны пункт K. Знойдзем пункт, у якім плоскасць α перасякае кант BC. Звернем увагу на тое, што пункт X перасячэння прамых LM і AC належыць плоскасці α, плоскасці AQC і плоскасці ABC. А паколькі пункты K і X — агульныя пункты плоскасцей α і ABC, то KX — прамая, па якой плоскасць α перасякае плоскасць ABC. Пункт N перасячэння прамой KX з кантам BC належыць плоскасці α. Значыць, плоскасць α перасякае грань ABC па адрэзку KN, а грань BQC — па адрэзку MN.

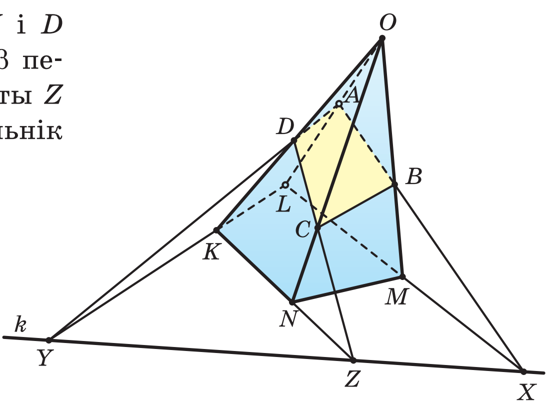
Чатырохвугольнік $KLMN$ — шуканае сячэнне піраміды плоскасцю α.

Прамыя KL і KN называюць слядамі плоскасці α на плоскасцях ABQ і ABC адпаведна.

Прыклад 3. Пабудуем сячэнне піраміды $OKLMN$ плоскасцю β, што праходзіць праз пункт A на канце OL і прамую k у плоскасці асновы $KLMN$.

Знойдзем пункт X (рыс. 110), у якім перасякаюцца прамыя LM і k. Гэты пункт належыць і сякучай плоскасці β як пункт прамой k, і плоскасці грані LOM як пункт прамой LM. Пункт A таксама належыць гэтым абедзвюм плоскасцям. Таму плоскасць β перасякае плоскасць LOM па прамой AX, а грань LOM — па адрэзку AB, дзе B — пункт перасячэння прамых AX і OM.

Гэтаксама знойдзем пункты Y і D і адрэзак AD, па якім плоскасць β перасякае грань OLK, а затым пункты Z і C і адрэзкі DC і BC. Чатырохвугольнік $ABCD$ — шуканае сячэнне.



Рыс. 110

Б) A, B, C — пункты на розных кантах чатырохвугольнай прызмы. Знойдзем сячэнне прызмы плоскасцю ABC.

Пабудаванне шуканага сячэння залежыць ад таго, на якіх кантах прызмы ляжаць пункты A, B, C. Найбольш проста будаваць сячэнне ў тым выпадку, калі пункты A, B, C ляжаць на кантах, што выходзяць з адной вяршыні. Шуканае сячэнне ў гэтым выпадку — трохвугольнік ABC.

Прыклад 4. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 111. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC. Спачатку пабудуем след сякучай плоскасці ABC на плоскасці ніжняй асновы. Для гэтага знойдзем пункты M і N перасячэння прамых AB і BC, якія ляжаць у сякучай плоскасці, з плоскасцю $RSUV$: M — пункт перасячэння прамых AB і RV, N — прамых BC і UV. Прамая MN — агульная прамая сякучай плоскасці і плоскасці ніжняй асновы.

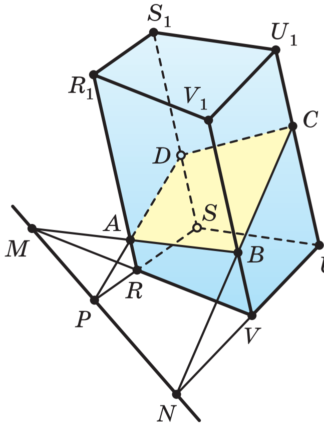
Пункт P перасячэння прамой RS са следам MN належыць і сякучай плоскасці, і плоскасці грані RR_1S_1S. Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць і пункт A, атрымліваем, што прамая PA — след сякучай плоскасці на плоскасці RR_1S_1S. Значыць, плоскасць ABC перасякае грань RR_1S_1S па адрэзку AD, а грань UU_1S_1S — па адрэзку CD.

Шуканым сячэннем з'яўляецца чатырохвугольнік $ABCD$.

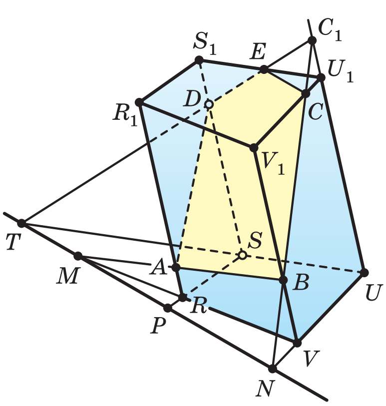
Бачым, што новым элементам у гэтым рашэнні ў параўнанні з прыкладам **2** з'яўляецца пабудаванне следу сякучай плоскасці на плоскасці асновы.

Прыклад 5. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 112. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC.

Спачатку пабудуем след сякучай плоскасці ABC на плоскасці ніжняй асновы. Для гэтага знойдзем пункты M і N перасячэння прамых AB і BC, якія ляжаць у сякучай плоскасці, з плоскасцю $RSUV$: M — пункт перасячэння прамых AB і RV, N — прамых BC і UV. Прамая MN — агульная прамая сякучай плоскасці і плоскасці ніжняй асновы.



Рыс. 111



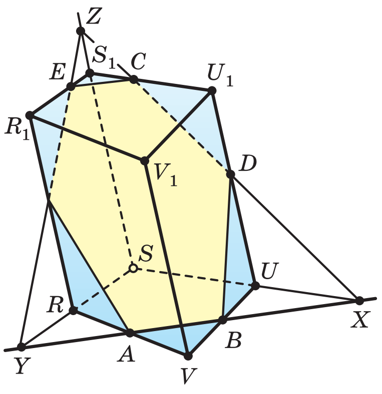
Рыс. 112

Пункт P перасячэння прамой RS са следам MN належыць і сякучай плоскасці, і плоскасці грані RR_1S_1S. Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць і пункт A, атрымліваем, што прамая PA — след сякучай плоскасці на плоскасці RR_1S_1S. Значыць, плоскасць ABC перасякае грань RR_1S_1S па адрэзку AD.

Знойдзем пункт C_1 перасячэння прамой BC і плоскасці грані S_1SUU_1. Прамая BC ляжыць у сякучай плоскасці з плоскасцю S_1SUU_1 і перасякае кант UU_1 у пункце C_1. Таму C_1 належыць сякучай плоскасці. Улічыўшы, што гэтым дзвюм плоскасцям належыць пункт D, атрымліваем, што прамая DC_1 — след сякучай плоскасці на плоскасці S_1SUU_1. Значыць, плоскасць ABC перасякае грань S_1SUU_1 па адрэзку ED.

Шуканым сячэннем з'яўляецца пяцівугольнік $ABCED$.

Прыклад 6. Пункты A, B, C размешчаны так, як паказана на рысунку 113. Пабудуем сячэнне прызмы плоскасцю ABC.



Рыс. 113

След AB сякучай плоскасці на плоскасці асновы дазваляе паслядоўна знайсці пункты X і Y яго перасячэння з гранямі SUU_1S_1 і RSS_1R_1, след XC сякучай плоскасці — на плоскасці SUU_1S_1. Значыць, плоскасць ABC перасякае грань SUU_1S_1 па адрэзку CD. Няхай пункт Z — пункт перасячэння прамой XC і плоскасці грані RSS_1R_1. Тады Z — пункт перасячэння канта SS_1 з сякучай плоскасцю і след ZY сякучай плоскасці на грані RSS_1R_1. Таму плоскасць ABC перасякае грань RSS_1R_1 па адрэзку EF.

Шуканым сячэннем з'яўляецца шасцівугольнік $ABDCEF$.

?

1. Якая фігура называецца сячэннем мнагагранніка? Якой фігурай можа быць гэта сячэнне?
2. Якая прамая называецца следам адной плоскасці на другой?
3. Якім можа быць сячэнне плоскасцю чатырохвугольнай прызмы?
4. Ці праўда, што сячэннем пяцівугольнай пірамiды можа быць:
   а) пункт;
   б) адрэзак;
   в) чатырохвугольнік;
   г) шасцівугольнік;
   д) сямівугольнік?

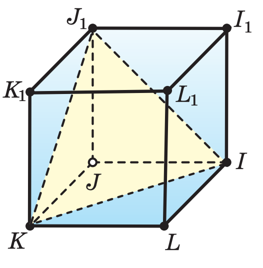
5. Ці праўда, што сячэннем пяцівугольнай прызмы можа быць:
а) адрэзак;
б) чатырохвугольнік;
в) шасцівугольнік;
г) сямівугольнік;
д) васьмівугольнік?

Задача 1. Пабудуйце сячэнне куба $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскасцю IKJ_1 (рыс. 114). Знайдзіце кант куба, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S.

Рашэнне. Плоскасць IKJ_1 перасякае грані $IJKL$, IJJ_1I_1, JKK_1J_1 па адрэзках IK, IJ_1, J_1K адпаведна. Таму трохвугольнік IKJ_1 — шуканае сячэнне.

$\triangle\ IKJ_1$ — правільны, таму $S_{IKJ_1} = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$, або $S = \dfrac{\sqrt{3}IK^2}{4}$. Таму $IK^2 = \dfrac{4S}{\sqrt{3}}$.

$\triangle\ IJK$ — раўнабедраны прамавугольны з прамым вуглом J, таму $2IJ^2 = IK^2$, або $IJ^2 = \dfrac{IK^2}{2}$, або $IJ^2 = \dfrac{2S}{\sqrt{3}}$, або $IJ = \sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.



Рыс. 114

Адказ: $\sqrt{\dfrac{2S}{\sqrt{3}}}$.

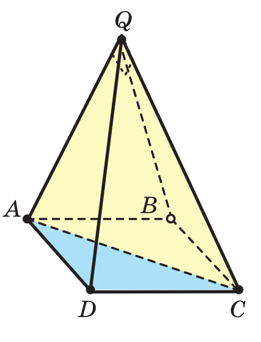
Задача 2. Пабудуйце сячэнне правільнай піраміды $QABCD$ плоскасцю, што праходзіць праз бакавы кант і супрацьлеглую яму вяршыню асновы. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што ўсе канты гэтай піраміды роўныя a.

Рашэнне. Няхай $QABCD$ — правільная піраміда; $AB = BC = CD = DA = QA = QB = QC = QD = a$.

Q, A, C — вяршыні піраміды, таму QAC — шуканае сячэнне.

$AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ ($ABCD$ — квадрат).

У $\triangle\ AQC\ AQ = QC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Таму $\angle AQC = 90^\circ$ і $S_{\text{сяч}} = S_{AQC} = \dfrac{a^2}{2}$.



Рыс. 115

Адказ: $\dfrac{a^2}{2}$.

?

1. Колькасць дыяганальных сячэнняў чатырохвугольнай піраміды роўная:

а) 1; в) 3;

б) 2; г) 4.

2. Вызначце від фігуры, што з'яўляецца сячэннем куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыні A, C і D_1.

62. Нарысуйце куб $STRUS_1T_1R_1U_1$ і пазначце пункты B і C на кантах SU і RU. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю BCT_1.

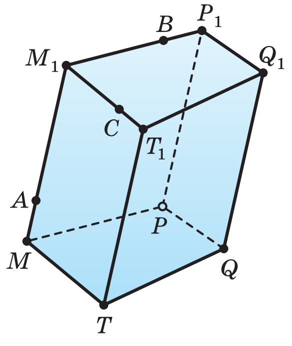
63. Пункты A, B, C ляжаць на кантах MM_1, M_1P_1, M_1T_1 прызмы $MPQTM_1P_1Q_1T_1$ (рыс. 116). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC.

64. Нарысуйце куб $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і пазначце сярэдзіны A, B і C кантаў NM, NO і NN_1. Выкарыстаўшы атрыманы рысунак:

а) пабудуйце сячэнне куба плоскасцю ABC;

б) дакажыце, што трохвугольнік ABC правільны;

в) знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, прымаючы кант куба роўным 1 м.

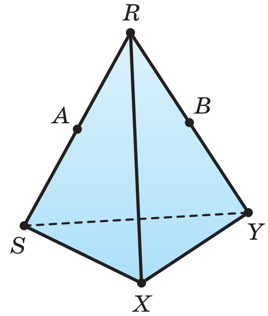


Рыс. 116

65. Нарысуйце куб $NORQN_1O_1R_1Q_1$ і пазначце сярэдзіны A і B яго кантаў NQ і QR. Дакажыце, што сячэнне куба плоскасцю ABQ_1 з'яўляецца раўнабедраным трохвугольнікам. Знайдзіце кант куба, улічыўшы, што перыметр гэтага трохвугольніка роўны a.

66. Пабудуйце сячэнне піраміды $ABCD$ плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў AB, AC, AD. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што ўсе канты гэтай піраміды роўныя a.

67. На рысунку 117 паказана правільная піраміда $RSXY$, у якой грань асновы роўная бакавой грані. На яе кантах RS і RY пазначаны іх сярэдзіны A і B. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды

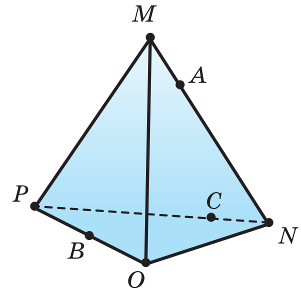


Рыс. 117

плоскасцю ABX. Дакажыце, што трохвугольнік ABX з'яўляецца раўнабедраным, і знайдзіце яго перыметр і плошчу, улічыўшы, што кант піраміды роўны a.

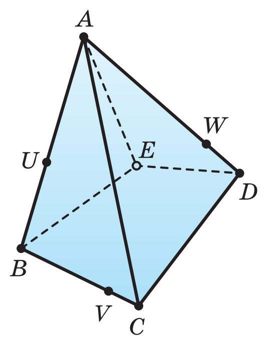
68. Канты UX, UZ, UU_1 прамавугольнага паралелепіпеда $UXYZU_1X_1Y_1Z_1$ роўныя 6 см, 6 см, 8 см адпаведна. Дакажыце, што сячэнне паралелепіпеда плоскасцю XY_1Z ёсць раўнабедраны трохвугольнік, і знайдзіце вышыні гэтага трохвугольніка.

69. Нарысуйце прамавугольны паралелепіпед $TPQRT_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую T_1Q_1 і вяршыню R. Знайдзіце плошчу гэтага сячэння, улічыўшы, што канты RT і RQ роўныя адзін аднаму і роўныя l, а радыус акружнасці, апісанай каля чатырохвугольніка RQQ_1R_1, роўны a.



Рыс. 118

70. На рысунку 118 паказана трохвугольная піраміда $MNOP$. Пабудуйце сячэнне трохвугольнай піраміды $MNOP$ плоскасцю ABC, улічыўшы, што пункты A, B, C выбраны адпаведна на кантах MN, OP, PN.

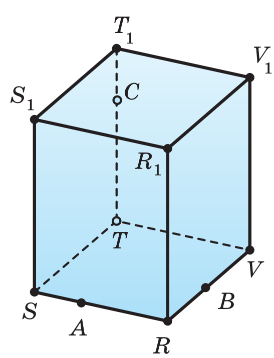


Рыс. 119

71. На рысунку 119 пункты U, V, W выбраны на кантах AB, BC, AD піраміды $ABCDE$. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю UVW.

72. Пабудуйце сячэнне чатырохвугольнай прызмы $RSTVR_1S_1T_1V_1$ плоскасцю ABC, улічыўшы, што пункты A, B, C выбраны адпаведна на кантах RS, RV, TT_1 (рыс. 120).

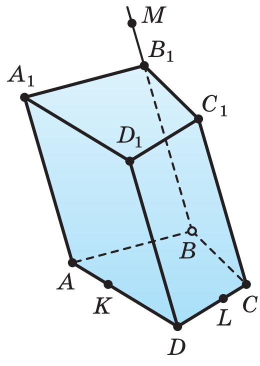
73. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы $CDEC_1D_1E_1$ роўная 12 см, а яе бакавы кант — 6 см. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю, якой належыць старана асновы і супрацьлеглая вяршыня другой асновы.



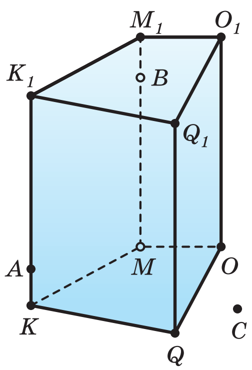
Рыс. 120

74. Кант асновы правільнай трохвугольнай піраміды і яе бакавы кант адпаведна роўныя k і l. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, што праходзіць праз дзве вяршыні асновы і сярэдзіну бакавога канта.

75*. Пункт C — сярэдзіна канта JL даўжынёй a правільнай трохвугольнай піраміды $IJKL$, бакавая грань якой роўная грані асновы.



Рыс. 121



Рыс. 122

Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю IKC і знайдзіце радыусы акружнасцей, адна з якіх умежана ў гэта сячэнне, а другая апісана каля яго.

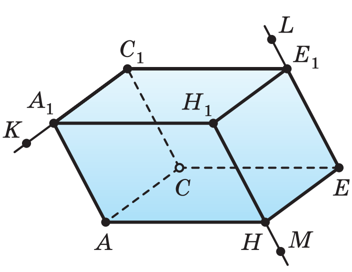
76*. Нарысуйце куб $RSTVR_1S_1T_1V_1$ і пазначце сярэдзіну C ягоканта SS_1. Пабудуйце сячэнне куба плоскасцю, што праходзіць праз прамую RT і пункт C. Знайдзіце медыяны трохвугольніка RTC, улічыўшы, што кант куба роўны 40 мм.

77. Пункты K і L выбраны на кантах DA і DC прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а пункт M — на прамені BB_1 за пунктам B_1 (рыс. 121). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю KLM.

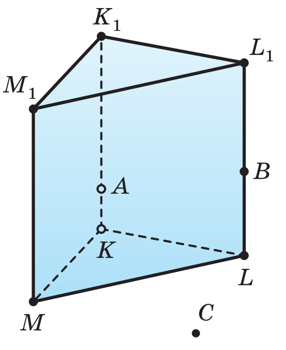
78. Пункты A і B ляжаць адпаведна на кантах KK_1 і MM_1 прызмы $KMOQK_1M_1O_1Q_1$, а пункт C — на плоскасці грані $KMOQ$ (рыс. 122). Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC.

79. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ACEHA_1C_1E_1H_1$ плоскасцю KLM, улічыўшы, што пункты K, L, M ляжаць адпаведна на праменях C_1A_1, EE_1, H_1H за пунктамі A_1, E_1, H (рыс. 123).

80. Пункты A і B ляжаць на кантах KK_1 і LL_1 трохвугольнай прызмы $KLMK_1L_1M_1$, а пункт C — на плоскасці KLM (рыс. 124). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC.



Рыс. 123



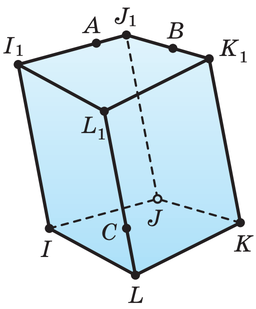
Рыс. 124

81. На рысунку 125 паказана прызма $IJKLI_1J_1K_1L_1$, на кантах J_1I_1, J_1K_1, LL_1 выбраны пункты A, B, C. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю ABC.

82. Нарысуйце прызму $MNOPM_1N_1O_1P_1$ і на яе кантах NN_1, MP, OP выберыце пункты C, D, E. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю CDE.

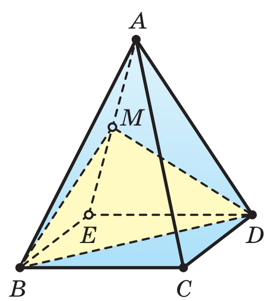
83. Ёсць правільная прызма $XYZX_1Y_1Z_1$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу сячэння прызмы плоскасцю XY_1Z_1, улічыўшы, што поўная паверхня прызмы роўная S.

84. Ёсць такая правільная трохвугольная прызма, што плоскасць, якая праходзіць праз старану яе асновы і супрацьлеглую вяршыню другой асновы, дзеліць поўную паверхню прызмы ў адносіне 2 : 3. Знайдзіце гэту паверхню, улічыўшы, што кант асновы роўны a.



Рыс. 125

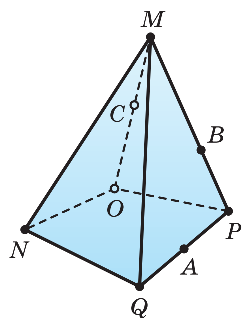
85. На рысунку 126 паказана правільная піраміда $ABCDE$ і на канце AE пазначана яго сярэдзіна M. Трохвугольнік BMD ёсць сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якой належаць прамая BD і пункт M. Знайдзіце вышыні трохвугольніка BMD, улічыўшы, што ўсе канты піраміды роўныя 20 мм.



Рыс. 126

86. Пункт A — сярэдзіна бакавога канта KE правільнай чатырохвугольнай піраміды $KCDEF$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз прамую DF і пункт A. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што плошча гэтага сячэння роўная S.

87. Зрабіце ў сшытку рысунак, падобны рысунку 127, на якім паказана чатырохвугольная піраміда $MNOPQ$ і адзначаны пункты A, B, C на кантах PQ, PM, OM адпаведна. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, што праходзіць праз пункты A, B, C.

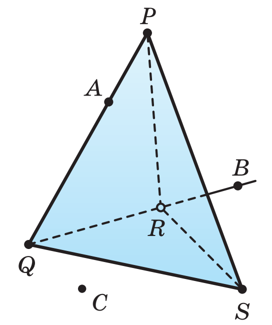


Рыс. 127

88. Нарысуйце чатырохвугольную піраміду $STUVW$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз пункты A, B, C на кантах ST, TW, VW.

89. Пункт A ляжыць на канце PQ трохвугольнай піраміды $PQRS$, пункт B — на прамені QR за пунктам R, а пункт C — на плоскасці QRS (рыс. 128). Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю ABC.

90. Ёсць піраміда $RMNOP$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Сячэннем гэтай піраміды плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню R і прамую NP, з'яўляецца трохвугольнік RNP. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды, улічыўшы, што радыус акружнасці, апісанай каля гэтага трохвугольніка, роўны R.



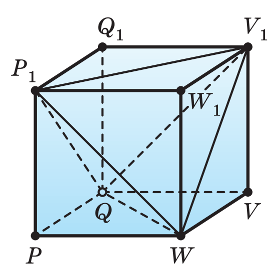
Рыс. 128

91. Нарысуйце правільную піраміду $TUVWX$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню T і прамую UW. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды, улічыўшы, што плошча пабудаванага сячэння роўная плошчы асновы, а кант асновы роўны l.

92. Піраміда V_1P_1QW мае сваімі вяршынямі вяршыні куба $PQVWP_1Q_1V_1W_1$ (рыс. 129). Знайдзіце поўную паверхню гэтай піраміды, улічыўшы, што кант куба роўны 1 м.

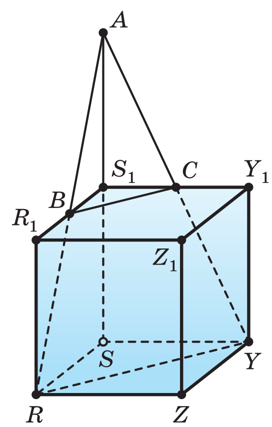
93*. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $ABTVA_1B_1T_1V_1$ плоскасцю AB_1T. Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля бакавой грані паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са стараной a, а плошча пабудаванага сячэння роўная S.

94*. Пабудуйце сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда $IJKLI_1J_1K_1L_1$ плоскасцю, што праходзіць праз вяршыню I і прамую J_1L_1. Знайдзіце поўную паверхню паралелепіпеда, улічыўшы, што яго асновай з'яўляецца квадрат са стараной a, а вугал J_1IL_1 роўны γ.



Рыс. 129

95*. Чатырохвугольнік $RBCY$ — сячэнне прамавугольнага паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз прамую RY і пункт A на прамені SS_1 за пунктам S_1 (рыс. 130). Дакажыце, што гэта сячэнне ёсць раўнабедраная трапецыя, і знайдзіце яе плошчу, улічыўшы, што аснова паралелепіпеда ёсць квадрат $RSYZ$ са стараной c, вышыня RR_1 паралелепіпеда роўная h, а вяршыня S_1 дзеліць адрэзак SA папалам.



Рыс. 130

96*. Нарысуйце куб $KPTVK_1P_1T_1V_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз прамую K_1T, і такі пункт A праменя V_1T_1, што вяршыня T_1 дзеліць адрэзак V_1A ў адносіне $2 : 1$, калі лічыць ад пункта V_1. Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што кант куба роўны 2 м.

97. Нарысуйце трохвугольную піраміду $CDEF$ і пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў FC, FD, FE. Знайдзіце плошчу грані піраміды, улічыўшы, што ўсе яе грані — роўныя правільныя трохвугольнікі, а плошча сячэння роўная 120 см^2.

98*. Кант асновы правільнай чатырохвугольнай прызмы роўны a, а плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз канцы кантаў, што выходзяць з адной вяршыні, роўная Q. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы.

Прасторавае мадэляванне

Пры вырабе бэлькі з цыліндрычнага бервяна робяць наступнае:

1) на тарцы́ бервяна праводзяць дыяметр;

2) дзеляць яго на пяць роўных частак;

3) другі дыяметр праводзяць так, каб яго праекцыя на першы складала $\frac{3}{5}$ яго;

4) канцы пабудаваных дыяметраў прымаюць за вяршыні чатырохвугольнага сячэння і счэсваюць лішак;

Параўнайце трывалась такой бэлькі з трываласцю бэлькі з квадратным сячэннем, атрыманай з такога самага бервяна, улічыўшы, што трываласць бэлькі з прамавугольным сячэннем прапарцыянальна шырыні і квадрату вышыні сячэння.

Праверце свае веды

1. Тры пункты размешчаны на роўных адлегласцях адзін ад аднаго. Ці можна выбраць яшчэ адзін пункт, роўнааддалены ад усіх астатніх?

2. Якую найбольшую колькасць прамых можна правесці праз розныя пары з пяці пунктаў:

а) 5; б) 6; в) 8; г) 10?

3. Якую найбольшую колькасць плоскасцей можна правесці праз розныя тройкі з чатырох пунктаў?

4. Колькі ўтвараецца ліній пры папарным перасячэнні трох плоскасцей?

а) 2; б) 3; в) 4; г) 6.

5. Нарысуйце прызму $ABCDEFPQRSTU$, асновы якой — правільныя шасцівугольнікі. Назавіце:

а) плоскасці, перасякальныя з плоскасцю UQR;

б) плоскасці, перасякальныя з прамой FT.

6. Старана асновы правільнай трохвугольнай прызмы роўная 6 см, а бакавы кант — 11 см. Знайдзіце поўную паверхню прызмы.

7. Кант асновы правільнай трохвугольнай прызмы $IJKPML$ адносіцца да бакавога канта як 2 : 3. Знайдзіце бакавую паверхню прызмы, улічыўшы, што даўжыня ломанай $IPLKMI$ роўная $4 + \sqrt{13}$ см.

8. Бакавая паверхня правільнай трохвугольнай піраміды роўная 30 420 мм^2, а яе бакавы кант — 169 мм. Знайдзіце плошчу асновы піраміды.

9. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 12 см, а адрэзак, што злучае вяршыню піраміды з цэнтрам асновы, — 16 см. Знайдзіце:

а) бакавы кант і апафему піраміды;

б) бакавую паверхню піраміды;

в) поўную паверхню піраміды.

10. Плошча сячэння правільнай чатырохвугольнай піраміды $RUSVW$ з кантам асновы a плоскасцю RUV роўная Q. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

«Веды толькі тады з'яўляюцца ведамі,
калі яны набыты намаганнямі
свайго мыслення, а не памяці»
(Л. М. Талстой).

РАЗДЗЕЛ 2 ПАРАЛЕЛЬНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

У гэтым раздзеле вы будзеце вывучаць:

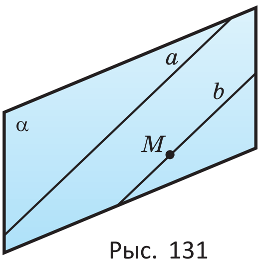
- узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы;
- узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы;
- узаемнае размяшчэнне дзвюх плоскасцей.

§ 4. Узаемнае размяшчэнне прамых у прасторы

А) Дзве прамыя прасторы называюцца **паралельнымі прамымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не маюць агульных пунктаў.

На плоскасці праз дадзены пункт можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай. Гэта сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў прасторы.

Тэарэма 1. Праз пункт па-за дадзенай прамой можна правесці адзіную прамую, паралельную дадзенай прамой.



Рыс. 131

Доказ. Няхай ёсць прамая a і пункт M па-за ёю (рыс. 131). Па тэарэме **3** з параграфа 2 праз прамую a і пункт M праходзіць адзіная плоскасць — плоскасць α. Калі прамая праходзіць праз пункт M паралельна прамой a, то яна павінна ляжаць у плоскасці α. У плоскасці α праз пункт M праходзіць адзіная прамая b, паралельная прамой a. Прамая b — шуканая прамая, і яна адзіная.

На плоскасці, калі адна з паралельных прамых перасякае іншую прамую, то і другая таксама перасякае яе. Аналагічнае сцверджанне з'яўляецца праўдзівым і ў прасторы.

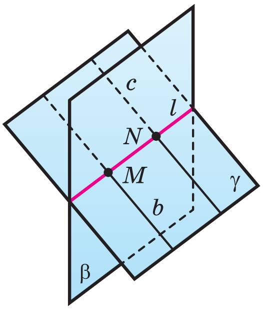
Тэарэма 2. Калі адна з дзвюх паралельных прамых перасякае плоскасць, то і другая прамая перасякае гэту плоскасць.

Доказ. Няхай ёсць дзве паралельныя прамыя b і c, і адна з іх — прамая b — перасякае плоскасць β у пункце M (рыс. 132).

Паколькі прамыя b і c паралельныя, то яны ляжаць у адной плоскасці, няхай гэта будзе плоскасць γ. Плоскасці β і γ маюць агульны пункт M, таму па аксіёме **3** яны маюць і агульную прамую l. Гэта прамая ляжыць у плоскасці γ і перасякае прамую b у пункце M, таму яна перасякае паралельную ёй прамую c у пэўным пункце N.

Паколькі прамая l ляжыць і ў плоскасці β, то пункт N належыць гэтай плоскасці. Значыць, пункт N — агульны пункт плоскасцей β і γ.

Застаецца даказаць, што прамая c з плоскасцю β не мае іншых агульных пунктаў. Дапусцім, што гэта не так. Няхай прамая c мае з плоскасцю β яшчэ адзін агульны пункт K. Тады па аксіёме **2** прамая c ляжыць у плоскасці β. Атрымліваецца, што прамая c — агульная прамая плоскасцей β і γ. Але такой прамой з'яўляецца прамая l. Значыць, прамая c супадае з прамой l, што немагчыма, бо прамая b паралельная прамой c і перасякае прамую l.

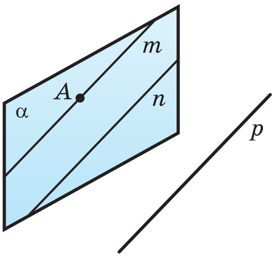


Рыс. 132

Вы ведаеце, што калі на плоскасці дзве прамыя паралельныя трэцяй, то яны паралельныя і адна адной. Дакажам, што такое сцверджанне з'яўляецца правільным і ў прасторы.

Тэарэма 3. Калі дзве розныя прамыя паралельныя трэцяй прамой, то яны паралельныя і адна адной.

Доказ. Няхай прамыя m і n паралельныя прамой p (рыс. 133). Дакажам, што прамая m паралельная прамой n, г. зн. прамыя m і n ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.



Рыс. 133

На прамой m выберам адвольна пункт A, праз яго і прамую n правядзём плоскасць α. Дакажам, што прамая m ляжыць у гэтай плоскасці. Дапусцім, што гэта не так. Улічыўшы, што прамая m мае з плоскасцю α агульны пункт, трэба пагадзіцца, што прамая m перасякае плоскасць α. Тады па тэарэме **2** гэту плоскасць перасякае прамая p, бо яна паралельная прамой m і прамая n паралельная прамой p. Але такое немагчыма, бо прамая n ляжыць у плоскасці α. Значыць, прамая m разам з прамой n ляжаць у плоскасці α.

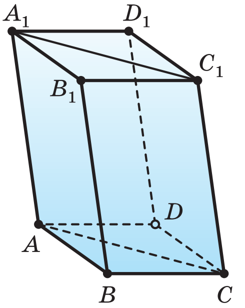
Прамыя m і n не перасякаюцца. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя m і n перасякаюцца ў пэўным пункце B. Атрымліваецца, што праз пункт B праходзяць дзве розныя прамыя m і n, паралельныя прамой p, што супярэчыць тэарэме **1**.

Выкарыстаўшы тэарэму **3**, можна даказаць важныя сцверджанні пра паралелепіпед.

Тэарэма 4. У паралелепіпеда: а) супрацьлеглыя грані роўныя; б) усе яго дыяганалі перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Доказ. Няхай ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 134).

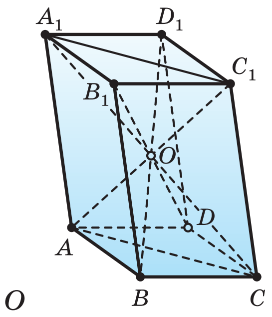
а) Дакажам, напрыклад, роўнасць супрацьлеглых граняў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.



Рыс. 134

Адрэзкі AB і A_1B_1 а таксама BC і B_1C_1 роўныя, як супрацьлеглыя стораны паралелаграмаў ABB_1A_1 і BCC_1B_1 адпаведна. Адрэзкі AA_1 і CC_1 паралельныя і роўныя адзін аднаму, бо кожны з іх паралельны адрэзку BB_1 і роўны яму. Значыць, чатырохвугольнік ACC_1A_1 — паралелаграм. А таму адрэзкі AC і A_1C_1 роўныя адзін аднаму як супрацьлеглыя стораны гэтага паралелаграма.

Паколькі $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ і $AC = A_1C_1$, то трохвугольнікі ABC і $A_1B_1C_1$ роўныя. Таму роўныя і вуглы ABC і $A_1B_1C_1$. Значыць, роўныя адзін аднаму і паралелаграмы-грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$.



Рыс. 135

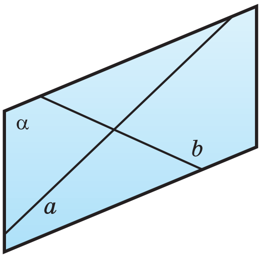
б) Дакажам, што ўсе дыяганалі паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перасякаюцца ў адным пункце і дзеляцца ім папалам.

Чатырохвугольнік AA_1C_1C — паралелаграм, бо яго супрацьлеглыя стораны AA_1 і CC_1 роўныя і паралельныя адна адной з-за таго, што кожны з адрэзкаў AA_1 і CC_1 роўны адрэзку DD_1 і паралельны яму (рыс. 135). Таму дыяганалі AC_1 і CA_1 пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

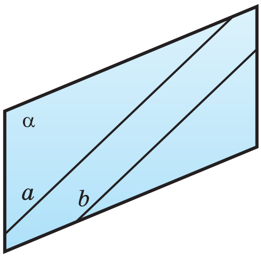
Чатырохвугольнік DCB_1A_1 — таксама паралелаграм, таму яго дыяганаль DB_1 перасякае другую дыяганаль CA_1 у яе сярэдзіне, г. зн. у пункце O.

Нарэшце, чатырохвугольнік ABC_1D_1 — паралелаграм, таму яго дыяганаль BD_1 перасякае другую дыяганаль AC_1 у яе сярэдзіне O.

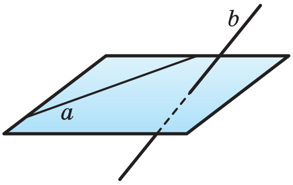
Калі дзве прамыя перасякаюцца (рыс. 136) або паралельныя (рыс. 137), то яны ляжаць у адной плоскасці. Дзве прамыя, якія не ляжаць у адной плоскасці, называюцца **скрыжаванымі** (рыс. 138).



Рыс. 136



Рыс. 137

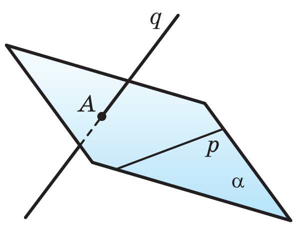


Рыс. 138

Дакажам прымету скрыжаванасці прамых.

Т э а р э м а 5. Калі з дзвюх прамых адна належыць пэўнай плоскасці, а другая перасякае гэту плоскасць у пункце, не прыналежным першай прамой, то такія прамыя з'яўляюцца скрыжаванымі.

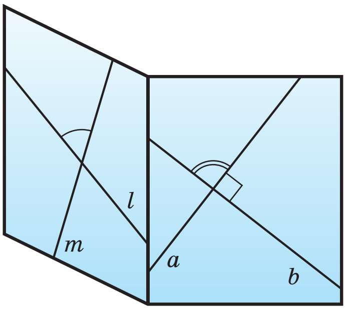
Доказ. Няхай прамая p ляжыць у плоскасці α, а прамая q перасякае гэту плоскасць у пункце A, што не належыць прамой p (рыс. 139). Дакажам, што прамыя p і q скрыжоўваюцца.



Рыс. 139

Дапусцім, што прамыя p і q ляжаць у пэўнай плоскасці β. Тады плоскасці β належыць прамая p і пункт A, які належыць прамой q, і, значыць, плоскасць β супадае з плоскасцю α. Атрымалася, што плоскасці α належыць прамая q, якая па ўмове ёй не належыць. Гэта супярэчнасць азначае, што зробленае дапушчэнне няпраўдзівае.

Б) Мы ведаем, што *вуглом паміж перасякальнымі прамымі* называецца велічыня аднаго з чатырох узніклых пры гэтым вуглоў, якія не большы за 90° (рыс. 140).

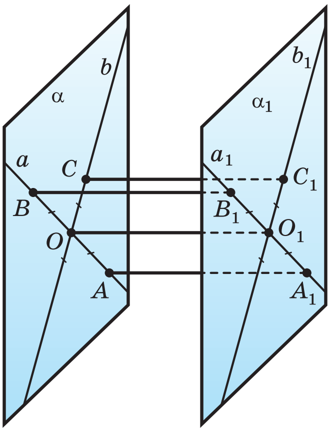


Рыс. 140

Вуглом паміж скрыжаванымі прамымі называецца вугал паміж перасякальнымі прамымі, паралельнымі дадзеным скрыжаваным прамым.

Дакажам, што гэта азначэнне карэктнае, г. зн. не залежыць ад выбару пункта, праз які праходзяць прамыя, паралельныя дадзеным скрыжаваным прамым.

Т э а р э м а 6. Вугал паміж перасякальнымі прамымі роўны вуглу паміж паралельнымі ім перасякальнымі прамымі.



Рыс. 141

Доказ. Няхай прамыя a і b перасякаюцца ў пункце O, прамыя a_1 і b_1 — у пункце O_1 і $a_1 \parallel a$, $b_1 \parallel b$ (рыс. 141).

Ад пункта O на прамой a адкладзём роўныя адрэзкі OA і OB, а на прамой b — адрэзак OC, роўны адрэзку OA. Праз пункты A і B правядзём прамыя, паралельныя прамой OO_1, яны перасякуць прамую a_1 ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Праз пункт C правядзём прамую, паралельную прамой OO_1, яна перасячэ прамую b_1 у пункце C_1.

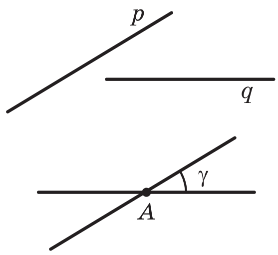
Чатырохвугольнік OO_1A_1A з'яўляецца паралелаграмам, бо яго супрацьлеглыя стораны OA і O_1A_1 паралельныя і роўныя. Таму $AA_1 = OO_1$ і $AA_1 \parallel OO_1$. Гэтаксама, паколькі чатырохвугольнік OO_1B_1B — паралелаграм, то $BB_1 = OO_1$ і $BB_1 \parallel OO_1$, а паколькі OO_1C_1C — паралелаграм, то $BB_1 = CC_1$ і $CC_1 \parallel OO_1$.

Паколькі кожны з адрэзкаў AA_1, BB_1, CC_1 роўны і паралельны адрэзку OO_1, то яны роўныя і паралельныя адзін аднаму. Таму чатырохвугольнікі AA_1C_1C і BB_1C_1C абодва з'яўляюцца паралелаграмамі і, значыць, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$.

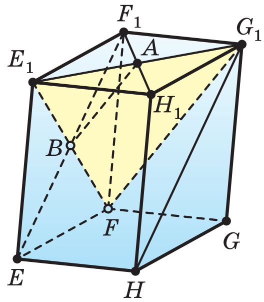
Цяпер па прымеце роўнасці трохвугольнікаў па трох старанах можна сцвярджаць, што $\triangle AOC = \triangle A_1O_1C_1$ і $\triangle BOC = \triangle B_1O_1C_1$, а таму $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$ і $\angle BOC = \angle B_1O_1C_1$.

Такім чынам мы даказалі, што вуглы, утвораныя пры перасячэнні прамых a і b, такія самыя, як і пры перасячэнні прамых a_1 і b_1.

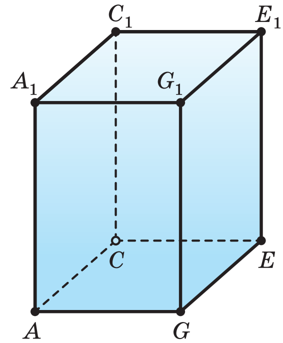
На рысунку 142 паказана, як можна знайсці вугал паміж скрыжаванымі прамымі: выбраць адвольна пункт A прасторы і праз яго правесці



Рыс. 142



Рыс. 143



Рыс. 144

прамыя, паралельныя гэтым скрыжаваным прамым. Зразумела, што пункт A можа быць выбраны і на адной са скрыжаваных прамых.

Прыклад. На рысунку 143 пункты A і B — пункты перасячэння дыяганалей граняў $E_1F_1G_1H_1$ і EE_1F_1F паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$. Пабудуем вугал паміж скрыжаванымі прамымі AB і HG_1. Для гэтага ў плоскасці E_1FG_1, якой належаць пункт G_1 і прамая AB, праз пункт G_1 паралельна прамой AB правядзём прамую. Гэта прамая G_1F. Вугал FG_1H — шуканы вугал паміж скрыжаванымі прамымі AB і HG_1.

Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным нулю.

Прамыя, вугал паміж якімі роўны $90°$, называюцца **перпендыкулярнымі прамымі.**

Перпендыкулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі, а могуць быць і скрыжаванымі. Напрыклад, перпендыкулярныя прамыя AC і AG, якія праходзяць праз адпаведныя канты прамавугольнага паралелепіпеда $ACEGA_1C_1E_1G_1$ (рыс. 144), перасякаюцца, а перпендыкулярныя прамыя AC і EE_1 скрыжоўваюцца.

?

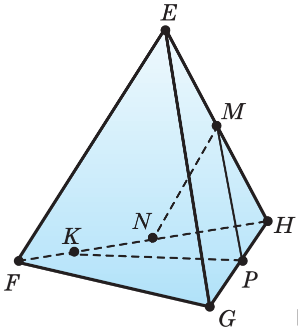
1. Сфармулюйце сцверджанне аб прамых, што праходзяць праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой.
2. Якія дзве прамыя прасторы называюцца паралельнымі; перасякальнымі; скрыжаванымі?
3. Сфармулюйце сцверджанне пра паралельныя прамыя, адна з якіх перасякае дадзеную плоскасць.
4. Сфармулюйце сцверджанне аб прамых, паралельных іншай прамой.
5. Сфармулюйце ўласцівасць супрацьлеглых граняў прамавугольнага паралелепіпеда; дыяганалей прамавугольнага паралелепіпеда.
6. Сфармулюйце прымету скрыжаваных прамых.
7. Які вугал называюць вуглом паміж перасякальнымі прамымі; скрыжаванымі прамымі; паралельнымі прамымі?

8. Як пабудаваць вугал паміж скрыжаванымі прамымі?

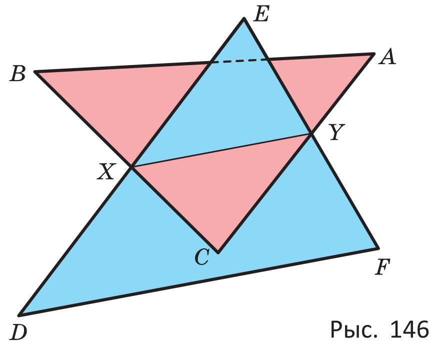
9. Якія прамыя называюць перпендыкулярнымі?

10. Пункты M, N, P — адпаведна сярэдзіны кантаў HE, HF, HG трохвугольнай піраміды $EFGH$ (рыс. 145), а пункт K ляжыць на адрэзку FN. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
а) PK і FG; б) MP і EG; в) NH і EF.

11. Вызначце, ці перасякаюцца прамыя, на якіх ляжаць асновы двух трохвугольнікаў BAC і DFE (рыс. 146), што маюць агульную сярэднюю лінію.

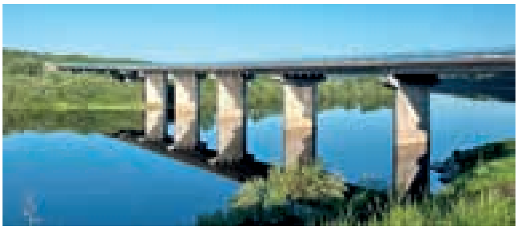


Рыс. 145



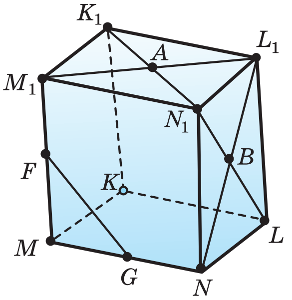
Рыс. 146

12. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне лініі ракі і лініі моста (рыс. 147).

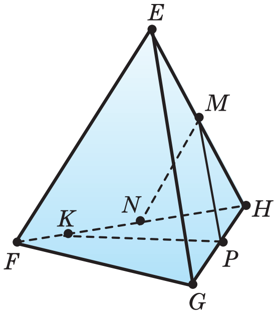

Рыс. 147

13. Ёсць куб $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Пакажыце скрыжаваныя прамыя, выкарыстаўшы рысунак 148.

14. У трохвугольнай пірамідзе $EFGH$ пункты M, N, P — сярэдзіны кантаў HE, HF, HG адпаведна, а пункт K ляжыць на адрэзку FN (рыс. 149). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых:
а) KP і MN; б) MN і EG; в) MH і FG.

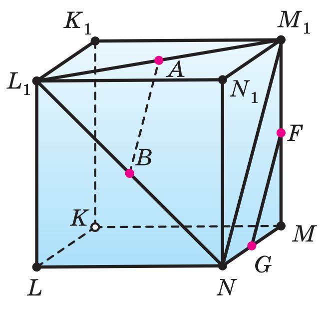


Рыс. 148



Рыс. 149

Задача 1. Дыяганалі грані $L_1K_1M_1N_1$ куба $LKMNL_1K_1M_1N_1$ перасякаюцца ў пункце A, а дыяганалі грані LL_1N_1N — у пункце B. Сярэдзінамі кантаў MM_1 і MN з'яўляюцца пункты F і G адпаведна (рыс. 150). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых AB і FG.



Рыс. 150

Рашэнне. $LKMNL_1K_1M_1N_1$ — куб, таму $L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і LL_1N_1N — квадрат.

$L_1K_1M_1N_1$ — квадрат і $L_1M_1 \cap K_1N_1 = A$, таму A — сярэдзіна L_1M_1.

LL_1N_1N — квадрат і $L_1N \cap LN_1 = B$, таму B — сярэдзіна L_1N.

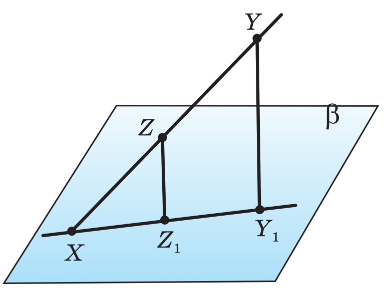
Паколькі AB — сярэдняя лінія $\triangle NL_1M_1$ (A — сярэдзіна L_1M_1 і B — сярэдзіна L_1N), то $AB \parallel NM_1$.

Паколькі FG — сярэдняя лінія $\triangle NMM_1$ (F — сярэдзіна MM_1 і G — сярэдзіна NM), то $FG \parallel NM_1$.

$AB \parallel NM_1$ і $FG \parallel NM_1$, таму $AB \parallel FG$.

Адказ: $AB \parallel FG$.

Задача 2. Адрэзак XY мае з плоскасцю β адзіны агульны пункт X. Праз пункт Y і сярэдзіну Z адрэзка XY праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць β у пунктах Y_1 і Z_1 адпаведна (рыс. 151). Знайдзіце даўжыню адрэзка YY_1, улічыўшы, што $ZZ_1 = 10$ см.



Рыс. 151

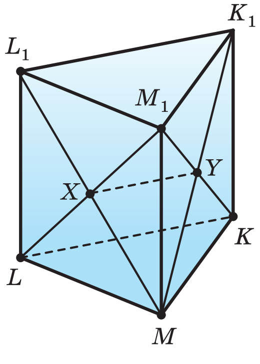
Рашэнне. Перасякальныя прамыя XY і YY_1 вызначаюць плоскасць XYY_1.

$XY_1 \subset (XYY_1)$ і $XY_1 \subset \beta$, таму $(XYY_1) \cap \beta = XY_1$.

$Y_1 \in \beta$, $Z_1 \in \beta$ і $YY_1 \parallel ZZ_1$, таму $ZZ_1 \subset (XYY_1)$ і $Z_1 \in XY_1$.

ZZ_1 — сярэдняя лінія $\triangle XYY_1$ (Z — сярэдзіна XY і $YY_1 \parallel ZZ_1$), таму $YY_1 = 2ZZ_1 = 2 \cdot 10 = 20$ (см).

Адказ: 20 см.



Рыс. 152

Задача 3. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 1 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 152). Знайдзіце плошчу чатырохвугольніка XL_1K_1Y.

Рашэнне. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма і $LK = KM = LM = L_1K_1 = K_1M_1 = L_1M_1 = LL_1 = KK_1 = MM_1 = 1$ м, таму LL_1M_1M і MM_1K_1K — квадраты са стараной 1 м.

Таму $ML_1 = MK_1 = \sqrt{2}$ м.

$X = ML_1 \cap LM_1$ і $Y = KM_1 \cap MK_1$, таму $MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$.
$MX = XL_1$ і $K_1Y = YM$, таму XY — сярэдняя лінія $\triangle ML_1K_1$.

XY — сярэдняя лінія $\triangle ML_1K_1$, таму $XY = \frac{1}{2} L_1K_1 = \frac{1}{2}$ (м) і $XY \parallel L_1K_1$.

XY — сярэдняя лінія $\triangle ML_1K_1$, таму $S_{MXY} = \frac{1}{4} S_{ML_1K_1}$, $S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1}$.

$$p_{ML_1K_1} = \frac{ML_1 + L_1K_1 + MK_1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2}}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \text{ (м)}.$$

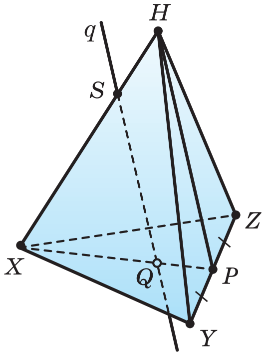
$$S_{ML_1K_1} = \sqrt{p_{ML_1K_1}\left(p_{ML_1K_1} - ML_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - L_1K_1\right)\left(p_{ML_1K_1} - MK_1\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - 1\right)\left(\frac{1+2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}-1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ (м}^2\text{)}.$$

$$S_{XL_1K_1Y} = \frac{3}{4} S_{ML_1K_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{16} \text{ (м}^2\text{)}.$$

Адказ: $\frac{3\sqrt{7}}{16}$ м^2.



Рыс. 153

Задача 4. На канце HX трохвугольнай піраміды $HXYZ$ (рыс. 153) выбраны такі пункт S, што $HS : SX = 2 : 5$, і праз яго праведзена прамая q, паралельная медыяне HP грані HYZ. Знайдзіце медыяну HP, улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой q, размешчанага ўнутры піраміды, роўная 35 см.

Рашэнне. Паколькі пункты X і P ляжаць як у плоскасці HXP, так і ў плоскасці XYZ, то $(HXP) \cap (XYZ) = XP$. Пункт S прамой HX ляжыць у плоскасці HXP, бо $HX \subset (HXP)$.

Прамая q праходзіць праз пункт S плоскасці HXP паралельна прамой HP гэтай плоскасці, таму $q \subset (HXP)$.

Паколькі прамыя $q \parallel HP$, а прамыя HP і XP перасякаюцца, то перасякаюцца і прамыя q і XP. Няхай $q \cap XP = Q$.

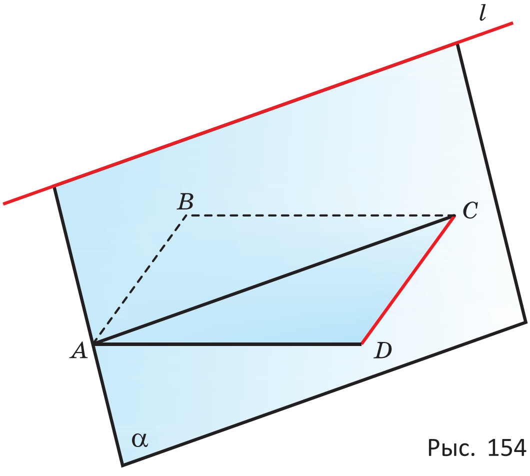
$$\triangle HXP \sim \triangle SXQ \ (SQ \parallel HP), \text{ таму } HP : SQ = HX : SX,$$

$$HP = SQ \cdot HX : SX = SQ \cdot \frac{HS + SX}{SX} = SQ \cdot \left(\frac{HS}{SX} + 1\right) =$$

$$35 \cdot \left(\frac{2}{5} + 1\right) = 49 \text{ (см)}.$$

Адказ: 49 см.

Задача 5. Прамая l паралельная дыяганалі AC паралелаграма $ABCD$ і не ляжыць у яго плоскасці. Дакажыце, што прамыя l і CD — скрыжаваныя, і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што $\angle BAC = 60°$.



Рыс. 154

Р а ш э н н е. Няхай α — плоскасць, у якой ляжаць паралельныя прамыя l і AC. Тады $\alpha \cap (ACD) = AC$ (рыс. 154).

Паколькі $C \in \alpha$, а $D \notin \alpha$, то $C = \alpha \cap CD$.

Прамыя l і CD — скрыжаваныя па тэарэме 5 ($l \subset \alpha$, $C = \alpha \cap CD$ і $C \notin l$).

$l \parallel AC$, таму вугал паміж l і CD роўны вуглу паміж AC і CD і роўны вуглу DCA (тэарэма 6).

$ABCD$ — паралелаграм, таму

$$\angle DCA = \angle BAC = 60°.$$

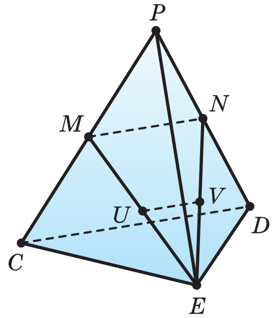
А д к а з: 60°.

99. Пункты M і N — сярэдзіны кантаў PC і PD трохвугольнай піраміды $PCDE$, а пункты U і V — сярэдзіны адрэзкаў EM і EN (рыс. 155). Вызначце, ці з'яўляюцца паралельнымі прамыя MN і UV.

100. Дакажыце, што сярэдзіны старон прасторавага чатырохвугольніка (рыс. 156) з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма.

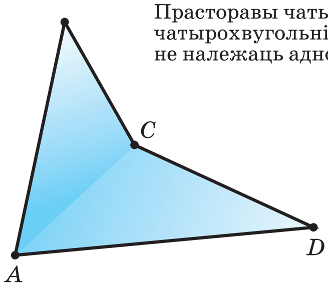
101. Паралелаграм $MNKL$ і трохвугольнік NAK не ляжаць у адной плоскасці. Прамая a праходзіць праз пункт P прамой AK і паралельная прамой NK. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых a і ML.

102. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $PMNKL$. На прамой PL выбраны пункт D, праз які праведзена прамая l, паралельная прамой LK. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых MN і l.



Рыс. 155

Прасторавы чатырохвугольнік — чатырохвугольнік, вяршыні якога не належаць адной плоскасці.

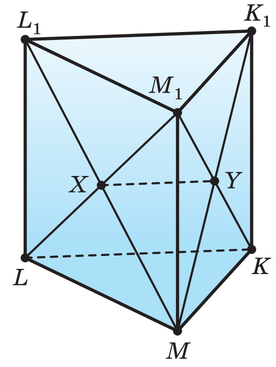


Рыс. 156

103. Ёсць паралелаграм $MNOP$ і трапецыя $MNEK$ з асновай EK, прычым гэтыя чатырохвугольнікі не ляжаць у адной плоскасці.

а) Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых OP і EK.

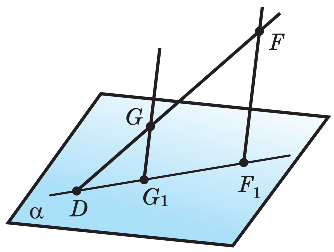
б) Знайдзіце перыметр трапецыі, улічыўшы, што ў яе можна ўмежыць акружнасць, а яе асновы MN і EK роўныя 45 см і 55 см адпаведна.



Рыс. 157

104. $LKML_1K_1M_1$ — правільная трохвугольная прызма, даўжыня кожнага канта якой роўная 2 м. Дыяганалі граняў LL_1M_1M і MM_1K_1K перасякаюцца адпаведна ў пунктах X і Y (рыс. 157). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $XLKY$.

105. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N, улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.



Рыс. 158

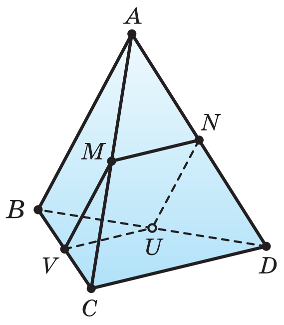
106. Канец D адрэзка DF належыць плоскасці α, праз другі яго канец F і яго пункт G праведзены паралельныя прамыя, якія перасякаюць плоскасць α у пунктах F_1 і G_1 (рыс. 158). Знайдзіце даўжыню адрэзка GG_1, улічыўшы, што $FF_1 = 32$ см і $DG : GF = 3 : 5$.

107. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ, а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ, улічыўшы, што $MK = 16$ см, $MN = 9$ см, $NL = 12$ см.

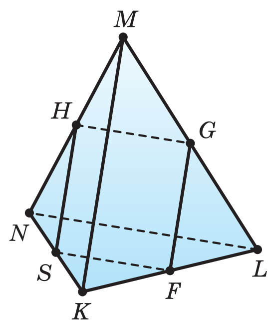
108. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR, які не перасякае плоскасць γ. Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E, перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1, улічыўшы, што $TT_1 = 27$ см, $RR_1 = 15$ см, $TE : RE = 1 : 3$.

109. На адрэзку AB, канец A якога належыць плоскасці α, выбраны пункт C, і праз пункты B і C праведзены паралельныя прамыя, што перасякаюць плоскасць α у пунктах B_1 і C_1 адпаведна. Знайдзіце адрэзак CC_1, улічыўшы, што:

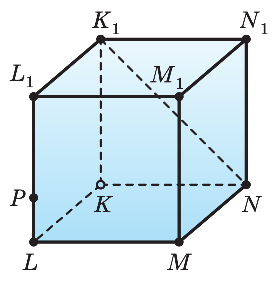
а) пункт C — сярэдзіна адрэзка AB і $BB_1 = 14$ см;
б) $AC : CB = 3 : 2$ і $BB_1 = 50$ см.



Рыс. 159



Рыс. 160



Рыс. 161

110. Пункты M, N, U, V — адпаведна сярэдзіны кантаў AC, AD, BD, BC трохвугольнай пірамiды $ABCD$ (рыс. 159). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $MNUV$, улічыўшы, што AB = 20 см, CD = 30 см.

111. Пункты H, G, F, S — сярэдзіны кантаў MN, ML, LK, KN трохвугольнай пірамiды $MKLN$ (рыс. 160). Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $HGFS$, улічыўшы, што LN = 18 мм, MK = 22 мм.

112. Пункт P выбраны на канце LL_1 куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ (рыс. 161). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт перасячэння з плоскасцю M_1N_1M прамой q, якая праходзіць праз пункт P і паралельная прамой NK_1.

113. Праз вяршыні D і Q трохвугольніка PDQ са стараной PQ, роўнай 20 см, праведзена плоскасць α, якой не належыць вяршыня P. Улічыўшы, што прамая x паралельная прамой PQ і перасякае старану PD у пункце C, што $PC : CD = 2 : 3$:

а) дакажыце, што прамая x перасякае плоскасць α;

б) знайдзіце адлегласць ад пункта C да пункта перасячэння прамой x з плоскасцю α.

114. На канце GH трохвугольнай пірамiды $FGHK$ з роўнымі адзін аднаму кантамі выбраны такі пункт T, што $HT : TG = 1 : 3$, і праз яго праведзена прамая h, якая паралельная медыяне HM бакавой грані KHF і якая перасякае паверхню пірамiды ў пункце R. Знайдзіце кант пірамiды, улічыўшы, што TR = 6 см.

115. Праз пункт перасячэння медыян грані MNK трохвугольнай пірамiды $JMNK$ з роўнымі адзін аднаму кантамі праведзена прамая b, паралельная прамой MJ, а на канце MJ пазначана яго сярэдзіна Z. Знайдзіце плошчу трохвугольніка NZJ, улічыўшы, што адрэзак прамой b, размешчаны ўнутры пірамiды, роўны m.

116. Прамая m перасякае старану AB трохвугольніка ABC. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамых m і BC, улічыўшы, што:

а) прамая m ляжыць у плоскасці ABC і не перасякае адрэзак AC;

б) прамая m не ляжыць у плоскасці ABC.

117. Пункты M і N выбраны на скрыжаваных прамых a і b адпаведна. Праз прамую a і пункт N праведзена плоскасць α, а праз прамую b і пункт M — плоскасць β. Вызначце:

а) ці ляжыць прамая b у плоскасці α;

б) ці перасякаюцца плоскасці α і β, і калі яны перасякаюцца, то па якой прамой.

118. Дакажыце, што калі AB і CD — скрыжаваныя прамыя, то AD і BC — таксама скрыжаваныя прамыя.

119. Праз пункт M па-за прамой a праведзены дзве прамыя, якія з прамой a не маюць агульных пунктаў. Дакажыце, што прынамсі адна з гэтых прамых і прамая a з'яўляюцца скрыжаванымі.

120. Прамая m перасякае прамую k і не перасякае прамую l, паралельную прамой k. Дакажыце, што l і m — скрыжаваныя прамыя.

121. Прамыя XU і VT — паралельныя, а прамыя XY і VT — скрыжаваныя. Знайдзіце вугал паміж прамымі XY і VT, улічыўшы, што:

а) $\angle YXU = 40°$; б) $\angle YXU = 135°$; в) $\angle YXU = 90°$.

122. Прамая l паралельная старане BC паралелаграма $ABCD$ і не ляжыць у яго плоскасці. Дакажыце, што l і CD — скрыжаваныя прамыя, і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што адзін з вуглоў паралелаграма роўны:

а) $58°$; б) $133°$.

123. Прамая m паралельная дыяганалі FH ромба $EFGH$ і не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце скрыжаванасць прамых:

а) m і EG і знайдзіце вугал паміж імі;

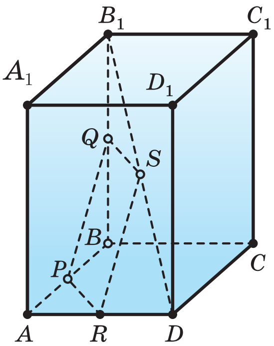
б) m і EH і знайдзіце вугал паміж імі, улічыўшы, што $\angle EFG = 128°$.

124. Праз вяршыню P ромба $PQRS$ праведзена прамая a, паралельная дыяганалі QS, а праз вяршыню R — прамая b, якая не ляжыць у плоскасці ромба. Дакажыце, што:

а) прамыя a і RS перасякаюцца; б) a і b скрыжоўваюцца.

125. Стораны AB і CD прасторавага чатырохвугольніка $ABCD$ роўныя. Дакажыце, што прамыя AB і CD утвараюць роўныя вуглы з прамой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзкаў BC і AD.

126*. Пункты P, Q, R, S — сярэдзіны кантаў AB, BB_1, AD і дыяганалі B_1D прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у аснове якога ляжыць квадрат са стараной 1 м, а бакавы кант роўны 7 м (рыс. 162). Вызначце, у колькі разоў старана PQ чатырохвугольніка $PQSR$ большая за яго старану QS.



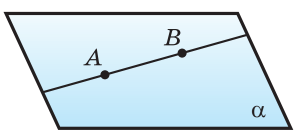
Рыс. 162

§ 5. Узаемнае размяшчэнне прамой і плоскасці ў прасторы

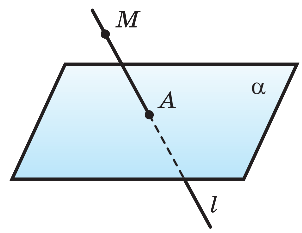
А) У прасторы агульных пунктаў у прамой і плоскасці можа быць ні аднаго, адзін або больш за адзін.

Калі ў прамой і плоскасці агульных пунктаў больш за адзін, то, як сцвярджае аксіёма **2**, сама прамая належыць плоскасці (рыс. 163).

Прамая і плоскасць могуць мець адзіны агульны пункт. Няхай α — пэўная плоскасць (рыс. 164). Выберам пункт A на плоскасці α і пункт M па-за плоскасцю α. Пункты A і M вызначаюць адзіную прамую l, якая не мае з плоскасцю α іншых агульных пунктаў, акрамя пункта A. Сапраўды, калі дапусціць адваротнае, то па аксіёме **2** прамая l будзе ляжаць у плоскасці α, а значыць, у гэтай плоскасці будзе ляжаць і пункт M, што супярэчыць выбару пункта.



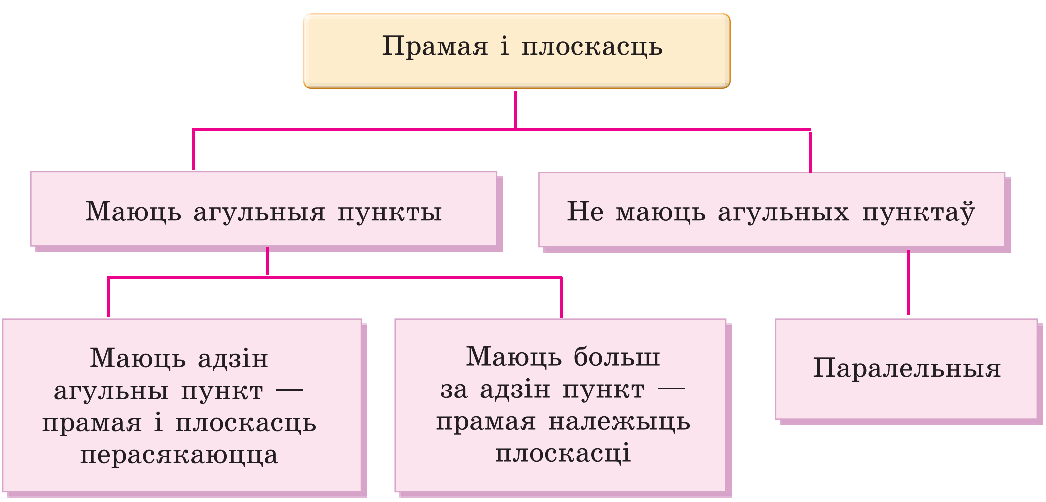
Рыс. 163



Рыс. 164

Прамая і плоскасць, якія маюць адзін агульны пункт, называюцца *перасякальнымі*.

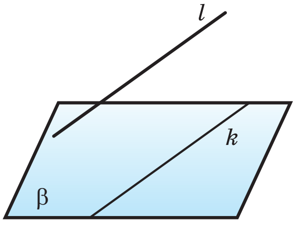
Прамая і плоскасць могуць не мець агульных пунктаў. У гэтым выпадку гавораць, што прамая a **паралельная** плоскасці α, і пішуць $a \parallel \alpha$.



Дакажам *прымету паралельнасці прамой і плоскасці*.

Т э а р э м а 7. Калі прамая, што не ляжыць у плоскасці, паралельная якой-небудзь прамой плоскасці, то яна паралельная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая l паралельная прамой k, што належыць плоскасці β, і l не належыць плоскасці β (рыс. 165). Трэба даказаць, што прамая l не мае агульных пунктаў з плоскасцю β. Дапусцім, што гэта не так, г. зн. што прамая l перасякае плоскасць β у пэўным пункце U. Гэты пункт не можа ляжаць на прамой k, бо $k \parallel l$. Тады па прымеце скрыжаванасці прамых атрымліваем, што прамыя k і l — скрыжаваныя.



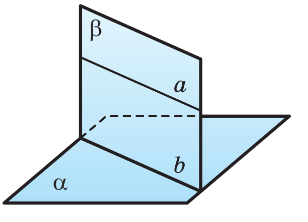
Рыс. 165

А гэта супярэчыць таму, што прамыя k і l паралельныя. Атрымалі, што прамая l і плоскасць β не могуць мець агульных пунктаў, г. зн. $l \parallel \beta$.

Б) Дакажам *уласцівасць прамой, паралельнай плоскасці*.

Т э а р э м а 8. Лінія перасячэння плоскасцей, з якіх адна праходзіць праз прамую, паралельную другой плоскасці, паралельная гэтай прамой.

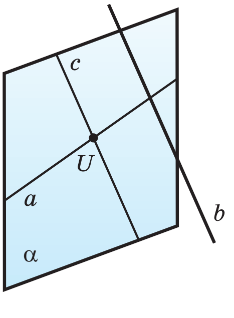
Доказ. Няхай прамая a, паралельная плоскасці α, належыць плоскасці β, і прамая b — лінія перасячэння плоскасцей α і β (рыс. 166). Тады прамыя a і b абедзве ляжаць у плоскасці β і не перасякаюцца, бо ў адваротным выпадку прамая a перасякала б плоскасць β. Значыць, прамыя a і b паралельныя.



Рыс. 166

Прыклад 1*. Дакажам, што *праз кожную з дзвюх скрыжаваных прамых праходзіць адзіная плоскасць, паралельная другой прамой.*

Няхай прамыя a і b — скрыжаваныя (рыс. 167). На прамой a выберам адвольна пункт U і праз яго правядзём прамую c, паралельную прамой b. Прамыя a і c перасякаюцца, таму праз іх праходзіць адзіная плоскасць α. Плоскасць α паралельная прамой b, бо прамая b не ляжыць у плоскасці α і паралельная прамой c, што ляжыць у плоскасці α.

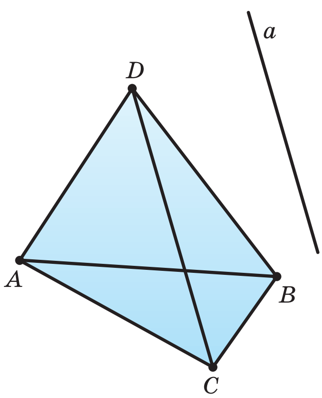


Рыс. 167

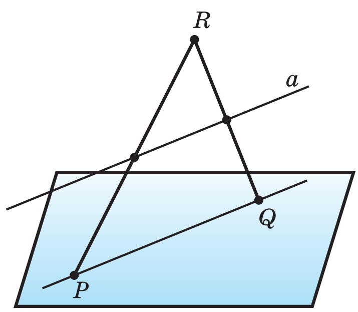
1. Сфармулюйце прымету паралельнасці прамой і плоскасці.
2. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, паралельнай плоскасці.
3. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне нацягнутых тралейбусных або трамвайных правадоў і плоскасці зямлі (рыс. 168). Прывядзіце прыклады ўзаемнага размяшчэння прамой і плоскасці з навакольнага асяроддзя.

Рыс. 168

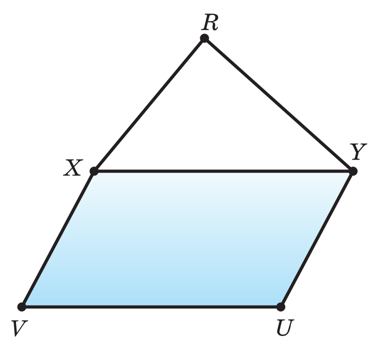
4. Трохвугольнікі ABC і ABD ляжаць у розных плоскасцях (рыс. 169). Ці праўда, што любая прамая, паралельная прамой CD, перасякае гэтыя плоскасці?
5. Пункты P і Q ляжаць у плоскасці α, а пункт R не ляжыць у ёй. Вызначце становішча прамой, якая праходзіць праз сярэдзіны адрэзкаў PR і QR (рыс. 170), і плоскасці α.
6. Па-за плоскасцю прамавугольніка $UVXY$ выбраны пункт Z (рыс. 171). Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамой UV і плоскасці XYR.



Рыс. 169

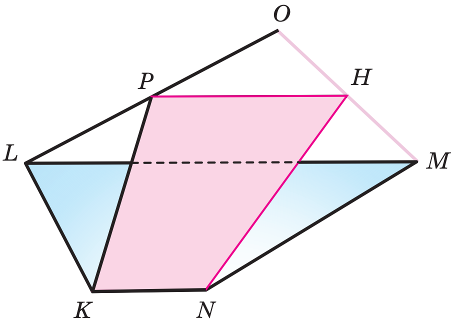


Рыс. 170



Рыс. 171

Задача 1. Аснова LM трапецыі $KLMN$ роўная 48 см. Па-за плоскасцю трапецыі выбраны пункт O і адзначана сярэдзіна P адрэзка LO (рыс. 172). Пабудуйце пункт H перасячэння плоскасці KNP і адрэзка OM. Знайдзіце даўжыню адрэзка PH.



Рыс. 172

Р а ш э н н е. $M \notin LO$, таму вызначана (LOM) (тэарэма 4).

$KN \parallel LM$ і $LM \subset (LOM)$, таму $KN \parallel (LOM)$ (тэарэма **7**).

$P \in LO$ і $LO \subset (LOM)$, таму $P \in (LOM)$.

$P \in (LOM)$ і $P \in (KPN)$, таму $(LOM) \cap (KPN) = a$ і $P \in a$ (аксіёма 3).

$KN \subset (KPN)$, $KN \parallel (LOM)$, $(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \parallel KN$ (тэарэма **8**).

$a \parallel KN$ і $KN \parallel LM$, таму $a \parallel LM$.

$(LOM) \cap (KPN) = a$, таму $a \subset (LOM)$.

$a \parallel LM$ і $a \cap OM = H$, таму $H \in OM$ і $H \in a$.

$P \in a$ і $H \in a$, таму $a = PH$.

P — сярэдзіна LO і $PH \parallel LM$, таму PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$.

$LM = 48$ см і PH — сярэдняя лінія $\triangle LOM$, таму $PH = \dfrac{1}{2}LM$.

$PH = \dfrac{1}{2}LM$ і $LM = 48$ см, таму $PH = \dfrac{1}{2} \cdot 48 = 24$ (см).

А д к а з: 24 см.

Задача 2. Пабудуйце сячэнне правільнай чатырохвугольнай піраміды $FABCD$ плоскасцю α, якая праходзіць праз кант AB і пункт X на канце FC.

Р а ш э н н е. Вызначым, па якой лініі перасякае паверхню піраміды плоскасць α, якой належаць прамая AB і пункт X.

$AB \subset \alpha$ і $AB \subset (FAB)$, таму $\alpha \cap (FAB) = AB$ (рыс. 173).

$B \in \alpha$ і $B \in (FBC)$, $X \in \alpha$ і $X \in (FBC)$, таму $\alpha \cap (FBC) = BX$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = a$ і $X \in a$.

$FABCD$ — правільная чатырохвугольная піраміда, таму $ABCD$ — квадрат і $AB \parallel CD$.

$AB \parallel CD$ і $CD \subset (FCD)$, таму $AB \parallel (FCD)$ (тэарэма **7**).

$AB \subset \alpha$, $AB \parallel (FCD)$ і $\alpha \cap (FCD) = a$, таму $a \parallel AB$ і $a \subset \alpha$ (тэарэма 8).

$\alpha \cap (FCD) = a$ і $a \cap FD = Y$, таму $Y \in a$ і $Y \in FD$.

$X \in a$ і $Y \in a$, таму $a = XY$, $XY \parallel AB$, $|XY| < |AB|$.

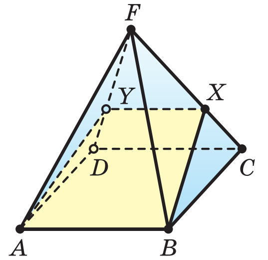
$Y \in FD$ і $FD \subset (FCD)$, таму $Y \in (FCD)$.

$Y \in a$ і $a \subset \alpha$, таму $Y \in \alpha$.

$X \in \alpha$ і $X \in (FCD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FCD)$, таму $\alpha \cap (FCD) = XY$.

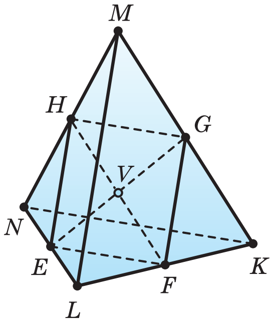
$A \in \alpha$ і $A \in (FAD)$, $Y \in \alpha$ і $Y \in (FAD)$, таму $\alpha \cap (FAD) = AY$.

Атрымалі, што плоскасць α перасякае піраміду $FABCD$ па трапецыі $ABXY$.



Рыс. 173

Задача 3*. Пункты E, F, G — сярэдзіны кантаў LN, LK, MK трохвугольнай піраміды $MNKL$ (рыс. 174).



Рыс. 174

а) Пабудуйце пункт H, у якім плоскасць EFG перасякае кант MN.

б) Дакажыце, што адрэзкі EG і FH перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам.

Рашэнне. а) Пункты G і F — агульныя пункты плоскасцей EFG і MKL. Таму $(EFG) \cap (MKL) = GF$.

Плоскасць EFG мае з гранню NKL агульныя пункты E і F. Таму $(EFG) \cap (NKL) = EF$.

E і F — сярэдзіны кантаў LN і LK, значыць, EF — сярэдняя лінія ў $\triangle LNK$ і таму $EF \parallel NK$ і $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$.

$EF \parallel NK$ і $NK \subset (MKN)$, таму $EF \parallel (MKN)$ (тэарэма **7**).

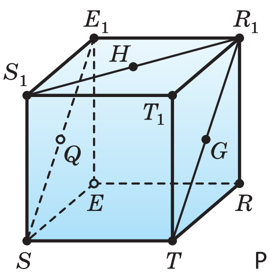
$EF \subset (EFG)$ і $EF \parallel NK$ і $(EFG) \cap (MKN) = GH$, таму $GH \parallel NK$.

Паколькі G — сярэдзіна канта MK і $GH \parallel NK$, то GH — сярэдняя лінія ў $\triangle MNK$, і таму $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$. Значыць, H — сярэдзіна канта MN. Шуканае сячэнне — чатырохвугольнік $HEFG$.

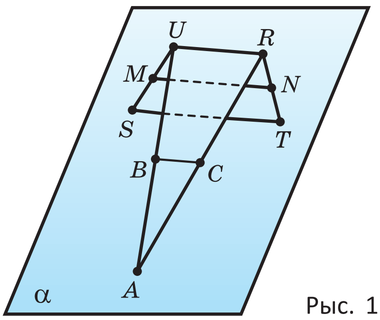
б) Паколькі $EF \parallel NK$ і $GH \parallel NK$, $EF = \frac{1}{2} \cdot NK$ і $GH = \frac{1}{2} \cdot NK$, то $HEFG$ — паралелаграм. Адрэзкі EG і FH — яго дыяганалі. Таму $EG \cap FH = V$ і V — сярэдзіна EG і FH.

127. Улічыўшы, што пункты Q, H, G — сярэдзіны дыяганалей SE_1, S_1R_1, R_1T адпаведных граняў куба $SERTS_1E_1R_1T_1$ (рыс. 175):
а) вызначце, ці паралельная прамая QH плоскасці SS_1T_1;
б) дакажыце, што прамая HG паралельная плоскасці E_1ER.

128. Улічыўшы, што плоскасць α праходзіць праз аснову ST трапецыі $SURT$ і не праходзіць праз вяршыню R, а пункт A ляжыць у плоскасці α (рыс. 176):



Рыс. 175



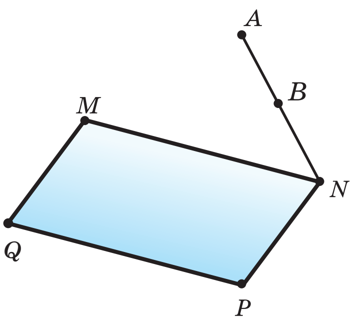
Рыс. 176

а) дакажыце, што сярэдняя лінія MN трапецыі паралельная плоскасці α;
б) вызначце, ці паралельная плоскасці α сярэдняя лінія BC трохвугольніка UAR.

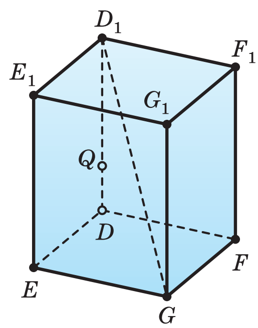
129. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $ABMN$. Вызначце ўзаемнае размяшчэнне прамой AB і плоскасці MDN.

130. Пункт A не ляжыць у плоскасці паралелаграма $MNPQ$, а пункт B — сярэдзіна адрэзка NA (рыс. 177). Дакажыце, што плоскасць MBQ перасякае прамую AP.

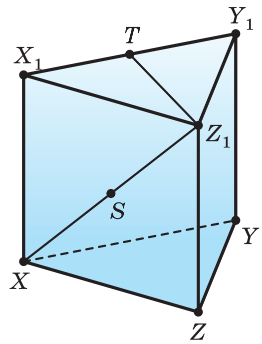
131. На канце DD_1 куба $DFGED_1F_1G_1E_1$ выбраны пункт Q (рыс. 178). Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй куба прамой c, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная прамой D_1G.



Рыс. 177



Рыс. 178



Рыс. 179

132. Усе канты правільнай трохвугольнай прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$ роўныя адзін аднаму, а пункт S — сярэдзіна дыяганалі XZ_1 грані XX_1Z_1Z (рыс. 179). Зрабіце такі рысунак у сшытку і:
а) пабудуйце пункт перасячэння з гранню XX_1Y_1Y прамой p, якая праходзіць праз пункт S і паралельная медыяне Z_1T грані $X_1Y_1Z_1$;
б) знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што даўжыня адрэзка прамой p, размешчанага ўнутры прызмы, роўная 10 см.

133. Усе канты трохвугольнай прызмы $XYZX_1Y_1Z_1$ роўныя паміж сабой, Q — пункт перасячэння медыян грані XYZ. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры прызмы адрэзка прамой, што праходзіць праз сярэдзіну адрэзка X_1Q і паралельная прамой ZQ, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні прызмы роўная S.

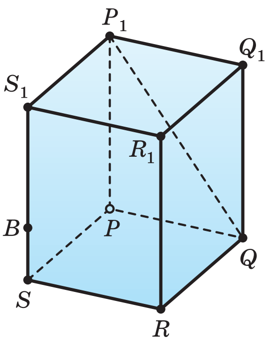
134. Улічыўшы, што пункты N і M — сярэдзіны дыяганалей BC_1 і BD адпаведных граняў прамавугольнага паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$:
а) дакажыце, што адрэзак MN паралельны плоскасці, у якой ляжыць грань CDD_1C_1;
б) знайдзіце даўжыню адрэзка MN, улічыўшы, што $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

135. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя $4\sqrt{3}$. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

136. Праз пункт перасячэння медыян грані MPQ трохвугольнай піраміды $MNPQ$ праведзена прамая, паралельная медыяне PA грані MNP. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка гэтай прамой, улічыўшы, што $PA = m$.

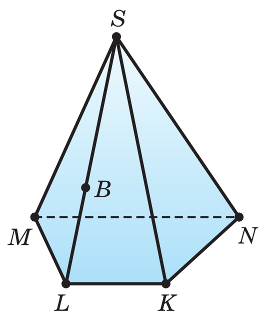
137. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $TPQUV$ роўныя паміж сабой, пункты B, C, D — сярэдзіны кантаў TP, TV, TU. Праз пункт B праведзена прамая p, паралельная прамой CD. Пабудуйце пункт A перасячэння прамой p з плоскасцю TQU і знайдзіце плошчу асновы піраміды, улічыўшы, што плошча чатырохвугольніка $ABCD$ роўная S.

138. Ёсць паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$, на канце SS_1 якога выбраны пункт B (рыс. 180). Пабудуйце сячэнне гэтага паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункты B, Q, P_1.



Рыс. 180

139. На рысунку 181 паказана чатырохвугольная піраміда, асновай якой з'яўляецца трапецыя $MNKL$ з асновамі KL і MN. Зрабіце такі рысунак у сшытку і пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B канта SL і прамую MN. Якой фігурай з'яўляецца сячэнне?



Рыс. 181

140. Ёсць прамая a, паралельная плоскасці α, і пункт T, прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a, ляжыць у плоскасці α.

141. Адна аснова трапецыі паралельная плоскасці β, а вяршыня другой ляжыць у гэтай плоскасці. Дакажыце, што:

а) другая аснова трапецыі ляжыць у плоскасці β;

б) сярэдняя лінія трапецыі паралельная плоскасці β.

142. Дакажыце, што калі дадзеная прамая не ляжыць у перасякальных плоскасцях і паралельная лініі іх перасячэння, то яна паралельная і гэтым плоскасцям.

143*. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда $CDEFC_1D_1E_1F_1$ плоскасцю, што праходзіць праз кант EE_1 і пункт A, выбраны на канце CC_1.

144. Пункты A, B, C — адпаведна сярэдзіны кантаў FE, GH, GK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць паралелаграм $GHEK$. Пабудуйце адрэзак, па якім плоскасць ABC перасякае дыяганальнае сячэнне FHK піраміды.

145. Старана RT трохвугольніка RST паралельная плоскасці γ, а стораны RS і ST перасякаюцца з гэтай плоскасцю ў пунктах M і N. Дакажыце, што трохвугольнікі RST і MSN падобныя.

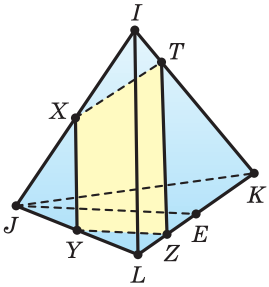
146. На адрэзку AB выбраны такі пункт C, што $AB : BC = 4 : 3$. Праз канец B адрэзка AB праведзена плоскасць α. Паралельна гэтай плоскасці пабудаваны адрэзак CD, роўны 24 см. Дакажыце, што прамая AD перасякае плоскасць α у пэўным пункце E, і знайдзіце адрэзак BE.

147. Пункты D і E на старанах AB і AC трохвугольніка ABC выбраны так, што $DE = 5$ см і $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{2}{3}$. Плоскасць, праведзеная праз пункты B і C, паралельная адрэзку DE. Знайдзіце даўжыню адрэзка BC.

148. Ёсць правільная трохвугольная піраміда $MNPQ$, даўжыня бакавога канта якой роўная 6 см, а асновай з'яўляецца трохвугольнік са стараной 4 см. Знайдзіце перыметр сячэння піраміды плоскасцю, якая паралельная NP і праходзіць праз сярэдзіну канта PQ, і сярэднюю лінію трохвугольніка MNP.

149. Пункты A, B, C — адпаведна сярэдзіны кантаў LN, LK, MK трохвугольнай піраміды $LMNK$, усе канты якой роўныя адзін аднаму, а плошча грані роўная $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдзіце перыметр сячэння гэтай піраміды плоскасцю ABC.

150. На рысунку 182 паказана правільная трохвугольная піраміда $IJKL$. Чатырохвугольнік $XYZT$ — сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны X і Y кантаў JI і JL і паралельная медыяне JE грані JKL. Знайдзіце даўжыню адрэзкаў XY і ZT, улічыўшы, што $IK = 48$ см.



Рыс. 182

151. Пункт Q — сярэдзіна канта FA чатырохвугольнай піраміды $FABCD$, асновай якой з'яўляецца трапецыя $ABCD$ з паралельнымі старанамі BC і AD. Знайдзіце адрэзак, па якім плоскасць QBC перасякае грань FAD, улічыўшы, што кант BC і сярэдняя лінія трапецыі адпаведна роўныя 30 см і 40 см.

152. Старана асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды роўная 60 см, а бакавы кант — 78 см. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіны дзвюх супрацьлеглых старон асновы і паралельная якому-небудзь бакавому канту, і знайдзіце плошчу сячэння.

153*. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FMNKL$, бакавы кант якой у два разы большы за старану асновы, а плошча бакавой паверхні роўная S. Знайдзіце даўжыню размешчанага ўнутры піраміды адрэзка прамой, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей асновы і паралельная медыяне FR грані FLK.

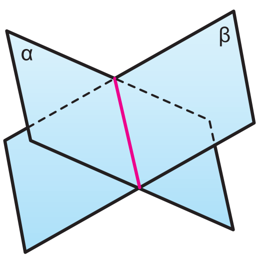
154*. Пункт A — сярэдзіна канта FK чатырохвугольнай піраміды $FGHEK$, у аснове якой ляжыць трапецыя $GHEK$, $KG \parallel HE$. Пабудуйце пункт P, у якім плоскасць AEH перасякае прамую FG. Дакажыце, што адрэзкі PE і HA перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, улічыўшы, што сярэдняя лінія трапецыі $GHEK$ роўная $\frac{3}{2}$ HE.

§ 6. Узаемнае размяшчэнне плоскасцей у прасторы

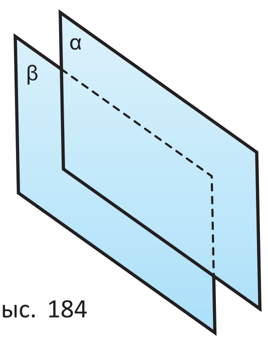
А) Дзве плоскасці або маюць агульны пункт, або не маюць яго. У першым выпадку ў адпаведнасці з аксіёмай **3** плоскасці маюць агульную прамую, г. зн. перасякаюцца па гэтай прамой (рыс. 183). У другім выпадку плоскасці не перасякаюцца (рыс. 184).

Плоскасці, якія не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі плоскасцямі**.

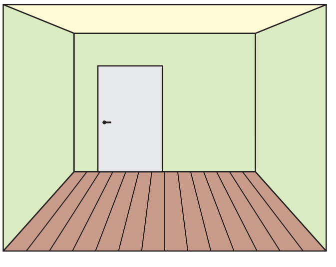
Уяўленне пра паралельныя плоскасці даюць паверхні столі і падлогі або паверхні супрацьлеглых сцен пакоя (рыс. 185). Наступная тэарэма дае *прымету паралельнасці плоскасцей*.



Рыс. 183



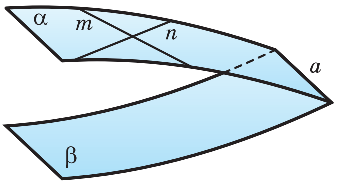
Рыс. 184



Рыс. 185

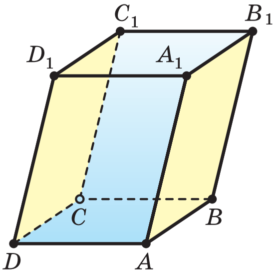
Т э а р э м а 9. Плоскасць, якая праходзіць праз дзве перасякальныя прамыя, паралельныя другой плоскасці, паралельная гэтай самай плоскасці.

Доказ. Няхай плоскасць α праходзіць праз перасякальныя прамыя m і n, якія абедзве паралельныя плоскасці β (рыс. 186). Дакажам, што плоскасць α паралельная плоскасці β.



Рыс. 186

Дапусцім, што плоскасць α перасякае плоскасць β па пэўнай прамой a. Тады па тэарэме **8** прамая a паралельная і прамой m, і прамой n. Значыць, па тэарэме **3** прамыя m і n паралельныя адна адной. Але гэта супярэчыць умове пра іх перасякальнасць. З гэтага вынікае, што плоскасць α паралельная плоскасці β.



Рыс. 187

Вынік 1. Калі дзве перасякальныя прамыя адной плоскасці адпаведна паралельныя дзвюм перасякальным прамым другой плоскасці, то такія плоскасці паралельныя.

Гэты вынік атрымліваецца з тэарэмы **9** з улікам прыметы паралельнасці прамой і плоскасці.

Вынік 2. Супрацьлеглыя грані паралелепіпеда паралельныя, г. зн. ляжаць у паралельных плоскасцях.

Напрыклад, грань AA_1B_1B паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 187) змяшчае прамыя AB і AA_1, а грань DD_1C_1C — прамыя DC і DD_1. Паколькі $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ — паралелаграмы, то $AB \parallel DC$ і $AA_1 \parallel DD_1$, і, значыць, плоскасці AA_1B_1B і DD_1C_1C паралельныя.

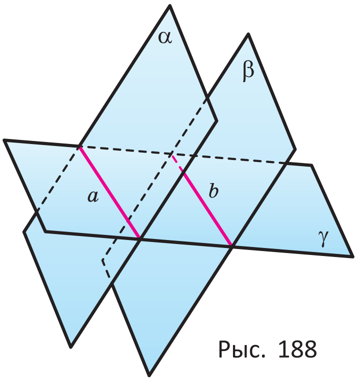
Б) Дакажам *уласцівасці паралельных плоскасцей.*

Тэарэма 10. Лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай плоскасць γ перасякае паралельныя плоскасці α і β па прамых a і b (рыс. 188). Дакажам, што прамыя a і b паралельныя.

Дапусцім, што гэта не так, г. зн. прамыя a і b маюць агульны пункт Q. Тады пункт Q належыць плоскасці α, бо прамая a належыць плоскасці α, пункт Q належыць і плоскасці β, бо прамая b належыць плоскасці β. Атрымліваецца, што плоскасці α і β маюць агульны пункт Q, але гэта немагчыма, бо па ўмове плоскасці α і β паралельныя.

Значыць, прамыя a і b не могуць мець агульнага пункта. А паколькі яны ляжаць у адной плоскасці, менавіта плоскасці γ, то яны паралельныя.



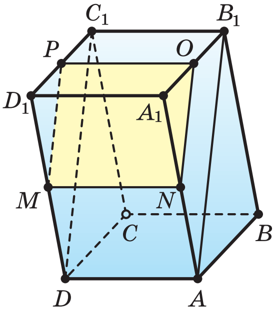
Рыс. 188

Прыклад 1. Паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перасечаны плоскасцю, што праходзіць праз сярэдзіны M, N, O яго кантаў DD_1, AA_1, A_1B_1 адпаведна. Вызначым, якая фігура атрымаецца ў сячэнні.

Плоскасць MNO перасякае грані AA_1D_1D і AA_1B_1B па адрэзках MN і NO (рыс. 189), пры гэтым $MN \parallel A_1D_1$, бо MN — сярэдняя лінія прамавугольніка AA_1D_1D ($AN = A_1N$ і $DM = D_1M$).

Паколькі плоскасць MNO праходзіць праз прамую MN, паралельную плоскасці $A_1B_1C_1D_1$, то лінія перасячэння гэтых плоскасцей — прамая OP — паралельная MN. Чатырохвугольнік $MNOP$ — шуканае сячэнне.

Улічым, што плоскасці граняў DD_1C_1C і AA_1B_1B паралельныя. З тэарэмы **10** вынікае, што прамыя NO і MP, па якіх плоскасці DD_1C_1C і AA_1B_1B перасякае плоскасць MNO, паралельныя. А паколькі $MN \parallel OP$ і $NO \parallel MP$, то чатырохвугольнік $MNOP$ — паралелаграм.



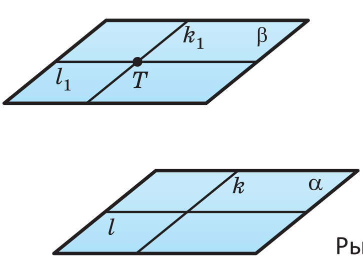
Рыс. 189

Т э а р э м а 11. Праз дадзены пункт па-за гэтай плоскасцю праходзіць адзіная плоскасць, паралельная дадзенай.

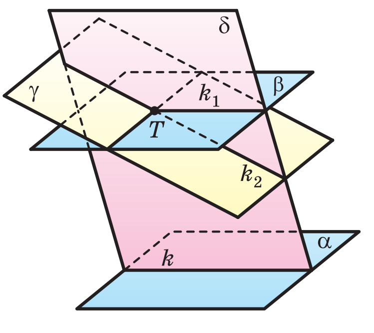
Доказ. Няхай ёсць плоскасць α і пункт T па-за ёю (рыс. 190). У плоскасці α правядзём якія-небудзь перасякальныя прамыя k і l, а праз пункт T — прамыя k_1 і l_1, паралельныя прамым k і l адпаведна. Плоскасць β, вызначаная прамымі k_1 і l_1, з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей паралельная плоскасці α і праходзіць праз пункт T.

Дакажам адзінасць плоскасці β. Дапусцім, што ёсць яшчэ адна плоскасць γ, якая праходзіць праз пункт T і паралельная плоскасці α (рыс. 191). Прамыя k_1 і l_1 абедзве не могуць належаць плоскасці γ, бо тады плоскасці β і γ супадалі б. Няхай k_1 не належыць плоскасці γ. Праз пункт T і прамую k правядзём плоскасць δ. Яна перасякае плоскасць β па прамой k_1, а плоскасць γ — па прамой k_2, якія абедзве па тэарэме **10** паралельныя прамой k.

Але такое немагчыма, бо на плоскасці праз дадзены пункт паралельна дадзенай прамой праходзіць адзіная прамая.



Рыс. 190



Рыс. 191

Вынік 3. Калі кожная з дзвюх дадзеных плоскасцей паралельная трэцяй плоскасці, то гэтыя дзве плоскасці паралельныя адна адной.

Калі прамая a перасякае плоскасць β, то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную плоскасці β. Дакажыце самастойна.

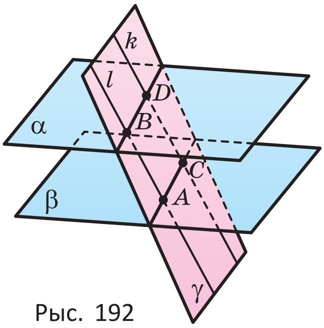
Калі плоскасці α і β паралельныя, і прамая l, якая праходзіць праз пункт A плоскасці β, паралельная плоскасці α, то прамая l ляжыць у плоскасці β. Дакажыце самастойна.

Сячэнне піраміды плоскасцю, паралельнай аснове, ёсць многавугольнік, падобны аснове. Дакажыце самастойна.

Т э а р э м а 12. Адрэзкі паралельных прамых, заключаныя паміж дзвюма паралельнымі плоскасцямі, роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай паралельныя плоскасці α і β высякаюць з паралельных прамых k і l адрэзкі AB і CD (рыс. 192). Дакажам, што гэтыя адрэзкі роўныя.

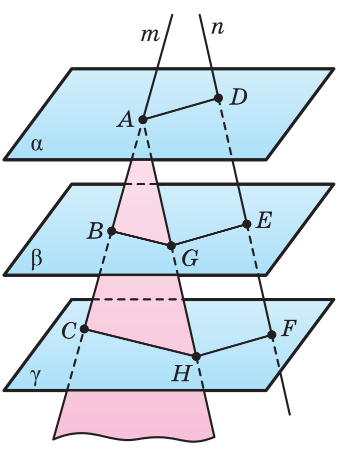
Плоскасць γ, якой належаць паралельныя прамыя k і l, перасякае паралельныя плоскасці па паралельных прамых AC і BD. У выніку атрымліваецца чатырохвугольнік $ABDC$, у якім супрацьлеглыя стораны паралельныя. Значыць, гэты чатырохвугольнік — паралелаграм, таму яго супрацьлеглыя стораны AB і CD роўныя.



Рыс. 192

Прыклад 2. Дакажам, што адрэзкі адвольных прамых, заключаныя паміж трыма паралельнымі плоскасцямі, прапарцыянальныя.

Няхай паралельныя плоскасці α, β, γ высякаюць з прамой m адрэзкі AB і BC, а з прамой n — адрэзкі DE і EF (рыс. 193). Дакажам, што $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.



Рыс. 193

Праз пункт A правядзём прамую, паралельную прамой n, няхай яна перасякаецца з плоскасцямі β і γ у пунктах G і H адпаведна. У трохвугольніку ACH адрэзак BG паралельны старане CH. Таму $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AG}{GH}$.

Але $AG = DE$ і $GH = EF$ у адпаведнасці з тэарэмай **12**. Значыць, $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$.

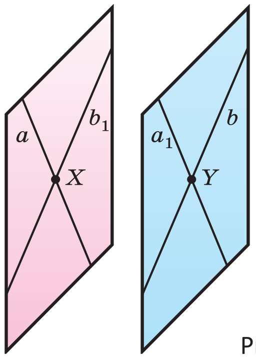
Паралельныя або перасякальныя прамыя вызначаюць адзіную плоскасць. Скрыжаваныя прамыя вызначаюць адзіную пару паралельных плоскасцей.

Прыклад 3. Дакажам, што праз скрыжаваныя прамыя можна правесці паралельныя плоскасці, прычым такая пара плоскасцей адзіная.

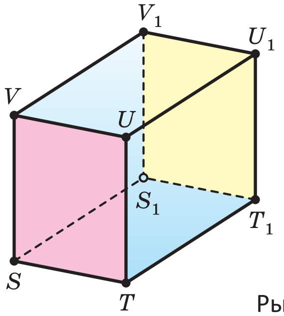
Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 194). Выберам адвольна на прамой a пункт X, на прамой b — пункт Y, і праз пункт X правядзём прамую b_1, паралельную прамой b, а праз пункт Y — прамую a_1, паралельную прамой a. Перасякальныя прамыя a і b_1, а таксама b і a_1 вызначаюць плоскасці α і β, якія з улікам прыметы паралельнасці плоскасцей з'яўляюцца паралельнымі.

Адзінасць шуканай пары плоскасцей доказваецца метадам ад адваротнага, падобна да таго, як гэта было зроблена ў доказе тэарэмы **11**. Правядзіце гэта разважанне самастойна.

На рысунку 195 плоскасці граняў $STUV$ і $S_1T_1U_1V_1$ паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ праходзяць праз скрыжаваныя прамыя TU і U_1V_1.



Рыс. 194



Рыс. 195

?

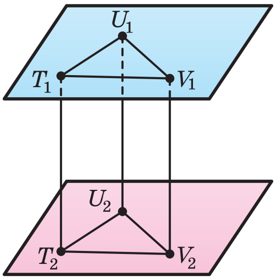
1. Назавіце магчымыя выпадкі ўзаемнага размяшчэння дзвюх плоскасцей.
2. Якія плоскасці называюцца паралельнымі?
3. Сфармулюйце прымету паралельнасці плоскасцей.
4. Сфармулюйце сцверджанне пра лініі перасячэння дзвюх паралельных плоскасцей трэцяй плоскасцю.
5. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія дзве паралельныя плоскасці высякаюць з паралельных прамых.
6. Сфармулюйце сцверджанне пра адрэзкі, якія тры паралельныя плоскасці высякаюць з адвольных прамых.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая праходзіць праз дадзены пункт паралельна дадзенай плоскасці.

8. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасці, якія паралельныя іншай плоскасці.

9. Сфармулюйце сцверджанне пра паралельныя плоскасці, што вызначае пара скрыжаваных прамых.

10. Пакажыце паралельныя плоскасці на прадметах вашага класа.

11. Прамая m перасякае плоскасць α у пункце A. Ці існуе плоскасць, якая праходзіць праз прамую m і паралельная плоскасці α?



Рыс. 196

12. Плоскасці α і β паралельныя, прамая m ляжыць у плоскасці α. Устанавіце, ці будзе прамая m паралельная плоскасці β.

13. Улічыўшы, што паралельныя адрэзкі T_1T_2, U_1U_2 і V_1V_2 заключаны паміж паралельнымі плоскасцямі α і β (рыс. 196):

а) вызначце від чатырохвугольнікаў $T_1U_1U_2T_2$, $U_1V_1V_2U_2$ і $T_1V_1V_2T_2$;

б) ці праўда, што $\triangle T_1U_1V_1 = \triangle T_2U_2V_2$.

Задача 1. Улічыўшы, што пункт T не ляжыць у плоскасці трохвугольніка ABC з плошчай, роўнай 48 см^2, а пункты M, N, P — сярэдзіны адрэзкаў TA, TB, TC (рыс. 197):

а) дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя;

б) знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP.

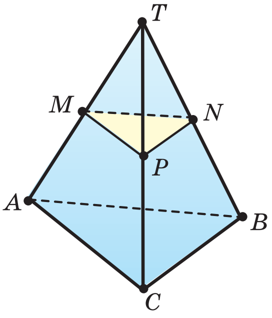
Рашэнне. а) Пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў TA і TB, таму $MN \parallel AB$ і $MN = \dfrac{1}{2}AB$.

Пункты M і P — сярэдзіны адрэзкаў TA і TC, таму $MP \parallel AC$ і $MP = \dfrac{1}{2}AC$.

$MN \parallel AB$ і $AB \subset (ABC)$, таму $MN \parallel (ABC)$.

$MP \parallel AC$ і $AC \subset (ABC)$, таму $MP \parallel (ABC)$.

$MN \cap NP = N$, $MN \parallel (ABC)$ і $MP \parallel (ABC)$, таму $(MNP) \parallel (ABC)$.



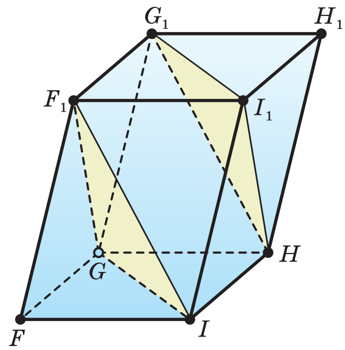
Рыс. 197

б) Паколькі MN і MP — сярэднія лініі ў $\triangle ATB$ і $\triangle ATC$ адпаведна, то пункты N і P — сярэдзіны кантаў TB і TC. Таму NP — сярэдняя лінія ў $\triangle BTC$.

$\triangle MNP$ і $\triangle ABC$ падобныя па трэцяй прымеце ($MN : AB = MP : AC = NP : BC = 1 : 2$). Таму $S_{MNP} = \left(\dfrac{MN}{AB}\right)^2 \cdot S_{ABC} = \dfrac{1}{4} \cdot 48 = 12$ (см^2).

Адказ: 12 см^2.

Задача 2. Дакажыце, што ў паралелепіпедзе $FGHIF_1G_1H_1I_1$ (рыс. 198) плоскасць F_1IG паралельная плоскасці I_1HG_1.



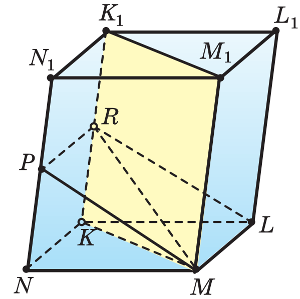
Рыс. 198

Доказ. У чатырохвугольніку GII_1G_1 стораны GG_1 і II_1 паралельныя і роўныя. Таму GII_1G_1 — паралелаграм. Значыць, $GI \parallel G_1I_1$ і $GI \parallel (G_1I_1H)$.

У чатырохвугольніку HIF_1G_1 стораны HI і G_1F_1 паралельныя і роўныя. Таму HIF_1G_1 — паралелаграм. Значыць, $IF_1 \parallel HG_1$ і $IF_1 \parallel (G_1I_1H)$.

Паколькі прамыя GI і IF_1 абедзве паралельныя плоскасці G_1I_1H, ляжаць у плоскасці GIF_1 і перасякаюцца, то $(F_1IG) \parallel (I_1HG_1)$ (тэарэма **9**).

Задача 3. У паралелепіпедзе $MNKLM_1N_1K_1L_1$ пункт R — сярэдзіна канта KK_1 (рыс. 199). Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцямі MM_1K_1 і MLR і адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні.



Рыс. 199

Рашэнне. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — паралелепіпед, таму $MM_1 \parallel KK_1$ і $MM_1 = KK_1$. А паколькі $MM_1 \subset (KMM_1)$ і $K \in (KMM_1)$, то $KK_1 \subset (KMM_1)$. Значыць, (MM_1K_1) перасякае паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ па паралелаграме MM_1K_1K.

Грані LMM_1L_1 і NKK_1N_1 паралельныя. А паколькі $NK \parallel ML$ і $NK \subset (NKK_1)$, то $(NKK_1) \cap (MLR) = RP$ і $RP \parallel NK$.

$NKRP$ і $NKLM$ — паралелаграмы, таму $RP = KN = ML$.

P — сярэдзіна канта NN_1, бо R — сярэдзіна канта KK_1 і $RP \parallel NK$.

(MLR) перасякае паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ па паралелаграме $MLRP$.

Пункты M і R належаць як плоскасці KMM_1, так і плоскасці MLR. Таму $(KMM_1) \cap (MLR) = MR$.

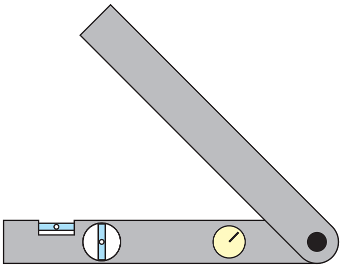
Адказ: $(MM_1K_1) \cap (MLR) = MR$.

155. Дзве стараны трохвугольніка паралельныя плоскасці β. Вызначце, ці паралельная і трэцяя старана гэтага трохвугольніка плоскасці β.

156. Тры адрэзкі P_1P_2, Q_1Q_2 і R_1R_2, якія не ляжаць у адной плоскасці, маюць агульную сярэдзіну. Вызначце, ці паралельныя плоскасці $P_1Q_1R_1$ і $P_2Q_2R_2$.

157. $MNKLM_1N_1K_1L_1$ — чатырохвугольная прызма. Вызначце, ці ляжаць у паралельных плоскасцях асновы $MNKL$ і $M_1N_1K_1L_1$ прызмы.

159. Для праверкі гарызантальнасці ўстаноўкі дыска вугламерных інструментаў карыстаюцца дзвюма грунтвагамі, размешчанымі ў плоскасці дыска на перасякальных прамых (рыс. 200). Чаму грунтвагі нельга размяшчаць на паралельных прамых?



Рыс. 200

160. Паралельныя плоскасці α і β перасякаюць старану CB вугла BCD у пунктах B_1 і B_2, а старану CD — у пунктах D_1 і D_2 адпаведна. Знайдзіце:

а) CB_2 і CD_2, улічыўшы, што $B_2D_2 = 3B_1D_1$, $B_1B_2 = 12$ см, $CD_1 = 5$ см;

б) B_2D_2 і CB_2, улічыўшы, што $B_1D_1 = 18$ см, $CB_1 = 24$ см, $CB_2 = \frac{3}{2}B_1B_2$.

161. Тры прамыя, якія праходзяць праз адзін пункт і не ляжаць у адной плоскасці, перасякаюць адну з паралельных плоскасцей у пунктах I_1, J_1 і K_1, а другую — у пунктах I_2, J_2 і K_2. Дакажыце, што трохвугольнікі $I_1J_1K_1$ і $I_2J_2K_2$ падобныя.

162. Улічыўшы, што праз пункт перасячэння медыян грані JKL трохвугольнай піраміды $IJKL$ праведзена плоскасць, паралельная грані IJK:
а) дакажыце, што сячэнне піраміды гэтай плоскасцю ёсць трохвугольнік, падобны трохвугольніку IJK;
б) знайдзіце, як адносіцца плошча сячэння да плошчы трохвугольніка IJK.

163. Нарысуйце трохвугольную піраміду $KLMN$ і:
а) пабудуйце яе сячэнне плоскасцю, якая праходзіць праз кант KL і сярэдзіну A канта MN;
б) дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіны E, O і F адрэзкаў LM, MA і MK, паралельная плоскасці LKA;
в) знайдзіце плошчу трохвугольніка EOF, улічыўшы, што плошча трохвугольніка LKA роўная 24 см^2.

164. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і пабудуйце яго сячэнне:
а) плоскасцю ABC_1; б) плоскасцю ACC_1.
Дакажыце, што пабудаваныя сячэнні з'яўляюцца паралелаграмамі.

165. Нарысуйце паралелепіпед $IJKLI_1J_1K_1L_1$ і адзначце ўнутраны пункт M грані II_1J_1J. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, што праходзіць праз пункт M паралельна:
а) плоскасці асновы $IJKL$; б) грані JJ_1K_1K.

166. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якое праходзіць праз:
а) кант CC_1 і пункт перасячэння дыяганалей грані AA_1D_1D;
б) пункт перасячэння дыяганалей грані $ABCD$ паралельна плоскасці AB_1C_1.

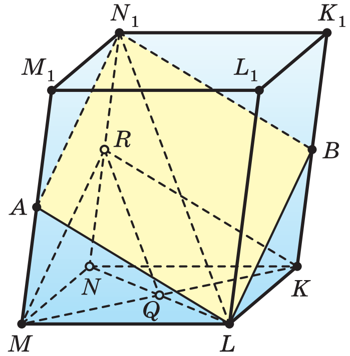
167. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю, якое праходзіць праз пункты F_1, H_1 і сярэдзіну канта GH. Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — трапецыя.

168. Нарысуйце паралелепіпед $EFGHE_1F_1G_1H_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю FKL, дзе K — сярэдзіна канта EE_1, а L — сярэдзіна канта GG_1. Дакажыце, што пабудаванае сячэнне — паралелаграм.

169. Улічыўшы, што дыяганалі NL і MK грані $KLMN$ паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ перасякаюцца ў пункце Q, сярэдзінай канта NN_1 з'яўляецца пункт R, а чатырохвугольнік N_1ALB ёсць сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт N_1 і паралельная плоскасці MRK (рыс. 201):

а) вызначце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік N_1ALB;

б) дакажыце, што прамыя RQ і N_1L паралельныя.



Рыс. 201

170. Нарысуйце паралелепіпед $OPQRO_1P_1Q_1R_1$ і пабудуйце яго сячэнне плоскасцю MNK, дзе пункты M, N і K ляжаць адпаведна на кантах:

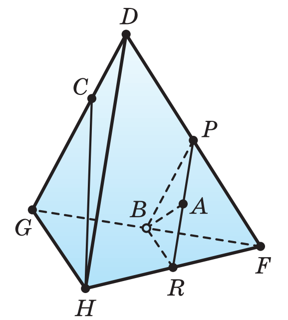
а) PP_1, OO_1, OR; б) QQ_1, OR, PP_1.

171. Нарысуйце трохвугольную піраміду $ABCD$ і адзначце пункт M на канце AB. Пабудуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M паралельна грані BDC.

172. Улічыўшы, што пункты I, J, K і L не ляжаць у адной плоскасці, а медыяны трохвугольнікаў IJK і KJL перасякаюцца адпаведна ў пунктах M_1 і M_2:

а) дакажыце, што адрэзкі IL і M_1M_2 паралельныя;

б) знайдзіце M_1M_2, улічыўшы, што $IL = 12$ см.



Рыс. 202

173. На кантах QA, QB і QC трохвугольнай піраміды $QABC$ адзначаны такія пункты M, N, P, што $QM : MA = QN : NB = QP : PC$. Дакажыце, што плоскасці MNP і ABC паралельныя. Знайдзіце плошчу трохвугольніка MNP, улічыўшы, што плошча трохвугольніка ABC роўная 18 см^2 і $QM : MA = 2 : 1$.

174. Улічыўшы, што пункты B, P, R — сярэдзіны кантаў FG, FD, FH піраміды $DFGH$, адрэзак AB — медыяна трохвугольніка BPR, а пункт C належыць канту DG (рыс. 202):

а) дакажыце, што прамая AB паралельная плоскасці DGH;

б) вызначце, ці перасякаецца прамая HC з плоскасцю BPR.

175. Нарысуйце паралелепіпед $MNKLM_1N_1K_1L_1$ і пазначце сярэдзіны A і B кантаў NN_1 і LL_1. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт B і паралельная плоскасці MAK. Пабудуйце адрэзак, па якім гэта сячэнне перасякае дыяганальнае сячэнне NLL_1N_1.

176. На кантах N_1K_1, LK, MM_1 паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны пункты Q, T, R адпаведна. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QTR.

177. Пункты Q, B і R ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў SY, XX_1 і S_1T_1 паралелепіпеда $STXYS_1T_1X_1Y_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю QBR.

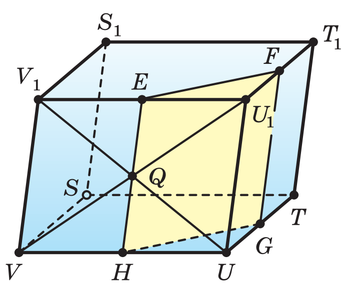
178. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $EFGH$ — сячэнне паралелепіпеда $STUVS_1T_1U_1V_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q перасячэння дыяганалей грані UVV_1U_1 і паралельная плоскасці TVV_1 (рыс. 203):

а) растлумачце, чаму прамыя FE і GH паралельныя;

б) вызначце, ці паралельныя прамыя GF і HE;

в) растлумачце, чаму прамая SS_1 паралельная плоскасці сячэння.

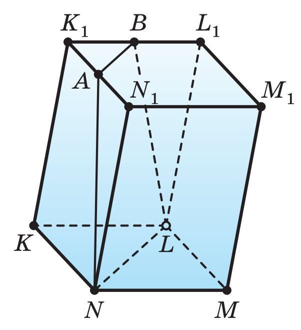
179. Улічыўшы, што чатырохвугольнік $LNAB$ — сячэнне паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ плоскасцю, якая праходзіць праз прамую LN і сярэдзіну A канта N_1K_1 (рыс. 204), устанавіце, ці з'ўляецца трапецыяй чатырохвугольнік $LNAB$.



Рыс. 203

180. Нарысуйце паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт перасячэння дыяганалей грані $KLMN$ і паралельная плоскасці MLK_1. Дакажыце, што прамая LN_1 паралельная плоскасці сячэння.

181. Сячэнне трохвугольнай піраміды $TXYZ$, паралельнае плоскасці XYZ, дзеліць бакавы кант у адносіне $1 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што плошча трохвугольніка XYZ роўная q.



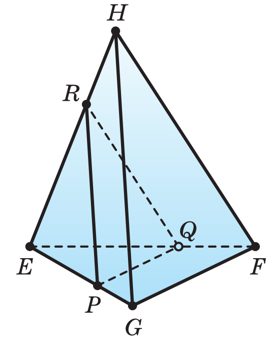
Рыс. 204

182. Сячэнне піраміды, паралельнае аснове, дзеліць бакавы кант у адносіне $2 : 3$, калі лічыць ад вяршыні. Знайдзіце плошчу сячэння, улічыўшы, што яго плошча на $336\ см^2$ меншая за плошчу асновы.

183. Улічыўшы, што трохвугольнік PRQ — сячэнне правільнай трохвугольнай пірамiды $HEFG$ плоскасцю, якая паралельная плоскасці HFG і праходзіць праз такі пункт Q канта FE, што $FQ : QE = 1 : 2$ (рыс. 205):

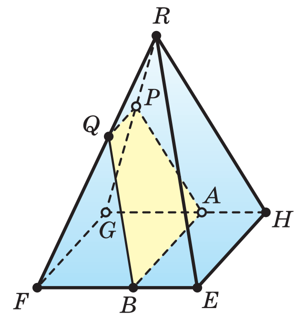
а) дакажыце, што трохвугольнікі PRQ і GHF падобныя;

б) знайдзіце перыметр трохвугольніка PRQ, улічыўшы, што старана асновы пірамiды роўная 30 см, а бакавы кант — 90 см.



Рыс. 205

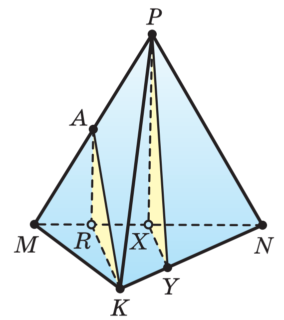
184. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$ з квадратнай асновай $CDEF$, вымярэнні якога роўныя 10 см, 10 см і 24 см. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта CC_1 і паралельная плоскасці CFE_1, і знайдзіце яго перыметр.



Рыс. 206

185. Ёсць прамая чатырохвугольная прызма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной 18 см і вострым вуглом 60°. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, што праходзіць праз меншую дыяганаль J_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD. Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта прызмы роўная 40 см.

186. Усе канты прамой прызмы $BDFB_1D_1F_1$ роўныя адзін аднаму. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні прызмы, улічыўшы, што плошча сячэння прызмы плоскасцю, якая праходзіць праз вяршыні B, D і сярэдзіну канта FF_1, роўная S.



Рыс. 207

187. Плоскасць, якая паралельная плоскасці RHE і праходзіць праз такі пункт Q канта RF правільнай чатырохвугольнай пірамiды $REFGH$, што $FQ : QR = 3 : 2$, перасякае піраміду па чатырохвугольніку $QPAB$ (рыс. 206). Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што $EH = 30$ см, $ER = 25$ см.

188*. Пункты X і A ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў MN і MP правільнай трохвугольнай пірамiды $PMNK$, а трохвугольнікі ARK і PXY — паралельныя сячэнні, якія праходзяць праз прамыя KA і PX адпаведна (рыс. 207). Знайдзіце плошчу трохвугольніка PXY, улічыўшы, што плошча трохвугольніка ARK роўная S.

189*. Бакавы кант чатырохвугольнай піраміды падзелены на тры долі, і праз пункты дзялення праведзены плоскасці, паралельныя плоскасці асновы. Знайдзіце плошчы атрыманых сячэнняў, улічыўшы, што плошча асновы роўная S.

190*. Плошча сячэння піраміды плоскасцю α, якая праходзіць праз пункт на бакавым канце і паралельная аснове, роўная 5 см^2. Вызначце, у якой адносіне плоскасць α дзеліць бакавы кант піраміды, улічыўшы, што плошча асновы роўная 80 см^2.

191*. Пункт M дзеліць бакавы кант CX трохвугольнай піраміды $CXYZ$ у адносіне 2 : 3, калі лічаць ад вяршыні. Трохвугольнік MBP ёсць сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт M і паралельная плоскасці XYZ. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні піраміды $CMBP$, улічыўшы, што плошча бакавой паверхні піраміды $CXYZ$ роўная q.

192*. Старана асновы і бакавы кант правільнай трохвугольнай піраміды адпаведна роўныя m і n. Праз пункт, які дзеліць бакавы кант у адносіне 1 : 3, калі лічаць ад вяршыні піраміды, праведзена сячэнне, паралельнае бакавой грані. Знайдзіце яго плошчу.

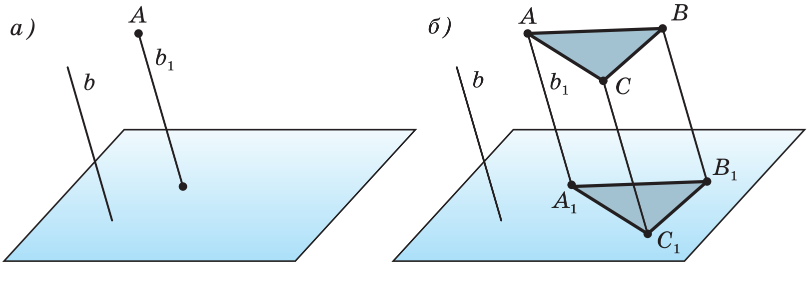
193*. На канце M_1L_1 прамавугольнага паралелепіпеда $MNKLM_1N_1K_1L_1$ выбраны такі пункт Q, што $M_1Q : QL_1 = 3 : 2$. Пабудуйце сячэнне паралелепіпеда плоскасцю, якая праходзіць праз пункт Q і паралельная плоскасці MN_1K, і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плошча трохвугольніка MN_1K роўная 200 см^2.

Прасторавае мадэляванне

Пры адлюстраванні на плоскасці (на паперы) фігур, размешчаных у прасторы, выкарыстоўваюць паралельнае праектаванне.

Няхай ёсць плоскасць β і прамая b, якая перасякае гэту плоскасць.

Возьмем адвольны пункт A, правядзём праз яго прамую b_1 так, што $b_1 \parallel b$ (рыс. 208*а*). Прамая b_1 перасякае плоскасць β у пэўным пункце A_1. Пункт A_1 называецца праекцыяй на плоскасць β пункта A пры праектаванні паралельна прамой b. Плоскасць β — плоскасць праекцый, прамая b задае кірунак праектавання.



Рыс. 208

Рыс. 209

Паралельнай праекцыяй фігуры F называюць мноства F_1 праекцый усіх яе пунктаў на зададзеную плоскасць β (рыс. 208*б*). Фігура F_1 называецца паралельнай праекцыяй фігуры F.

Паралельнай праекцыяй рэальнай фігуры з'яўляецца яе цень, які падае на плоскую паверхню пры сонечным асвятленні, таму што сонечныя прамені можна лічыць паралельнымі (рыс. 209).

Калі вы паглядзіце на свой цень на зямлі або на сцяне, то ўбачыце ўласную паралельную праекцыю.

Дадатковыя заданні да раздзела 2

194. Паралелаграмы $MNLK$ і $MNXY$ не ляжаць у адной плоскасці. Дакажыце, што чатырохвугольнік $KLXY$ з'яўляецца паралелаграмам.

195. Адрэзак PE — агульная медыяна трохвугольнікаў QPS і TPA, а пункты K, L, M, N — сярэдзіны адрэзкаў PS, PA, ET, EQ. Дакажыце, што прамыя KL і MN паралельныя.

196. Вызначце, ці можа кожная з дзвюх скрыжаваных прамых быць паралельнай трэцяй прамой.

197. Дакажыце, што прамая c, якая перасякае ў розных пунктах прамыя a і b адной плоскасці, таксама ляжыць у гэтай плоскасці.

198. Дакажыце, што калі стораны AB і BC паралелаграма $ABCD$ перасякаюць плоскасць, то прамыя AD і DC таксама перасякаюць гэту плоскасць.

199. Сярэдняя лінія трапецыі ляжыць у плоскасці β. Вызначце, якія стораны трапецыі перасякаюць плоскасць β.

200. Дакажыце, што калі тры плоскасці, якія не пераходзяць праз адну прамую, папарна перасякаюцца, то лініі іх перасячэння або паралельныя, або маюць агульны пункт.

201. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, пабудуйце яго сячэнні плоскасцямі ABC_1 і DCB_1, а таксама агульны адрэзак гэтых сячэнняў.

202. Прамая a паралельная плоскасці α. Вызначце, ці існуюць плоскасці, якія праходзяць праз прамую a і паралельныя плоскасці α, і калі існуюць, то колькі ёсць такіх плоскасцей?

203. Прамая a паралельная адной з дзвюх паралельных плоскасцей. Дакажыце, што прамая a або паралельная другой з гэтых плоскасцей, або ляжыць у ёй.

204. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T. Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC.

205. Пункт D не ляжыць у плоскасці паралелаграма $IJKL$. Дакажыце, што прамая KL паралельная плоскасці IDJ.

206. Плоскасць α праходзіць праз сярэдзіну стараны AB трохвугольніка ABC паралельна старане BC. Дакажыце, што плоскасці α належыць сярэдзіна стараны AC.

207. Ёсць прамая a, паралельная плоскасці α, і пункт T, прыналежны гэтай плоскасці. Дакажыце, што прамая, якая праходзіць праз пункт T і паралельная прамой a, ляжыць у плоскасці α.

208. Дакажыце, што калі прамая a перасякае плоскасць β, то яна перасякае і любую плоскасць, паралельную β.

209. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:

а) трохвугольнай прызмы;

б) паралелепіпеда.

210. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя a. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

211. Ёсць правільная чатырохвугольная піраміда $FGHIJ$ з вуглом грані HFI пры вяршыні F, роўным $60°$. Праз пэўны пункт Q канта GJ, праведзена сячэнне плоскасцю, паралельнай грані FJI. Знайдзіце перыметр гэтага сячэння, улічыўшы, што даўжыня яго дыяганалі роўная 14 см, а $GQ = 6$ см.

Праверце свае веды

1. Вызначце, якія многавугольнікі могуць атрымацца пры перасячэнні плоскасці і:

а) трохвугольнай піраміды; б) чатырохвугольнай піраміды.

2. Па-за плоскасцю трапецыі $ABCD$ з асновай AD выбраны пункт T. Дакажыце, што прамая AD паралельная плоскасці BTC.

3. Пункт P ляжыць на працягу канта NM паралелепіпеда $LKMNL_1K_1M_1N_1$. Знайдзіце адлегласць ад пункта N да пункта перасячэння прамой M_1P з плоскасцю LL_1N, улічыўшы, што $MM_1 = 24$ м, $NM = 12$ м, $PM = 18$ м.

4. Пункты N і M — сярэдзіны дыяганалей BC_1 і BD адпаведных граняў прамавугольнага паралелепіпеда $BCDEB_1C_1D_1E_1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка MN, улічыўшы, што $BE = 6$ см, $EE_1 = 8$ см.

5. Пункт A — сярэдзіна канта PY трохвугольнай піраміды $PXYZ$, усе канты якой роўныя $12\sqrt{3}$. Пабудуйце пункт перасячэння з паверхняй піраміды прамой b, якая праходзіць праз пункт A і паралельная медыяне YR грані XYZ. Знайдзіце даўжыню адрэзка гэтай прамой, размешчанага ўнутры піраміды.

6. Вяршыні M і N трапецыі $MNLK$ з асновамі NL і KM належаць плоскасці γ, а дзве іншыя вяршыні не належаць ёй. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да пункта перасячэння прамой LK з плоскасцю γ, улічыўшы, што $MK = 8$ см, $MN = 5$ см, $NL = 6$ см.

7. Пункт E ёсць пункт адрэзка TR, які не перасякае плоскасць γ. Паралельныя прамыя, праведзеныя праз пункты T, R, E, перасякаюць плоскасць γ у пунктах T_1, R_1, E_1 адпаведна. Дакажыце, што пункты T_1, R_1, E_1 ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак EE_1, улічыўшы, што $TT_1 = 16$ см, $RR_1 = 10$ см, $TE : RE = 1 : 2$.

8. На адрэзку AB выбраны такі пункт C, што $AB : BC = 4 : 3$. Праз канец B адрэзка AB праведзена плоскасць α. Паралельна гэтай плоскасці пабудаваны адрэзак CD, роўны 24 см. Дакажыце, што прамая AD перасякае плоскасць α у пэўным пункце E, і знайдзіце адрэзак BE.

9. Ёсць прамая чатырохвугольная прызма $AJCDA_1J_1C_1D_1$, асновай якой з'яўляецца ромб са стараной 16 см і вострым вуглом 60°. Пабудуйце сячэнне прызмы плоскасцю, што праходзіць праз меншую дыяганаль J_1D_1 ромба і сярэдзіну канта AD. Знайдзіце перыметр сячэння, улічыўшы, што даўжыня бакавога канта прызмы роўная 20 см.

10. Пункты X, Y, Z ёсць адпаведна сярэдзіны кантаў OK, MK, MN правільнай трохвугольнай пірамíды $OMNK$. Плошча сячэння плоскасцю, якая праходзіць праз прамую MX і паралельная прамой NK, роўная Q. Знайдзіце плошчу сячэння піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункты Y і Z і паралельная прамой MX.

«Наш розум па прыродзе сваёй надзелены нястомнай прагай пазнаваць ісціну» (Цыцэрон).

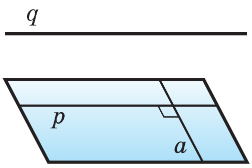
РАЗДЗЕЛ 3 ПЕРПЕНДЫКУЛЯРНАСЦЬ ПРАМЫХ І ПЛОСКАСЦЕЙ

У гэтым раздзеле вы даведаецеся:

- пра перпендыкулярнасць прамых і плоскасцей;
- пра адлегласці паміж прамымі і плоскасцямі;
- пра вуглы паміж прамымі і плоскасцямі.

§ 7. Перпендыкулярнасць прамой і плоскасці

А) Нагадаем, што *перпендыкулярнымі* называюць прамыя, вугал паміж якімі роўны 90°. Перпендыкулярныя прамыя могуць быць перасякальнымі і могуць быць скрыжаванымі. На рысунку 210 перпендыкулярныя прамыя a і p перасякаюцца, а перпендыкулярныя прамыя a і q скрыжоўваюцца.



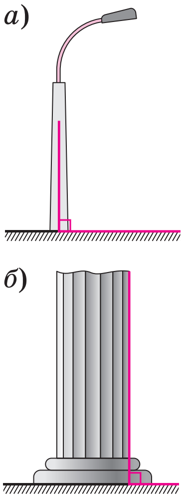
Рыс. 210

Прамая называецца **перпендыкулярнай плоскасці**, калі яна перпендыкулярная любой прамой гэтай плоскасці.

Перпендыкулярнасць прамой a плоскасці α запісваюць так: $a \perp \alpha$. Гавораць таксама, што і плоскасць α перпендыкулярная прамой a, і пішуць $\alpha \perp a$.

Прамая l, перпендыкулярная плоскасці β, абавязкова гэту плоскасць перасякае. Калі дапусціць, што прамая l ляжыць у плоскасці β або паралельная ёй, то ў плоскасці β ёсць прамыя, паралельныя прамой l, і вугал паміж l і такімі прамымі не роўны 90°.

Навакольнае асяроддзе дае многа прыкладаў, што ілюструюць перпендыкулярнасць прамой і плоскасці. Слупы з асвятляльнымі лямпамі і калоны ўстанаўліваюць перпендыкулярна да гарызантальнай паверхні зямлі (рыс. 211).



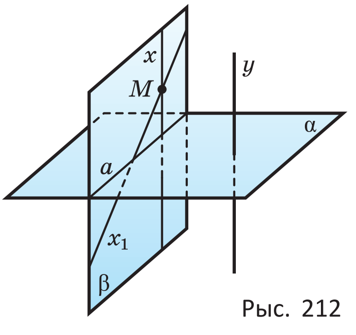
Рыс. 211

З тэарэмы **6** параграфа **5** вынікае, што пры вызначэнні вугла паміж прамымі іх можна замяняць паралельнымі прамымі. Таму калі адна з паралельных прамых перпендыкулярная плоскасці, то і другая таксама перпендыкулярная гэтай плоскасці. Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне.

Т э а р э м а 1. Калі дзве прамыя перпендыкулярныя плоскасці, то яны паралельныя адна адной.

Доказ. Няхай прамыя x і y абедзве перпендыкулярныя плоскасці α (рыс. 212). Дакажам, што прамыя x і y паралельныя адна адной.

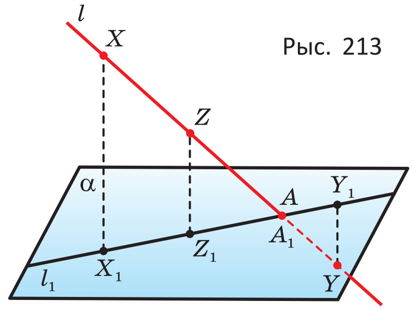
Праз які-небудзь пункт M прамой x правядзём прамую x_1, паралельную прамой y. Тады $x_1 \perp \alpha$. Дакажам, што прамая x_1 супадае з прамой x. Дапусцім, што гэта не так. Тады атрымліваецца, што ў плоскасці β, зададзенай прамымі x і x_1, праз пункт M праведзены дзве прамыя, перпендыкулярныя прамой a, па якой перасякаюцца плоскасці α і β, што немагчыма. Значыць, прамыя x і y паралельныя.



Рыс. 212

Няхай ёсць плоскасць α і прамая l, якая яе перасякае і не перпендыкулярная α (рыс. 213). Асновы перпендыкуляраў, апушчаных з пунктаў прамой l на плоскасць α, утвараюць прамую l_1. Гэта прамая называецца *праекцыяй прамой* l на плоскасць α.

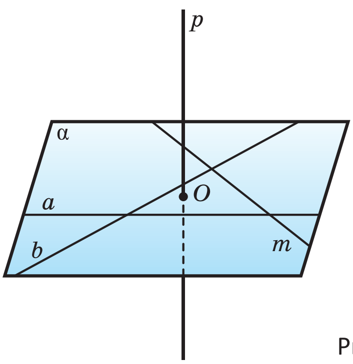
Наступная тэарэма ўстанаўлівае *прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці*.



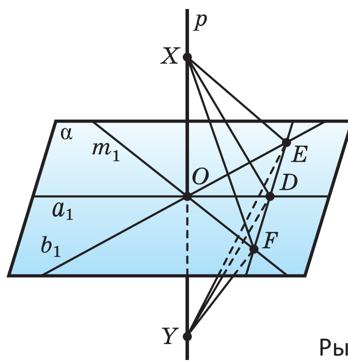
Рыс. 213

Тэарэма 2. Калі прамая перпендыкулярная дзвюм перасякальным прамым плоскасці, то яна перпендыкулярная гэтай плоскасці.

Доказ. Няхай прамая p перасякае плоскасць α у пункце O і перпендыкулярная перасякальным прамым a і b, што ляжаць у плоскасці α (рыс. 214). Дакажам, што прамая p перпендыкулярная плоскасці α, г. зн. прамая p перпендыкулярная прамой m, адвольна выбранай у плоскасці α.



Рыс. 214

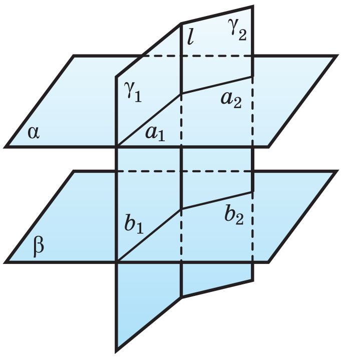


Рыс. 215

Правядзём праз пункт O прамыя a_1, b_1 і m_1, адпаведна паралельныя прамым a, b і m. У плоскасці α правядзём якую-небудзь прамую так, каб яна перасякала прамыя a_1, b_1 і m_1 у пунктах D, E, F (рыс. 215). На прамой p адзначым пункты X і Y на аднолькавых адлегласцях ад пункта O. Прамыя a_1 і b_1 — пасярэднія перпендыкуляры да адрэзка XY, таму $DX = DY$ і $EX = EY$. Значыць, трохвугольнікі XDE і YDE роўныя па трох старанах, а таму вуглы XEF і YEF роўныя. Улічыўшы гэта, атрымаем, што трохвугольнікі XEF і YEF роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Таму $FX = FY$. Гэта азначае, што трохвугольнік XFY з'яўляецца раўнабедраным, а таму яго медыяна FO з'яўляецца і вышынёй, г. зн. прамыя p і m_1, а таксама прамыя p і m перпендыкулярныя.

Вынік 1. Калі прамая перпендыкулярная адной з паралельных плоскасцей, то яна перпендыкулярная і другой плоскасці.

Няхай плоскасці α і β паралельныя і прамая l перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 216). Дакажам, што прамая l перпендыкулярная



Рыс. 216

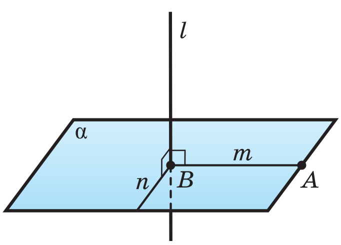
плоскасці β. Для доказу правядзём праз прамую l дзве якія-небудзь плоскасці γ_1 і γ_2. Няхай яны перасякаюць плоскасць α па прамых a_1 і a_2, а паралельную ёй плоскасць β — па прамых b_1 і b_2. Паколькі $a_1 \parallel b_1$ і $a_2 \parallel b_2$, $l \perp a_1$ і $l \perp a_2$, то $l \perp b_1$ і $l \perp b_2$. Па тэарэме **2** атрымліваем, што $l \perp \beta$.

Вынік 2. Калі адной прамой перпендыкулярныя дзве плоскасці, то яны паралельныя.

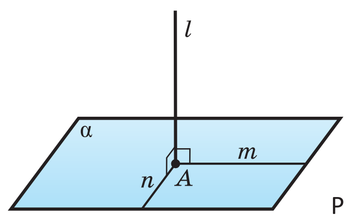
Правядзіце самастойна абгрунтаванне гэтага сцверджання, выкарыстаўшы рысунак 216.

Б) **Т э а р э м а 3. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная плоскасць, перпендыкулярная дадзенай прамой.**

Доказ. Няхай ёсць прамая l і пункт A. У выпадку, калі пункт A не ляжыць на прамой l (рыс. 217), у плоскасці, што вызначаецца пунктам A і прамой l, праз пункт A правядзём прамую m, перпендыкулярную прамой l, і праз пункт B перасячэння прамых m і l — яшчэ адну прамую n, перпендыкулярную прамой l.

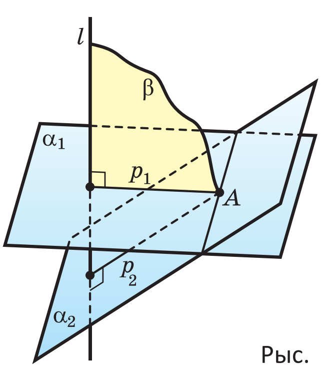


Рыс. 217

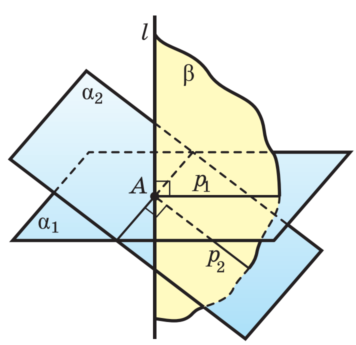


Рыс. 218

У выпадку, калі пункт A ляжыць на прамой l (рыс. 218), праз пункт A правядзём прамыя m і n, перпендыкулярныя прамой l. Праз прамыя m і n правядзём плоскасць α. Гэтыя плоскасці і прамая l перпендыкулярныя па прымеце перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.



Рыс. 219



Рыс. 220

Дакажам цяпер, што пабудаваная плоскасць α адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праведзены дзве плоскасці α_1 і α_2, перпендыкулярныя прамой l (рыс. 219 і 220). Праз прамую l і пункт A правядзём якую-небудзь плоскасць β. Яна перасякае плоскасці α_1 і α_2 па пэўных прамых p_1 і p_2, бо плоскасць β мае з плоскасцямі α_1 і α_2 агульны пункт A. Паколькі $l \perp \alpha_1$ і $l \perp \alpha_2$, то $l \perp p_1$ і $l \perp p_2$. Атрымліваецца, што ў плоскасці β праз пункт A праведзены дзве прамыя p_1 і p_2, перпендыкулярныя прамой l, што немагчыма.

Тэарэма 4. Праз кожны пункт прасторы праходзіць адзіная прамая, перпендыкулярная дадзенай плоскасці.

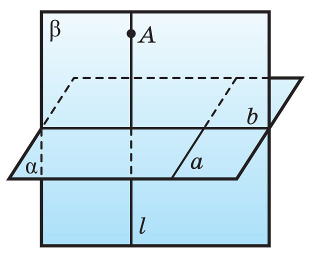
Доказ. Няхай ёсць пункт A і плоскасць α. Няхай a — прамая ў плоскасці α, а β — плоскасць, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярная прамой a. Няхай плоскасці α і β перасякаюцца па прамой b (рыс. 221). У плоскасці β праз пункт A правядзём прамую l, перпендыкулярную прамой b. Прамая l — шуканая, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым a і b: $l \perp b$ па пабудаванні; $l \perp a$, бо $a \perp \beta$ і l належыць β.

Прамая l — адзіная. Дапусцім, што гэта не так. Няхай праз пункт A праходзіць яшчэ адна прамая l_1, перпендыкулярная плоскасці α (рыс. 222 і 223). Тады па тэарэме **1** прамыя l і l_1 паралельныя адна адной. Але такое немагчыма, бо прамыя l і l_1 перасякаюцца ў пункце A.

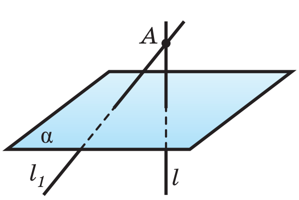
Вынік 3. Квадрат дыяганалі прамавугольнага паралелепіпеда роўны суме квадратаў трох яго вымярэнняў.

Няхай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прамавугольны паралелепіпед (рыс. 224). Паколькі кант CC_1 перпендыкулярны плоскасці $ABCD$, то трохвугольнік ACC_1 прамавугольны з прамым вуглом C. Таму $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. А паколькі трохвугольнік ABC таксама прамавугольны з прамым вуглом B, то $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Улічыўшы, што $CC_1 = AA_1$ і $BC = AD$, атрымліваем, што

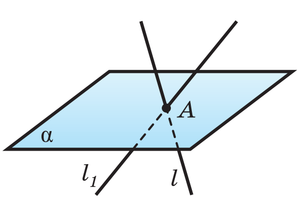
$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$



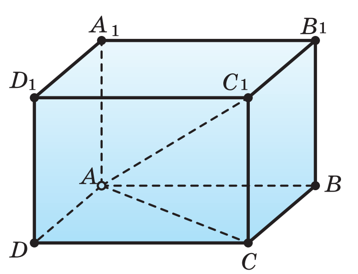
Рыс. 221



Рыс. 222



Рыс. 223



Рыс. 224

1. Якія прамыя прасторы называюцца перпендыкулярнымі? Ці могуць скрыжаваныя прамыя быць перпендыкулярнымі?
2. Якую прамую называюць перпендыкулярнай плоскасці?
3. Сфармулюйце ўласцівасць прамых, перпендыкулярных адной плоскасці.
4. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці прамой і плоскасці.
5. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, перпендыкулярнай да адной з паралельных плоскасцей.
6. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасцей, перпендыкулярных да адной прамой.
7. Сфармулюйце сцверджанне пра плоскасць, якая перпендыкулярная дадзенай прамой і праходзіць праз дадзены пункт.
8. Сфармулюйце сцверджанне аб прамой, якая перпендыкулярная дадзенай плоскасці і праходзіць праз дадзены пункт.
9. Назавіце ў сваім класе мадэлі прамых, перпендыкулярных плоскасці.
10. У правільнай трохвугольнай прызме выбіраюць грань. Колькі ёсць кантаў гэтай прызмы, перпендыкулярных выбранай грані?
11. Прамая FA перпендыкулярная плоскасці BCF, і пункт F — сярэдзіна адрэзка AD. Ці праўда, што:
    а) $AB = DB$;
    б) калі $BF = FC$, то $AB = AC$;
    в) калі $AB = DC$, то $BF = FC$?
12. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ці праўда, што:
    а) калі $\angle BAD = 90°$, то $CD \perp B_1C_1$ і $AB \perp A_1D_1$;
    б) калі $AB \perp DD_1$, то $AB \perp CC_1$ і $DD_1 \perp A_1B_1$?

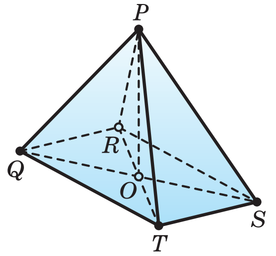
Задача 1. Дакажыце, што калі канты PQ і PS, а таксама PR і PT чатырохвугольнай піраміды $PQRST$, асновай якой з'яўляецца паралелаграм, роўныя адзін аднаму (рыс. 225), то адрэзак, які злучае вяршыню P з пунктам O перасячэння дыяганалей гэтага паралелаграма, перпендыкулярны аснове $QRST$.

Рашэнне. $QRST$ — паралелаграм і $QS \cap RT = O$, таму $OQ = OS$ і $OR = OT$.

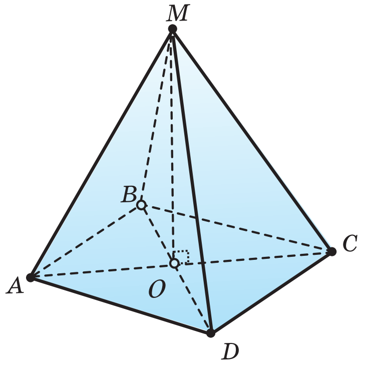
Паколькі $\triangle PQS$ раўнабедраны і $OQ = OS$, то $PO \perp QS$.

Паколькі $\triangle PRT$ раўнабедраны і $OR = OT$, то $PO \perp RT$.

$PO \perp QS$ і $QS \subset (QRS)$, $PO \perp RT$ і $RT \subset (QRS)$, таму $PO \perp (QRS)$ (тэарэма 2).



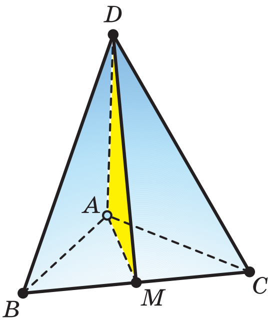
Рыс. 225



Рыс. 226

Выкарыстаўшы рысунак 226, дакажыце самастойна адваротнае сцверджанне: «Калі адрэзкі MA і MC, а таксама MB і MD злучаюць пункт M перпендыкуляра, узведзенага з цэнтра O паралелаграма $ABCD$, з супрацьлеглымі яго вяршынямі, то гэтыя адрэзкі папарна роўныя».

Задача 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $DABC$ пункт M — сярэдзіна BC (рыс. 227). Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці ADM.



Рыс. 227

Р а ш э н н е. $DABC$ — правільная трохвугольная піраміда, таму $\triangle ABC$ — роўнастаронні і $\triangle DBC$ — раўнабедраны.

$\triangle ABC$ — роўнастаронні і M — сярэдзіна BC, таму $BC \perp AM$.

$\triangle DBC$ — раўнабедраны і M — сярэдзіна BC, таму $BC \perp DM$.

$BC \perp AM$ і $BC \perp DM$, таму $BC \perp (ADM)$.

Задача 3*. Дакажыце, што дыяганаль BD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка AB_1C (рыс. 228).

Р а ш э н н е. $ABCD$ — квадрат, таму $AC \perp BD$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, таму $AC \perp BB_1$.

$AC \perp BD$ і $AC \perp BB_1$, таму $AC \perp (BB_1D)$.

$AC \perp (BB_1D)$ і $BD_1 \subset (BB_1D)$, таму $AC \perp BD_1$.

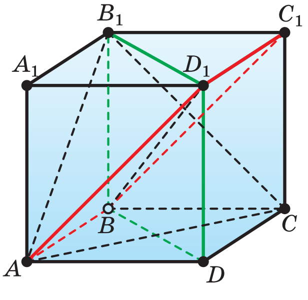
BB_1C_1C — квадрат, таму $B_1C \perp BC_1$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, таму $AB \perp B_1C$.

$B_1C \perp BC_1$ і $AB \perp B_1C$, таму $B_1C \perp (ABC_1)$.

$B_1C \perp (ABC_1)$ і $BD_1 \subset (ABC_1)$, таму $B_1C \perp BD_1$.

$AC \perp BD_1$ і $B_1C \perp BD_1$, таму $BD_1 \perp (AB_1C)$.

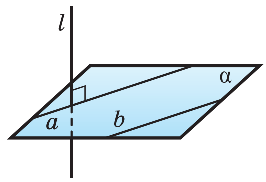


Рыс. 228

Выкарыстаўшы рысунак 228, устанавіце, у якім пункце прамая BD_1 перасякае плоскасць AB_1C.

212. Вызначце, ці перпендыкулярная прамая l плоскасці α, улічыўшы, што на рысунку:

а) 229 паралельныя прамыя a і b ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

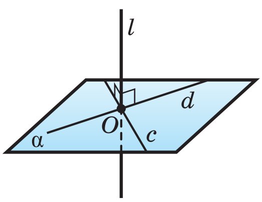


Рыс. 229

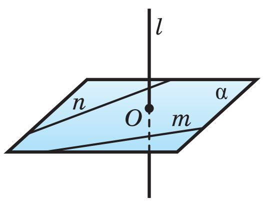
б) 230 перасякальныя прамыя c і d ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

в) 231 перасякальныя прамыя m і n ляжаць у плоскасці α і прамая l перпендыкулярная ім абедзвюм;

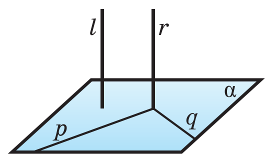
г) 232 прамая r перпендыкулярная перасякальным прамым p і q плоскасці α і прамая l паралельная прамой r.



Рыс. 230



Рыс. 231



Рыс. 232

213. На кантах F_1G_1 і FF_1 прамавугольнага паралелепіпеда $EFGHE_1F_1G_1H_1$ выбраны пункты A і B (рыс. 233). Вызначце, ці перпендыкулярныя:

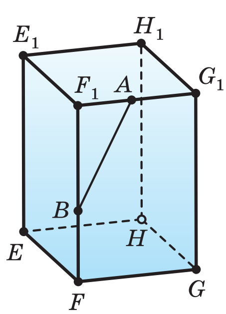
а) прамая FG і плоскасць EE_1F_1;

б) прамыя AB і GH;

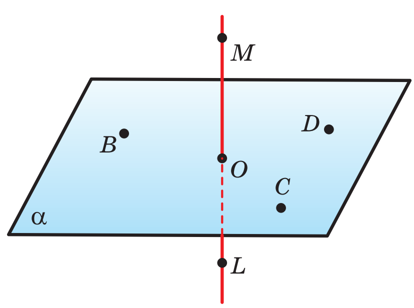
в) прамыя F_1G і EF.

214. Пункты L, M і O ляжаць на прамой, перпендыкулярнай плоскасці α, а пункты O, B, C і D ляжаць у гэтай плоскасці (рыс. 234). Вызначце, ці з'яўляецца прамым вугал:

а) LOB; б) MOC; в) DLM; г) DOL; д) BMO.

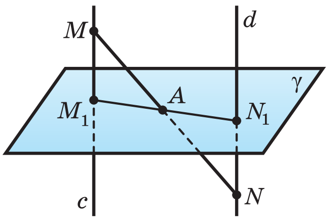


Рыс. 233



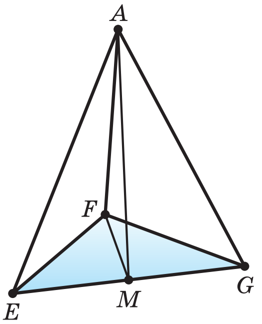
Рыс. 234

215. Праз канцы P і Q адрэзка PQ, паралельнага плоскасці γ, праведзены прамыя, перпендыкулярныя гэтай плоскасці, якія перасякаюць яе ў пунктах P_1 і Q_1. Дакажыце, што $PQ = P_1Q_1$.



Рыс. 235

216. На канце HE чатырохвугольнай піраміды $REFGH$, у якой бакавы кант FR перпендыкулярны плоскасці асновы, выбраны пункт A і на адрэзках AF і AR адзначаны іх сярэдзіны B і C. Дакажыце, што прамая BC перпендыкулярная плоскасці асновы $EFGH$, і знайдзіце вугал паміж прамымі BC і GH.



Рыс. 236

217. Праз канцы M і N адрэзка, які перасякае плоскасць γ у пункце A, праведзены прамыя c і d. Гэтыя прамыя перпендыкулярныя плоскасці γ і перасякаюць яе ў пунктах M_1 і N_1 адпаведна (рыс. 235). Дакажыце, што пункты M_1, N_1 і A ляжаць на адной прамой, і знайдзіце адрэзак MN, улічыўшы, што $MM_1 = 24$ см, $NN_1 = 8$ см, $AN_1 = 6$ см.

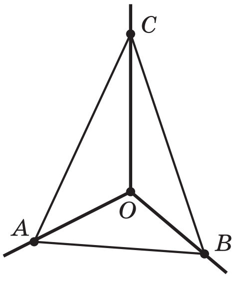
218. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α, якія перасякаюць яе ў пунктах C і D адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B, улічыўшы, што $AC = 9$ м, $BD = 6$ м, $CD = 7{,}2$ м і адрэзак AB не перасякае плоскасць α.

219. Праз пункты A і B праведзены прамыя, перпендыкулярныя плоскасці α, якія перасякаюць яе ў пунктах A_1 і B_1 адпаведна. Знайдзіце A_1B_1, улічыўшы, што $AB = 30$ см, $AA_1 = 43$ см, $BB_1 = 67$ см.

220*. Праз вяршыню C правільнага трохвугольніка ABC са стараной $16\sqrt{3}$ см праведзена прамая k, перпендыкулярная плоскасці ABC, а праз артацэнтр O гэтага трохвугольніка — прамая l, паралельная прамой k. На прамых k і l выбраны пункты D і E, адлеглыя ад пунктаў C і O на 16 см і 12 см адпаведна. Знайдзіце адлегласць DE і адлегласці ад пунктаў D і E да вяршынь трохвугольніка.

221*. Праз цэнтр O сіметрыі квадрата са стараной a праведзена прамая l, перпендыкулярная плоскасці квадрата. Знайдзіце адлегласць ад вяршынь квадрата да пункта K прамой l, улічыўшы, што $OK = d$.

222. Ёсць прамавугольны трохвугольнік EFG з прамым вуглом F і катэтамі FE і FG, роўнымі 6 см і 8 см адпаведна. Ад вяршыні F на прамені, перпендыкулярным плоскасці трохвугольніка, адкладзены адрэзак FA, роўны 12 см, а на гіпатэнузе EG пазначана яе сярэдзіна M (рыс. 236). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка AFM.



Рыс. 237

223. На рысунку 237 прамыя OA, OB і OC папарна перпендыкулярныя. Знайдзіце адрэзак BC, улічыўшы, што:

а) $OA = 6$ см, $AB = 14$ см, $OC = 3$ см;
б) $AC = 18$ см, $AB = 32$ см, $OC = 10$ см;
в*) $OA = p$, $AB = q$, $OC = r$;
г*) $AC = k$, $AB = l$, $OC = m$.

224. З вяршыні B трохвугольніка ABC праведзены адрэзак BD, перпендыкулярны плоскасці трохвугольніка. Знайдзіце даўжыню гэтага адрэзка, улічыўшы, што $DA = 13$ см, $DC = 15$ см, а старана BC даўжэйшая за старану BA на 4 см.

225. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце O, выбраны два пункты A і B, а на плоскасці α — такі пункт X, што $XA = 3$, $XB = 4$. Знайдзіце XO, улічыўшы, што:

а) $AB = 5$; б) $AB = 6$; в) $AB = 7$.

226*. Бакавы кант OY трохвугольнай пірамiды $OXYZ$ перпендыкулярны плоскасці яе асновы XYZ. Знайдзіце гэты кант, улічыўшы, што канты YX і YZ роўныя 27 см і 48 см адпаведна і канты OZ і OX адносяцца як $4 : 3$.

227. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 9 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная $15\sqrt{2}$ см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.

228. Вуглы A і B трохвугольніка ABC разам складаюць $90°$, а прамая BD перпендыкулярная плоскасці ABC. Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

229. Прамая AM перпендыкулярная плоскасці квадрата $ABCD$, дыяганалі якога перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што прамая BD перпендыкулярная:

а) плоскасці AMO; б) прамой MO.

230. Канты AB і AC, а таксама DB і DC трохвугольнай пірамiды $ABCD$ роўныя, а пункт M — сярэдзіна канта BC. Дакажыце, што плоскасць трохвугольніка ADM перпендыкулярная прамой BC.

231. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $CDEFC_1D_1E_1F_1$, грань $CDEF$ якога з'яўляецца квадратам. Знайдзіце плошчу бакавой паверхні чатырохвугольнай пірамiды C_1CDEF, улічыўшы, што $CD = 20$ мм, $CE_1 = 20\sqrt{6}$ мм.

232. Канты прамавугольнага паралелепіпеда роўныя 12 см, 16 см і 28 см адпаведна. Вызначце плошчу сячэння, праведзенага праз канцы трох кантаў, што выходзяць з адной вяршыні.

233*. Вымярэнні AB, AD і дыяганаль AC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя 6, 12 і 18 адпаведна. Пункты K і K_1 выбраны на кантах AD і A_1D_1 так, што $AK : KD = A_1K_1 : K_1D_1 = 1 : 3$. Дакажыце, што плоскасць BKK_1 перпендыкулярная прамой AC, і знайдзіце плошчу сячэння паралелепіпеда плоскасцю BKK_1.

234. Праз цэнтр O апісанай каля трохвугольніка ABC акружнасці праведзена прамая, перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка (рыс. 238). Дакажыце, што кожны пункт X гэтай прамой роўнаадлеглы ад вяршынь трохвугольніка.

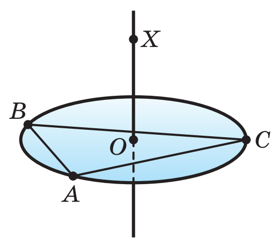
235. Дакажыце, што ўсе прамыя, якія праходзяць праз дадзены пункт M прамой a і перпендыкулярныя да яе, ляжаць у плоскасці, якая перпендыкулярная да прамой a і праходзіць праз пункт M.

236. Дакажыце, што калі пункт X роўнаадлеглы ад канцоў дадзенага адрэзка AB, то ён ляжыць у плоскасці, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка AB і перпендыкулярная прамой AB.

237. Праз вяршыні A і B трохвугольніка ABC праведзены прамыя k і l, перпендыкулярныя яго плоскасці, а праз медыяну CD — плоскасць, якая перасякае прамыя k і l у пунктах E і F адпаведна (рыс. 239). Вызначце:

а) чым з'яўляецца адрэзак CD у трохвугольніку CEF;

б) што калі $CA = CB$, то трохвугольнік CEF з'яўляецца раўнабедраным.



Рыс. 238

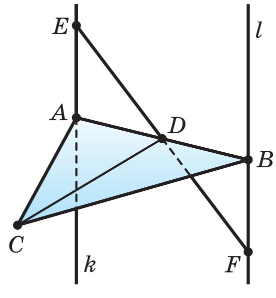
238. На прамой, якая перпендыкулярная плоскасці трохвугольніка PQR і праходзіць праз вяршыню P, выбраны пункт A. На адрэзку, што злучае сярэдзіну стараны QR з пунктам A, адзначаны такі пункт T, што $AT : TP = 2 : 1$. Улічыўшы, што G — цэнтр цяжару трохвугольніка PQR, вызначце вугал паміж прамымі:

а) GT і QR; б) GT і PQ.

239. Пункт Q з'яўляецца цэнтрам квадратнай асновы $ABCD$, а пункт K — сярэдзінай канта PA чатырохвугольнай піраміды $PABCD$, усе канты якой роўныя 100. Нарысуйце сячэнне піраміды і знайдзіце яго плошчу, улічыўшы, што плоскасць сячэння праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) AC; в) PQ;

б) PA; г) BD.



Рыс. 239

240. Усе грані трохвугольнай піраміды $IJKL$ — правільныя трохвугольнікі са стараной 6 см. Пабудуйце сячэнне гэтай піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз сярэдзіну канта KL і перпендыкулярная яму, і знайдзіце плошчу гэтага сячэння.

241. Пункт Q — сярэдзіна канта KK_1 прамавугольнага паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, пункт H канта MM_1 такі, што $MH : HM_1 = 4 : 1$. Знайдзіце даўжыню адрэзка HQ, улічыўшы, што дыяганаль паралелепіпеда роўная 41 см, а дыяганаль яго асновы — 9 см.

242*. Асновай трохвугольнай піраміды $SXYZ$ з'яўляецца правільны трохвугольнік, а канты SZ, SX, SY узаемна перпендыкулярныя. Праз пункт Q, выбраны на канце XZ, праведзена плоскасць, перпендыкулярная прамой SZ. Знайдзіце кант SX піраміды, улічыўшы, што плошча сячэння роўная 32 см^2, а $SQ = 17$ см.

243*. Ёсць трохвугольная піраміда $QABC$, аснова якой — правільны трохвугольнік ABC, а бакавыя канты QA, QB, QC роўныя адзін аднаму. З вяршыні C і з такога пункта X канта AC, што $AX = 45$ см і $XC = 30$ см, праведзены перпендыкуляры да грані QAB. Знайдзіце даўжыні гэтых перпендыкуляраў, улічыўшы, што адлегласць паміж іх асновамі роўная 18 см.

244*. Ёсць правільная трохвугольная прызма $MNKM_1N_1K_1$. Пункты A і B — сярэдзіны кантаў MK і KK_1 адпаведна. Праз гэтыя пункты праведзены прамыя, якія перпендыкулярныя грані MM_1N_1N і перасякаюць яе ў пунктах P і Q адпаведна. Знайдзіце старану асновы і бакавы кант прызмы, улічыўшы, што $AB = 2\sqrt{61}$ см, а $PQ = 13$ см.

245*. У трохвугольнай пірамідзе $QFGH$ аснова FGH — правільны трохвугольнік, а бакавыя канты QF, QG, QH роўныя адзін аднаму. Адно сячэнне піраміды перпендыкулярнае канту QH і праходзіць праз вяршыню F, другое — паралельнае канту QH і змяшчае вяршыню G і такі пункт B канта FH, што $FB = 8$ см і $BH = 7$ см. Знайдзіце адрэзак, па якім перасякаюцца гэтыя сячэнні, улічыўшы, што $QF = 12$ см.

246*. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. У ёй пазначаны цэнтр Q яе асновы ABC і ўнутраны пункт K канта PB. Зрабіце адпаведны рысунак у сшытку і нарысуйце сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) BC; б) BP; в) BQ.

247*. Пункт K — сярэдзіна канта A_1B_1 адзінкавага куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарысуйце сячэнне куба і знайдзіце яго перыметр і плошчу, улічыўшы, што плоскасць праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная прамой:

а) DD_1; б) CD; в) C_1D; г) CD_1; д) BD.

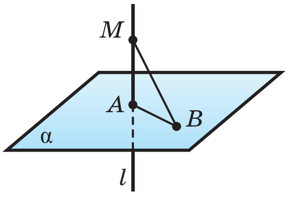
Prastoravae мадэляванне

При выкананні задання на вызначэнне вертыкальнасці слупа для плота (рыс. 240) вучань праверыў вертыкальнасць першага са слупоў, а далей, вымераўшы вышыні першага і другога слупоў і адлегласць паміж імі знізу і зверху, зрабіў вывад пра тое, што і другі слуп таксама вертыкальны. Вызначце, ці забяспечваюць атрыманыя вучнем звесткі праўдзівасць яго вываду. Адказ абгрунтуйце.

Рыс. 240

§ 8. Адлегласці

А) Няхай ёсць плоскасць α і пункт M па-за ёю (рыс. 241). Праз пункт M правядзём прамую l, перпендыкулярную плоскасці α, і няхай A — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю α. Адрэзак MA называецца *перпендыкулярам да плоскасці*, праведзеным з пункта M, а пункт A — *асновай перпендыкуляра*.



Рыс. 241

Злучым пункт M яшчэ з якім-небудзь пунктам B плоскасці α. Адрэзак MB называецца *нахіленай да плоскасці*, праведзенай з пункта M, а пункт B — *асновай нахіленай*. Адрэзак AB называецца *праекцыяй нахіленай* на плоскасць α.

Уласцівасці перпендыкуляра і нахіленых

Калі з аднаго пункта па-за плоскасцю да яе праведзены дзве нахіленыя (рыс. 242), то:

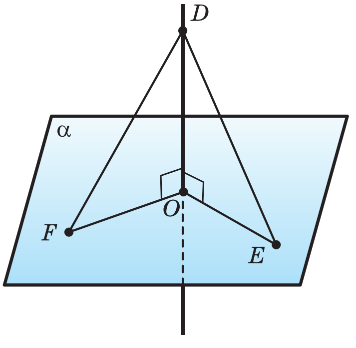
а) нахіленыя, якія маюць роўныя праекцыі, роўныя адна адной;

б) тая нахіленая большая, праекцыя якой большая;

в) роўныя нахіленыя маюць роўныя праекцыі;

г) большая нахіленая мае большую праекцыю.

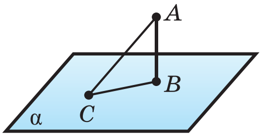
Уласцівасці перпендыкуляраў і нахіленых дакажыце самастойна, выкарыстоўваючы малюнак.



Рыс. 242

Т э а р э м а 5. Перпендыкуляр да плоскасці, праведзены з пэўнага пункта, меншы за любую нахіленую да гэтай плоскасці, праведзеную з таго самага пункта.

Доказ. Няхай адрэзак AB на рысунку 243 — перпендыкуляр, а адрэзак AC — нахіленая да плоскасці α. Гэтыя перпендыкуляр і нахіленая ў прамавугольным трохвугольніку ABC з'яўляюцца адпаведна катэтам і гіпатэнузай. Таму $AB < AC$.

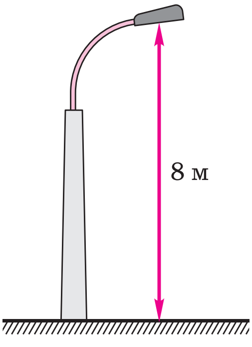


Рыс. 243

У адпаведнасці са сцверджаннем тэарэмы **5**, з усіх адлегласцей ад дадзенага пункта да розных пунктаў прыведзенай плоскасці найменшай з'яўляецца адлегласць, вымераная па перпендыкуляры.

Б) Адлегласцю ад пункта да плоскасці называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з гэтага пункта да плоскасці.

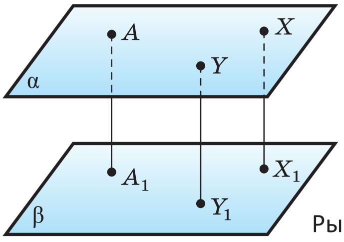
Калі мы гаворым, напрыклад, што вулічны ліхтар знаходзіцца на вышыні 8 м ад зямлі, то мяркуем, што адлегласць ад ліхтара да паверхні зямлі, вымераная па перпендыкуляры, праведзеным ад ліхтара да плоскасці зямлі, складае 8 м (рыс. 244).



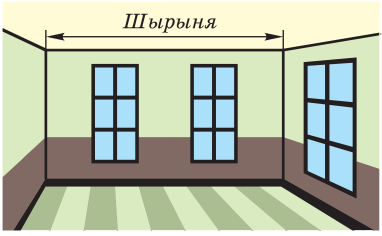
Рыс. 244

Т э а р э м а 6. Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці адна і тая і роўная даўжыні іх агульнага перпендыкуляра.

Доказ. Няхай ёсць паралельныя плоскасці α і β (рыс. 245). Няхай A — які-небудзь пункт плоскасці α, адрэзак AA_1 — перпендыкуляр, праведзены з пункта A да плоскасці β. Возьмем адвольны пункт X плоскасці α і правядзём з яго перпендыкуляр XX_1 да плоскасці β. Тады па тэарэме **1** прамыя AA_1 і XX_1 паралельныя, а па тэарэме **12** з параграфа **6** адрэзкі AA_1 і XX_1 роўныя адзін аднаму. Гэта азначае, што адлегласць ад любога пункта X плоскасці α да плоскасці β роўная адрэзку AA_1. Паколькі адрэзак AA_1 перпендыкулярны і плоскасці β, то ён з'яўляецца і адлегласцю ад пункта A_1 да плоскасці α. Зразумела, што адлегласць ад любога пункта Y плоскасці β да плоскасці α роўная адрэзку AA_1.



Рыс. 245



Рыс. 246

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта адной плоскасці да другой плоскасці.

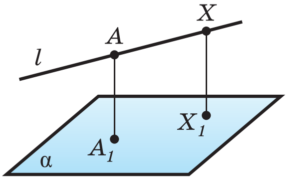
Усе пункты адной сцяны пакоя знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад супрацьлеглай сцяны (рыс. 246). Гэта адлегласць і ёсць шырыня пакоя.

Т э а р э м а 7. Адлегласць ад любога пункта прамой, паралельнай плоскасці, да гэтай плоскасці адна і тая і роўная перпендыкуляру, праведзенаму з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

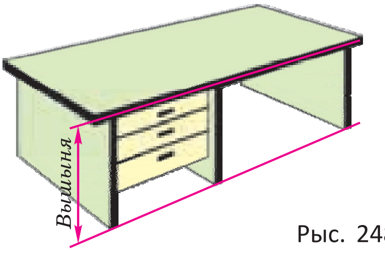
Выкарыстаўшы рысунак 247, правядзіце доказ тэарэмы самастойна.

Адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю называецца даўжыня перпендыкуляра, праведзенага з якога-небудзь пункта прамой да плоскасці.

Усе пункты краю стала знаходзяцца на адной адлегласці ад падлогі (рыс. 248). Гэта адлегласць і ёсць вышыня стала.



Рыс. 247

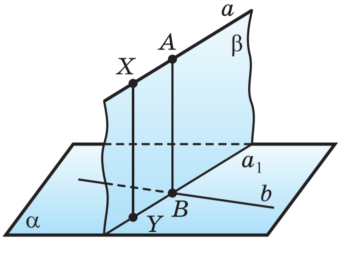


Рыс. 248

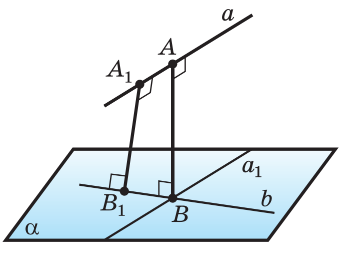
Т э а р э м а 8. Дзве скрыжаваныя прамыя маюць адзіны агульны перпендыкуляр.

Доказ. Няхай ёсць скрыжаваныя прамыя a і b (рыс. 249). Дакажам, што на гэтых прамых можна выбраць такія пункты A і B, што прамая AB перпендыкулярная і прамой a, і прамой b.

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз прамую b паралельна прамой a. Возьмем на прамой a пункт X і апусцім перпендыкуляр XY на плоскасць α. Няхай β — плоскасць, што праходзіць праз перасякальныя прамыя a і XY. Абазначым a_1 — прамую, па якой перасякаюцца плоскасці α і β. Паколькі $a_1 \parallel a$, то прамыя a_1 і b перасякаюцца ў пэўным пункце B. У плоскасці β апусцім перпендыкуляр BA на прамую a. Прамыя AB і XY ляжаць у адной плоскасці β і перпендыкулярныя да прамой a. Таму $AB \parallel XY$ і $AB \perp \alpha$ і, значыць, $AB \perp a$ і $AB \perp b$.



Рыс. 249



Рыс. 250

Гэтым самым існаванне агульнага перпендыкуляра скрыжаваных прамых абгрунтавана. Дакажам цяпер яго адзінасць.

Няхай скрыжаваныя прамыя a і b маюць яшчэ адзін агульны перпендыкуляр A_1B_1, прычым пункт A_1 належыць прамой a, а пункт B_1 — прамой b (рыс. 250).

Пункты A і A_1, B і B_1 супадаць не могуць, бо з аднаго пункта да прамой можна правесці толькі адзін перпендыкуляр. Паколькі $A_1B_1 \perp a$ і $A_1B_1 \perp b$, то прамая A_1B_1, як і прамая AB, перпендыкулярная плоскасці α, што праходзіць праз прамую b паралельна прамой a. Таму $A_1B_1 \parallel AB$ і пункты A_1, B_1, A, B належаць адной плоскасці. Значыць, і прамыя AA_1 і BB_1 належаць адной плоскасці. Атрымалі супярэчнасць з тым, што гэтыя прамыя скрыжоўваюцца.

Адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі называецца даўжыня іх агульнага перпендыкуляра.

З доказу тэарэмы **8** вынікае, што *адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі роўная адлегласці ад любога пункта адной з іх да плоскасці, што змяшчае другую прамую і паралельная першай.*

Каб знайсці адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі, можна дзейнічаць па-рознаму.

а) Можна пабудаваць адрэзак з канцамі на гэтых прамых, які перпендыкулярны ім абедзвюм, і знайсці яго даўжыню.

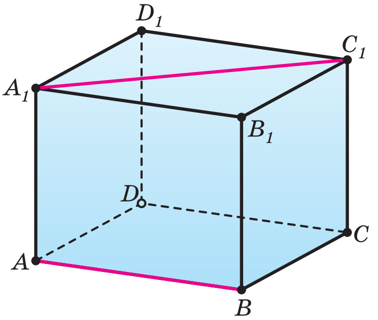
Прыклад 1. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць кант куба даўжынёй a і дыяганаль грані, якая з гэтым кантам не мае агульных пунктаў.

Рашэнне. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB і A_1C_1 (рыс. 251). Паколькі $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp A_1C_1$, то AA_1 — агульны перпендыкуляр скрыжаваных прамых AB і A_1C_1, а таму шуканая адлегласць роўная канту куба, г. зн. a.

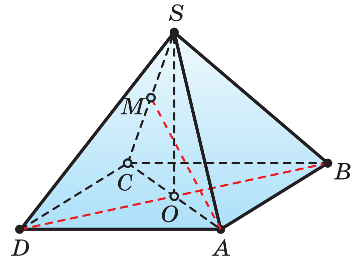
б) Можна пабудаваць плоскасць, якая змяшчае адну з прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці ад гэтай плоскасці да другой прамой.

Прыклад 2. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ канты асновы $ABCD$ роўныя 4, а бакавыя канты — 6. Знойдзем адлегласць паміж прамымі BD і AM, дзе M — сярэдзіна канта SC.

Рашэнне. Няхай O — цэнтр квадрата $ABCD$. Праз прамую BD правядзём плоскасць BDN, паралельную прамой AM (рыс. 252). Паколькі плоскасць SAC перпендыкулярная прамой BD і змяшчае прамую AM, то перпендыкуляр, апушчаны з любога пункта прамой AM на плоскасць BDN, належыць плоскасці SAC.



Рыс. 251



Рыс. 252

Няхай K — такі пункт на прамой AM, што $KO \perp AM$. Улічыўшы, што O — сярэдзіна стараны AC трохвугольніка ACM, атрымліваем, што OK роўны палавіне вышыні трохвугольніка ACM, праведзенай да стараны AM. Таму $OK = \frac{1}{2} \cdot \frac{2S_{ACM}}{AM} = \frac{S_{SAC}}{2AM}$. Знойдзем плошчу трохвугольніка SAC і яго медыяну AM:

$$AC = 4\sqrt{2},\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{7},$$

$$S_{SAC} = 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{7} = 4\sqrt{14},\ AM = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(AS^2 + AC^2) - SC^2} =$$

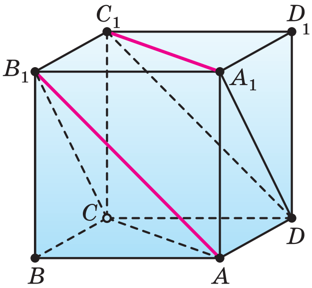
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2(36 + 32) - 36} = 5.\ \text{Цяпер}\ OK = \frac{2\sqrt{14}}{5}.$$

А д к а з: $\frac{2\sqrt{14}}{5}$.

в) Можна пабудаваць дзве паралельныя плоскасці, кожная з якіх змяшчае адну са скрыжаваных прамых і паралельная другой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай адлегласці паміж гэтымі плоскасцямі.

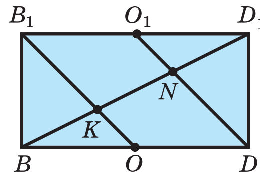
Прыклад 3. Знойдзем адлегласць паміж прамымі, якія змяшчаюць неперасякальныя дыяганалі дзвюх сумежных граняў куба з кантам a.

Р а ш э н н е. Няхай трэба знайсці адлегласць паміж прамымі AB_1 і A_1C_1 (рыс. 253). Плоскасць, што змяшчае A_1C_1 і паралельная AB_1, перасякае грань CC_1D_1 па прамой, паралельнай AB_1, г. зн. па прамой C_1D, а грань DAA_1 — па прамой DA_1. Разважаючы гэтаксама, атрымліваем, што плоскасць, якая змяшчае AB_1 і паралельная A_1C_1, перасякае грань $ABCD$ па прамой AC, а грань BCC_1 — па прамой B_1C.



Рыс. 253

Дыяганаль BD_1 куба як прамая плоскасці BB_1D_1D утварае прамы вугал з прамымі AC і A_1C_1, якія перпендыкулярныя гэтай плоскасці, а як прамая плоскасці BAD_1C_1 утварае прамы вугал з прамымі B_1C і A_1D, якія перпендыкулярныя гэтай плоскасці. Таму прамая BD_1 перпендыкулярная як плоскасці AB_1C, так і паралельнай ёй плоскасці A_1C_1D.



Рыс. 254

Плоскасць BDD_1 перасякаецца з плоскасцямі AB_1C і A_1C_1D па прамых B_1O і DO_1, дзе O і O_1 — цэнтры граняў $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ (рыс. 254), прамая BD_1 перасякае плоскасці AB_1C і A_1C_1D у пунктах K і N на прамых B_1O і DO_1. Паколькі $B_1O \parallel DO_1$, то па тэарэме Фалеса $BK = KN$ і $KN = ND_1$. Таму агульны перпендыкуляр KN плоскасцей AB_1C і A_1C_1D мае даўжыню $\dfrac{BD_1}{3}$, г. зн. $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

А д к а з: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

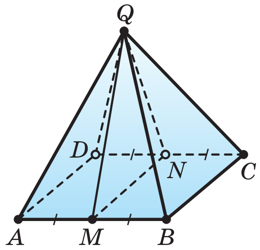
Дыяганаль куба дзеліцца плоскасцю трохвугольніка, старанамі якога служаць дыяганалі граняў куба, што маюць з разглядanай дыяганаллю куба агульны пункт, у адносіне 1 : 2.

г) Можна пабудаваць плоскасць, перпендыкулярную адной са скрыжаваных прамых, і пабудаваць праекцыю на яе другой прамой. Тады шуканая адлегласць будзе роўнай даўжыні перпендыкуляра, апушчанага з пункта, што з'яўляецца праекцыяй першай прамой на пабудаваную плоскасць, на праекцыю другой прамой.

Прыклад 4. У чатырохвугольнай пірамідзе $QABCD$ усе канты роўныя a. Знойдзем адлегласць паміж скрыжаванымі кантамі AB і QC (рыс. 255).

Р а ш э н н е. З тэарэмы **8** вынікае, што на прамых AB і QC ёсць такія пункты X і Y, што прамая XY перпендыкулярная як прамой AB, так і прамой QC, і, разам з гэтым, плоскасці, якая праходзіць праз адну з гэтых прамых паралельна другой.

Няхай α — плоскасць, якая праходзіць праз пункт Q перпендыкулярна прамой AB. Яна праходзіць праз сярэдзіны M і N кантаў AB і CD. Тады $XY \parallel \alpha$, і праекцыяй адрэзка XY на плоскасць α будзе адрэзак, роўны XY.



Рыс. 255

Вызначым, у якія пункты спраектуюцца пункты X і Y. Паколькі $AB \perp \alpha$, то ўся прамая AB праектуецца ў адзін пункт M. Значыць, пункт X праектуецца ў пункт M.

Паколькі пункты Q і C праектуюцца ў пункты Q і N адпаведна, то прамая QC праектуецца ў прамую QN. Улічым таксама, што прамая QN належыць плоскасці, паралельнай прамой AB. Таму шуканая праекцыя адрэзка XY ёсць перпендыкуляр да прамой QN, праведзены з пункта M.

Даўжыню d гэтага перпендыкуляра знойдзем, выкарыстаўшы плошчу раўнабедранага трохвугольніка QMN з асновай, роўнай a, і бакавымі старанамі, роўнымі $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Атрымаем $\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot d$, адкуль $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Адказ: $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

?

1. Які адрэзак называецца перпендыкулярам да плоскасці? Які пункт называецца асновай перпендыкуляра?

2. Які адрэзак называецца нахіленай да плоскасці? Які пункт называецца асновай нахіленай?

3. Сфармулюйце сцверджанне пра параўнанне даўжынь перпендыкуляра і нахіленай да плоскасці, праведзеных з аднаго пункта.

4. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?

5. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць ад любога пункта адной з паралельных плоскасцей да другой плоскасці.

6. Што называецца адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі?

7. Сфармулюйце сцверджанне пра адлегласць да плоскасці ад любога пункта прамой, паралельнай гэтай плоскасці.

8. Што называецца адлегласцю паміж прамой і паралельнай ёй плоскасцю?

9. Сфармулюйце сцверджанне пра агульны перпендыкуляр дзвюх скрыжаваных прамых.

10. Што называецца адлегласцю паміж скрыжаванымі прамымі?

11. Патлумачце, у чым адрозненне:

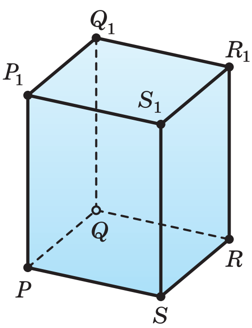
а) перпендыкуляра да плоскасці і прамой, перпендыкулярнай плоскасці;
б) нахіленай да плоскасці і прамой, што перасякае плоскасць.

12. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце праекцыю прамой:

а) PQ на плоскасць SS_1R;
б) PQ на плоскасць QQ_1R_1;
в) PQ_1 на плоскасць PQR.

13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 256). Назавіце адрэзак, даўжыня якога выражае адлегласць паміж пунктам P і прамой:

а) RS; в) RR_1;
б) P_1S_1; г) Q_1R_1.



Рыс. 256

Задача 1. Пункт M адлеглы на 40 см ад кожнай вяршыні правільнага трохвугольніка ABC са стараной 60 см. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да плоскасці ABC.

Р а ш э н н е. $MD \perp (ABC)$ і ABC — правільны трохвугольнік, таму D — цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка ABC, і AD — яе радыус (рыс. 257).

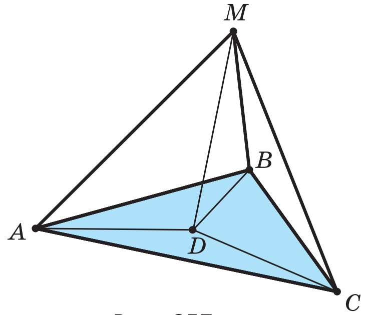
$AD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$ (см).

$MD \perp (ABC)$, таму $\triangle ADM$ — прамавугольны.

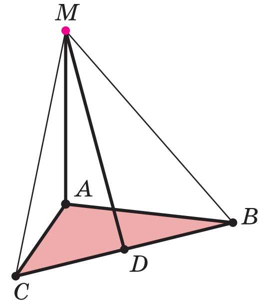
Тады

$$MD = \sqrt{AM^2 - AD^2} = \sqrt{40^2 - \left(20\sqrt{3}\right)^2} = 20 \text{ (см)}.$$

А д к а з: 20 см.



Рыс. 257



Рыс. 258

Задача 2. З вяршыні A раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC узведзены перпендыкуляр AM, і пункт M злучаны з сярэдзінай D гэтай асновы (рыс. 258). Дакажыце, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.

Р а ш э н н е. AM — перпендыкуляр да плоскасці ABC, таму AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC).

ABC — раўнабедраны трохвугольнік з асновай BC, таму $AB = AC$.

AB і AC — праекцыі нахіленых MB і MC на (ABC) і $AB = AC$, таму $MB = MC$.

$MB = MC$ і D — сярэдзіна BC, таму $MD \perp BC$.

248. З пункта A да плоскасці α праведзены чатыры роўныя нахіленыя AX, AY, AZ, AT. Ці будуць пункты X, Y, Z, T належаць адной акружнасці, цэнтрам якой з'яўляецца праекцыя O пункта A на плоскасць α?

249. З аднаго пункта праведзены да плоскасці перпендыкуляр і нахіленая, вугал паміж якімі роўны β. Знайдзіце:
а) нахіленую і яе праекцыю на гэту плоскасць, калі перпендыкуляр роўны d;
б) перпендыкуляр і праекцыю нахіленай, улічыўшы, што нахіленая роўная m.

250. Пункт K належыць прамой p, якая праходзіць праз вяршыню A прамавугольніка $ABCD$ і перпендыкулярная да яго плоскасці. Улічыўшы, што $KD = 6$ см, $KB = 7$ см, $KC = 9$ см, знайдзіце адлегласць:
а) ад пункта K да плоскасці прамавугольніка $ABCD$;
б*) паміж прамымі AK і CD.

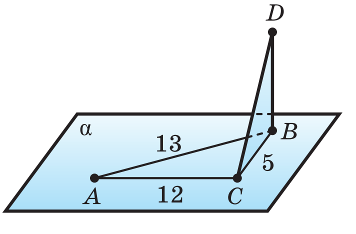
251. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 2 м кожная. Знайдзіце адлегласць ад пункта да плоскасці, улічыўшы, што нахіленыя ўтвараюць вугал у 60°, а іх праекцыі перпендыкулярныя.

252. Даўжыня перпендыкуляра PQ з пункта P да плоскасці роўная 1, а даўжыні нахіленых PA і PB да гэтай самай плоскасці роўныя 2. Пункт C — сярэдзіна адрэзка AB. Знайдзіце QC, улічыўшы, што:
а) $\angle APB = 90°$; б) $\angle APB = \beta$.

253. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя даўжынямі 10 см і 17 см, праекцыі якіх адрозніваюцца на 9 см. Знайдзіце гэтыя праекцыі.

254. З пункта да плоскасці праведзены дзве нахіленыя. Знайдзіце даўжыні нахіленых, улічыўшы, што:
а) адна з іх на 14 см большая за другую, а праекцыі нахіленых роўныя 16 см і 40 см;
б) нахіленыя адносяцца як 1 : 2, а праекцыі нахіленых роўныя 10 см і 70 см.

255. З вяршыні B тупога вугла паралелаграма $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BH. Знайдзіце стораны паралелаграма, улічыўшы, што $AH = 5$ см, $HD = HC = 8{,}5$ см, $AC = 1{,}5\sqrt{33}$ см.



Рыс. 259

256. З вяршыні B квадрата $ABCD$ да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр QB. Знайдзіце плошчу трохвугольніка QAD, улічыўшы, што $QB = 24$ см, $AB = 18$ см.

257*. Стораны AB, AC, BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 13, 12 і 5, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка (рыс. 259). Дакажыце, што прамыя CD і AC перпендыкулярныя.

258. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі плоскасцямі:

а) $PQRS$ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PP_1Q_1Q і SS_1R_1R;
в) PP_1S_1S і QQ_1R_1R.

259. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж паралельнымі прамой і плоскасцю:

а) PQ і $P_1Q_1R_1S_1$;
б) PQ_1 і SS_1R_1R;
в) PR і $P_1Q_1R_1S_1$.

260*. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (гл. рыс. 260). Назавіце адрэзкі, даўжыні якіх выражаюць адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі:

а) PQ і SS_1; б) PQ_1 і SS_1; в) PR і P_1S_1.

261*. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB (рыс. 261) і прамой:

а) B_1C_1; б) B_1D_1; в) A_1D_1; г) C_1D_1; д) F_1E_1; е) D_1F_1.

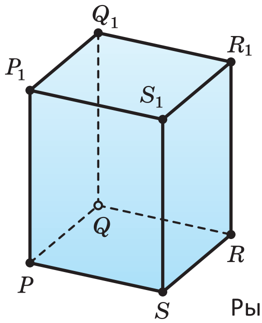
262. Канцы адрэзка даўжынёй 100 см належаць паралельным плоскасцям, адлеглым на 80 см. Знайдзіце праекцыі адрэзка на кожную плоскасць.

263. Ёсць дзве паралельныя плоскасці. З двух пунктаў адной з іх праведзены нахіленыя да другой плоскасці даўжынямі 37 см і 125 см, прычым праекцыя першай нахіленай на адну з плоскасцей роўная 12 см. Знайдзіце праекцыю другой нахіленай.

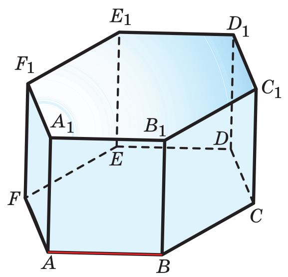
264. Адрэзак AD даўжынёй 12 см перпендыкулярны плоскасці раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай BC і бакавой стараной, роўнымі 6 см і 5 см адпаведна. Вызначце, на якіх адлегласцях ад прамой BC знаходзяцца канцы адрэзка AD.

265*. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой BC_1 (рыс. 262) і прамой:

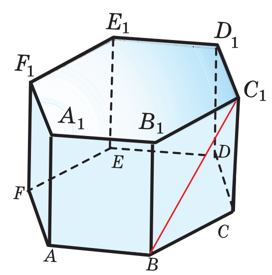
а) A_1D_1; б) F_1E_1; в) A_1F_1; г) A_1D; д) F_1E; е) A_1F.



Рыс. 260



Рыс. 261



Рыс. 262

266*. Кант куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўны a. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AB_1 і CD_1; б) AC і BB_1; в) A_1D і C_1A.

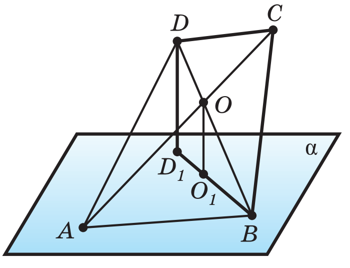
267. Праз вяршыню A трохвугольніка ABC паралельна прамой BC праведзена плоскасць γ, і з пунктаў B і C на плоскасць γ апушчаны перпендыкуляры BB_1 і CC_1. Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC, улічыўшы, што $\angle B_1AC_1 = 90°$, $AB_1 = 12$ см, $AC = 5\sqrt{2}$ см, а адлегласць паміж прамой BC і плоскасцю γ роўная 5 см.

268. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL, адлеглыя на a, а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C, адлеглы ад MN на b і ад KL на c. Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ, улічыўшы, што:

$a = 66$, $b = c = 65$.

269. Праз адну са старон ромба праведзена плоскасць, адлеглая ад супрацьлеглай стараны ромба на 8 см. Знайдзіце праекцыі старон ромба на гэту плоскасць, улічыўшы, што праекцыі дыяганалей на яе роўныя 16 см і 4 см.

270. Праз аснову AB трапецыі $ABCD$ праведзена плоскасць α, адлеглая ад другой асновы на m (рыс. 263). Знайдзіце адлегласць ад пункта O перасячэння дыяганалей трапецыі да плоскасці α, улічыўшы, што асновы трапецыі адносяцца як $p : q$.



Рыс. 263

271. Ёсць трохвугольная піраміда $PABC$, у якой $PA = PB = PC = 2$, $AC = 3$ і $AB = 2$. Нарысуйце і знайдзіце адлегласць ад вяршыні да асновы піраміды, улічыўшы, што кант BC роўны:

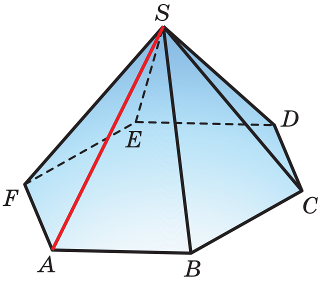
а) 2; б) 3; в) $\sqrt{5}$.

272*. Вымярэнні прамавугольнага паралелепіпеда роўныя a, b і c. Знайдзіце адлегласці паміж дыяганаллю паралелепіпеда і дыяганалямі яго граняў, якія гэта дыяганаль не перасякае.

273*. Пункт M — сярэдзіна канта AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі A_1M і B_1C, улічыўшы, што кант куба роўны a.

274*. У шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ усе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — $2a$ (рыс. 264). Знайдзіце адлегласці паміж бакавым кантам SA і кантамі асновы:

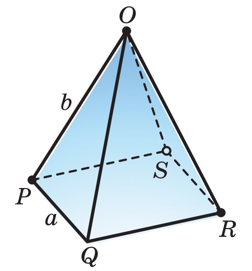
а) BF; б) CE; в) BE; г) BD.



Рыс. 264

275*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласць паміж кантамі, якія не належаць адной грані.

276*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b (рыс. 265). Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.



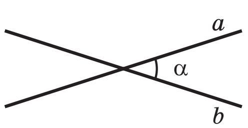
Рыс. 265

277*. Стораны AB, AC, BC трохвугольніка ABC адпаведна роўныя 17, 8 і 15, а адрэзак BD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Знайдзіце адлегласць ад канцоў BD да меншай стараны трохвугольніка, улічыўшы, што $BD = 36$.

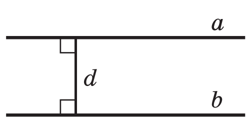
278*. Пункт M ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B ромба $ABCD$ і перпендыкулярная яго плоскасці. Знайдзіце адлегласці ад пункта M да прамых, якія змяшчаюць стораны ромба, улічыўшы, што $AB = 25$ см, $\angle BAD = 60°$, $BM = 12{,}5$ см.

§ 9. Вугал паміж прамой і плоскасцю

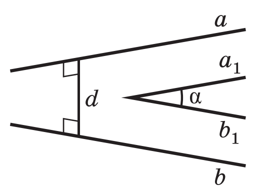
А) З дапамогай лікаў, што выражаюць адлегласць паміж дзвюма прамымі і велічыню вугла паміж імі, можна апісаць узаемнае размяшчэнне гэтых прамых у прасторы. Калі прамыя a і b перасякаюцца, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α паміж імі, адлегласць паміж такімі прамымі лічыцца роўнай нулю (рыс. 266). Калі прамыя a і b паралельныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе адлегласць d паміж імі, вугал паміж такімі прамымі роўны нулю (рыс. 267). Калі прамыя a і b скрыжаваныя, то іх узаемнае размяшчэнне характарызуе вугал α і адлегласць d паміж імі (рыс. 268).



Рыс. 266



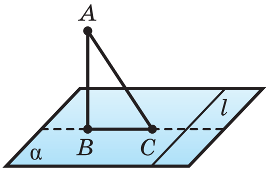
Рыс. 267



Рыс. 268

Т э а р э м а 9. Калі прамая плоскасці перпендыкулярная праекцыі нахіленай на гэту плоскасць, то яна перпендыкулярная і самой нахіленай, а калі прамая плоскасці перпендыкулярная нахіленай да плоскасці, то яна перпендыкулярная і праекцыі гэтай нахіленай.

Доказ. Няхай адрэзкі AB і AC — адпаведна перпендыкуляр і нахіленая да плоскасці α, тады адрэзак BC — праекцыя нахіленай AC на гэту плоскасць (рыс. 269).



Рыс. 269

Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная праекцыі BC. Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да самой нахіленай AC.

Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых BC і AB плоскасці ABC — да першай прамой па ўмове, а да другой з-за таго, што яна ляжыць у плоскасці α, да якой перпендыкулярная прамая AB. Таму прамая l перпендыкулярная і да прамой BC плоскасці ABC.

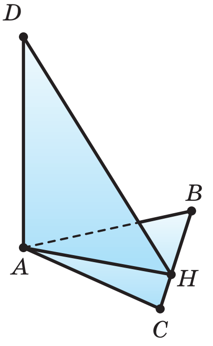
Няхай прамая l плоскасці α перпендыкулярная нахіленай AC. Дакажам, што прамая l перпендыкулярная да праекцыі BC гэтай нахіленай.

Прамая l перпендыкулярная да перасякальных прамых AC і AB плоскасці ABC. Таму яна перпендыкулярная і да прамой AC плоскасці ABC.

Тэарэма **9** называецца *тэарэмай пра тры перпендыкуляры* з-за таго, што ў ёй гаворыцца пра дачыненне перпендыкулярнасці паміж трыма прамымі. Прывядзём прыклады выкарыстання гэтай тэарэмы.

Прыклад 1. З вяршыні A да плоскасці трохвугольніка ABC, стораны якога AB, BC, CA адпаведна роўныя 13, 20, 11, узведзены перпендыкуляр AD даўжынёй 36 (рыс. 270). Знойдзем адлегласць ад пункта D да прамой BC.

Р а ш э н н е. Шуканая адлегласць ёсць даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта D на прамую BC. Правядзенне гэтага перпендыкуляра патрабуе знайсці яго аснову на прамой BC. Для гэтага ў плоскасці трохвугольніка ABC пабудуем вышыню AH гэтага трохвугольніка. Паколькі прамая BC перпендыкулярная вышыні AH, якая з'яўляецца праекцыяй нахіленай DH, то па тэарэме пра тры перпендыкуляры прамая BC перпендыкулярная нахіленай DH, г. зн. адрэзак DH выражае шуканую адлегласць.



Рыс. 270

Знойдзем спачатку вышыню AH трохвугольніка ABC. Па формуле Герона вызначым плошчу S гэтага трохвугольніка, што дазволіць знайсці і яго вышыню AH:

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(20 + 11 + 13) = 22;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{22(22-20)(22-11)(22-13)} = 66;$$

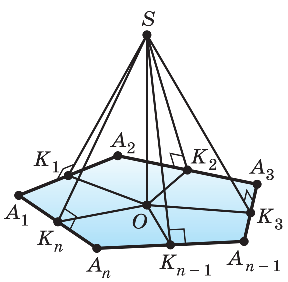
$$AH = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 66}{20} = 6{,}6.$$

Трохвугольнік DAH — прамавугольны з прамым вуглом A, па тэарэме Піфагора знойдзем DH: $DH = \sqrt{AD^2 + AH^2} = \sqrt{36^2 + 6{,}6^2} = 36{,}6$.

Адказ: 36,6.

Прыклад 2. Дакажам, што калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад старон многавугольніка, то ў гэты многавугольнік можна ўмежыць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка.

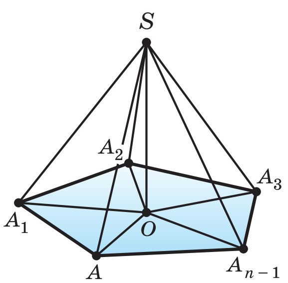
Доказ. Няхай пункт S роўнаадлеглы ад старон A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 многавугольніка $A_1A_2A_3$ ... $A_{n-1}A_n$ і SO — перпендыкуляр з пункта S на плоскасць гэтага многавугольніка. Тады перпендыкуляры SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, апушчаныя з пункта S на стораны многавугольніка, роўныя адзін аднаму (рыс. 271).



Рыс. 271

Злучым пункт O з пунктамі K_1, K_2, ... K_{n-1}, K_n. Паколькі адрэзкі OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n — праекцыі адрэзкаў SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n на плоскасць многавугольніка, стораны якога A_1A_2, A_2A_3, ... $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 адпаведна перпендыкулярныя нахіленым SK_1, SK_2, ... SK_{n-1}, SK_n, то гэтыя стораны і адпаведна адрэзкі OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n перпендыкулярныя.

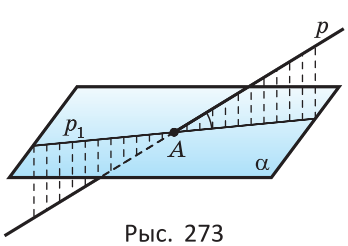
Трохвугольнікі SOK_1, SOK_2, ... SOK_{n-1}, SOK_n прамавугольныя, і ўсе яны маюць агульны катэт SO і роўныя гіпатэнузы. Таму гэтыя трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і адрэзкі OK_1, OK_2, ... OK_{n-1}, OK_n, што азначае роўнаадлегласць пункта O ад старон многавугольніка. Значыць, у гэты многавугольнік можна ўмежыць акружнасць з цэнтрам O.



Рыс. 272

Прыклад 3*. Калі дадзены пункт прасторы роўнаадлеглы ад вяршынь многавугольніка, то каля гэтага многавугольніка можна апісаць акружнасць, цэнтр якой супадае з асновай перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на плоскасць многавугольніка.

Выкарыстаўшы рысунак 272, правядзіце доказ гэтага сцверджання самастойна.



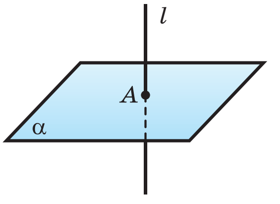
Рыс. 273

Б) Цяпер увядзём паняцце вугла паміж прамой і плоскасцю. Няхай ёсць плоскасць α і прамая p, якая яе перасякае і не перпендыкулярная α (рыс. 273). Асновы перпендыкуляраў, апушчаных з пунктаў прамой p на плоскасць α, утвараюць прамую p_1. Гэта прамая называецца *праекцыяй прамой p* на плоскасць α.

Вуглом паміж прамой і плоскасцю, што перасякае гэту прамую і не перпендыкулярная ёй, называецца вугал паміж прамой і яе праекцыяй на гэту плоскасць.

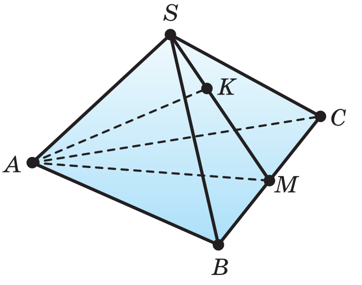
Вугал паміж прамой і плоскасцю — найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэта прамая з усімі прамымі плоскасці. Дакажыце сцверджанне самастойна.

Калі прамая l перпендыкулярная плоскасці α, то яе праекцыяй на гэту плоскасць з'яўляецца пункт A перасячэння прамой з плоскасцю (рыс. 274). У гэтым выпадку прамая l утварае з усімі прамымі плоскасці вуглы, роўныя 90°. Гэты вугал і прымаецца ў якасці вугла паміж прамой і перпендыкулярнай ёй плоскасцю.



Рыс. 274

Калі прамая l паралельная плоскасці α, то яе праекцыяй на плоскасць з'яўляецца прамая l_1, паралельная l. Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным 0°. Таму вугал паміж паралельнымі прамой і плоскасцю прымаецца роўным 0°.



Рыс. 275

Прыклад 4. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ канты асновы ABC роўныя 6, а бакавыя канты — 5. Знойдзем вугал паміж медыянай AM асновы і плоскасцю SBC.

Р а ш э н н е. Няхай AK — перпендыкуляр, апушчаны з пункта A на плоскасць SBC. Паколькі нахіленая AM перпендыкулярная прамой BC, то і яе праекцыя KM перпендыкулярная прамой BC. Значыць, пункт K знаходзіцца на пасярэднім перпендыкуляры да адрэзка BC (рыс. 275).

Шуканы вугал паміж медыянай AM асновы і плоскасцю SBC ёсць вугал AMK. Яго можна знайсці па тэарэме косінусаў, калі ведаць стораны трохвугольніка SAM. Знаходзім: $AM = 3\sqrt{3}$, $SM = \sqrt{SB^2 - BM^2} = 4$, тады

$$\cos SMA = \frac{SM^2 + AM^2 - SA^2}{2SM \cdot AM} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Значыць, $\angle SMA = \arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

А д к а з: $\arccos\frac{\sqrt{3}}{4}$.

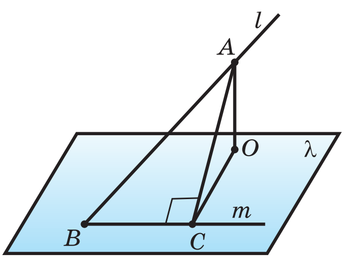
Пры вылічэнні вугла паміж скрыжаванымі прамымі бывае карыснай наступная *тэарэма пра тры косінусы*.

Вугал α паміж прамой l і плоскасцю λ, вугал β паміж іншай прамой m гэтай плоскасці і праекцыяй на яе прамой l і вугал γ паміж прамымі l і m звязаны роўнасцю $\cos\alpha \cos\beta = \cos\gamma$.

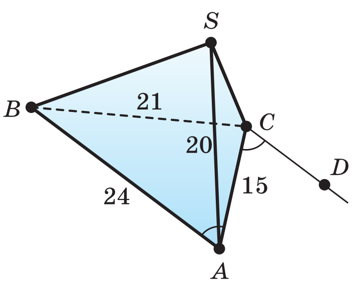
Д о к а з. Няхай пункт A належыць прамой l, B — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю λ, прамая m ляжыць у плоскасці λ і праходзіць праз пункт B, C — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на прамую m, O — праекцыя пункта A на плоскасць λ (рыс. 276).

Няхай $AB = a$ і $\angle ABO = \alpha$, $\angle OBC = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Паколькі OC — праекцыя AC і $AC \perp m$, то $OC \perp m$. Тады з прамавугольных трохвугольнікаў AOB, OCB і ACB маем:

$$BO = a\cos\alpha,$$
$$BC = BO\cos\beta = a\cos\alpha\cos\beta \text{ і}$$
$$\cos\gamma = BC : AB = \cos\alpha\cos\beta.$$



Рыс. 276



Рыс. 277

Прыклад 5. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ кант SA перпендыкулярны плоскасці ABC і роўны 20. Знойдзем вугал паміж прамымі SC і AB, улічыўшы, што $AB = 24$, $BC = 21$ і $AC = 15$.

Р а ш э н н е. Выкарыстаем тэарэму пра тры косінусы, улічыўшы, што вугал γ паміж прамымі SC і AB роўны вуглу паміж прамой SC і прамой CD, якая праходзіць праз пункт C паралельна AB (рыс. 277), і таму $\cos\gamma = \cos\angle SCA \cos\angle ACD = \cos\angle SCA \cos\angle BAC$.

Паколькі $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 25$ і $\cos\angle BAC = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB\cdot AC} = \dfrac{1}{2}$, то $\cos\angle SCA = \dfrac{3}{5}$ і $\cos\gamma = 0{,}3$. Значыць, $\gamma = \arccos 0{,}3$.

А д к а з: $\arccos 0{,}3$.

1. Сфармулюйце тэарэму пра тры перпендыкуляры.

2. Якую ўласцівасць мае многавугольнік, усе стораны якога роўнаадлеглыя ад пэўнага пункта прасторы?

3. Якую ўласцівасць мае многавугольнік, усе вяршыні якога роўнаадлеглыя ад пэўнага пункта прасторы?

4. Што называецца праекцыяй прамой на плоскасць?

5. Што называецца вуглом паміж прамой і плоскасцю?

6. Сувязь паміж якімі вугламі выражае тэарэма пра тры косінусы?

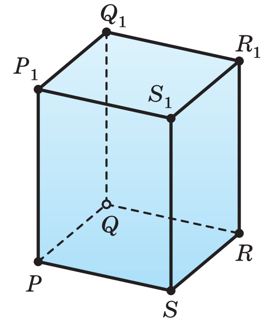
7. Вуглы BAC і ACB трохвугольніка ABC адпаведна роўныя $41°$ і $49°$, а адрэзак AD перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што прамыя BC і BD перпендыкулярныя?

8. Пункт X належыць прамой, якая праходзіць праз цэнтр O правільнага трохвугольніка ABC перпендыкулярна яго плоскасці. Ці праўдзяцца сцверджанні пра тое, што:

а) адлегласці ад пункта X да вяршынь трохвугольніка роўныя;
б) адлегласці ад пункта X да старон трохвугольніка роўныя;
в) $\angle AXO = \angle BXO = \angle CXO$;
г) $\angle XAO = \angle XBO = \angle XCO$?

9. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ (рыс. 278). Назавіце вугал паміж прамой:

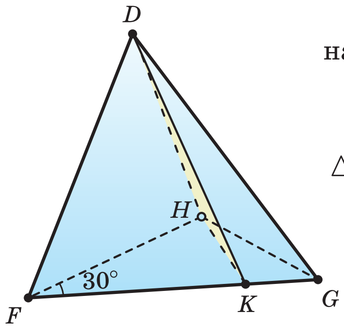
а) PQ і плоскасцю SS_1R;
б) PR_1 і плоскасцю PQ_1Q;
в) PQ і плоскасцю QQ_1R_1;
г) PR_1 і плоскасцю QRS;
д) PQ_1 і плоскасцю PQR;
е) PR_1 і плоскасцю QRR_1.



Рыс. 278

Задача 1. Асновай трохвугольнай піраміды $DFGH$ з'яўляецца прамавугольны трохвугольнік FHG з гіпатэнузай FG і вуглом HFG у $30°$ (рыс. 279). Знайдзіце вышыню DK грані FDG, праведзеную з вяршыні D, улічыўшы, што бакавы кант DH перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 4 см, а катэт FH складае 6 см.

Р а ш э н н е. $DH \perp (FGH)$, таму KH — праекцыя нахіленай DK на (FGH).



Рыс. 279

DK — вышыня грані FDG, KH — праекцыя нахіленай DK на (FGH), таму $KH \perp FG$.

$KH \perp FG$, $FH = 6$ см і $\angle HFK = 30°$, таму

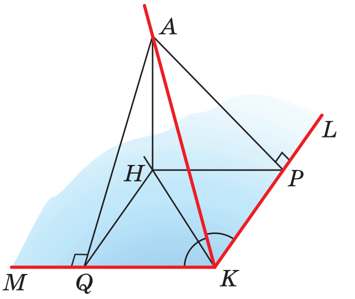
$\triangle FHK$ прамавугольны, $KH = \frac{1}{2}FH = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ (см).

$\triangle DHK$ — прамавугольны, таму

$$DK = \sqrt{DH^2 + KH^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ (см)}.$$

Адказ: 5 см.

Задача 2. Дакажыце, што калі прамень KA не ляжыць у плоскасці неразгорнутага вугла LKM і вострыя вуглы AKL і AKM роўныя, то праекцыя прамення KA на плоскасць LKM з'яўляецца бісектрысай вугла LKM (рыс. 280).



Рыс. 280

Рашэнне. Няхай $AH \perp (LKM)$, $AQ \perp KM$, $AP \perp KL$ і $\angle AKM = \angle AKL$.

$\triangle AQK = \triangle APK$ (па гіпатэнузе і вострым вугле), таму $AQ = AP$.

$HQ \perp KM$ (HQ — праекцыя AQ на (LKM) і $AQ \perp KM$).

$HP \perp KL$ (HP — праекцыя AL на (LKM) і $AP \perp KL$).

$HQ = HP$ (праекцыі роўных нахіленых).

KH — бісектрыса вугла LKM (пункт H роўнаадлеглы ад старон вугла LKM).

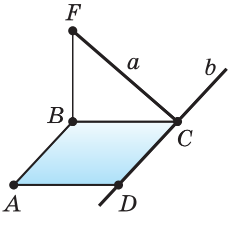
279. Укажыце ўзаемнае размяшчэнне прамых a і b на рысунку:

а) 281, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BF \perp ABC$;

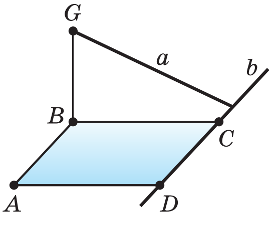
б) 282, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BG \perp ABC$;

в) 283, улічыўшы, што $ABCD$ — ромб і $AE \perp ABC$;

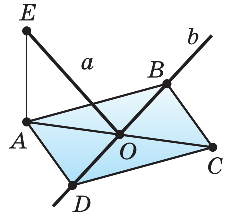
г) 284, улічыўшы, што $ABCD$ — квадрат і $BK \perp ABC$.



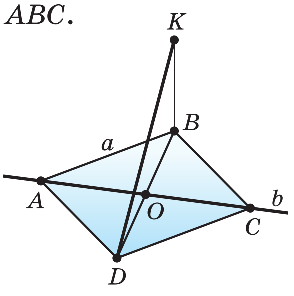
Рыс. 281



Рыс. 282



Рыс. 283



Рыс. 284

280. Пункт F ляжыць на прамой, якая праходзіць праз вяршыню B квадрата $ABCD$ перпендыкулярна яго плоскасці. Улічыўшы, што $BF = 8$ дм, $AB = 15$ дм, знайдзіце адлегласць ад пункта F да прамых, якім належаць:
а) стораны квадрата;
б) дыяганалі квадрата.

281. Улічыўшы, што пункт K ляжыць на прамой, якая праходзіць праз цэнтр O сіметрыі ромба $ABCD$ перпендыкулярна да яго плоскасці:
а) дакажыце роўнасць адлегласцей ад пункта K да ўсіх прамых, якім належаць стораны ромба;
б) знайдзіце гэту адлегласць, улічыўшы, што $OK = 45$ дм, $AC = 60$ дм, $BD = 80$ дм;
*в) знайдзіце гэту адлегласць, улічыўшы, што $AC = 2a$, $BD = 2b$, $KO = h$.

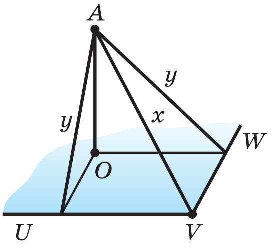
282. У раўнабедраным трохвугольніку XYZ з асновай XY бакавая старана роўная 20, а вугал пры аснове складае $30°$. З яго вяршыні Y да плоскасці XYZ узведзены перпендыкуляр QY. Улічыўшы, што $QY = 10$, знайдзіце адлегласці:
а) ад пункта Q да прамой XZ;
б) ад пункта Y да плоскасці XQZ.

283. Ёсць прамавугольны трохвугольнік XYZ з гіпатэнузай YZ і катэтам XY, адпаведна роўнымі 13 см і 12 см. Да плоскасці трохвугольніка з цэнтра Q умежанага ў яго круга ўзведзены перпендыкуляр QG даўжынёй 1,5 см. Знайдзіце адлегласці пункта G ад старон трохвугольніка і ад яго вяршынь.

284. Асновай чатырохвугольнай піраміды $QABCD$ з'яўляецца ромб $ABCD$ з вуглом ABC і стараной AB, адпаведна роўнымі $60°$ і a. Яе бакавы кант AQ перпендыкулярны плоскасці асновы. Знайдзіце гэты кант і адлегласці ад пункта A да плоскасці QDC, улічыўшы, што плошча грані QDC роўная a^2.

285. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце Q, прамая HQ перпендыкулярная плоскасці гэтага паралелаграма. Знайдзіце вышыні паралелаграма, улічыўшы, што яго стораны роўныя 20 см і 50 см, а адлегласці ад пункта H да старон паралелаграма роўныя 17 см і 25 см.

286. Пункт A, які ляжыць па-за плоскасцю прамога вугла UVW, адлеглы ад яго вяршыні V на x, а ад кожнай са старон — на y (рыс. 285). Знайдзіце адлегласць AO пункта A ад плоскасці прамога вугла.



Рыс. 285

287. Вяршыня піраміды, у аснове якой ляжыць прамавугольная трапецыя з перыметрам 32, знаходзіцца на адлегласці $\sqrt{17}$ ад кантаў асновы. Знайдзіце поўную паверхню піраміды, улічыўшы, што яе найбольшы і найменшы бакавыя канты роўныя $7\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$.

288*. З вяршыні M трохвугольніка MNK па-за яго плоскасцю праведзена прамая ML, якая ўтварае са старанамі MN і MK роўныя вострыя вуглы. Вызначце, на якія часткі праекцыя прамой ML на плоскасць трохвугольніка раздзяляе старану NK, улічыўшы, што $MN = 51$ м, $MK = 34$ м і $NK = 30$ м.

289. Ёсць куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:
а) AC і BB_1; б) AB_1 і CD_1; в) A_1D і C_1A.

290. З вяршыні B прамавугольніка $ABCD$, у якога $AB = 6$ см і $AD = 6\sqrt{2}$ см, да яго плоскасці ўзведзены перпендыкуляр BQ. Знайдзіце адлегласць ад пункта Q да плоскасці прамавугольніка, улічыўшы, што вугал паміж прамой QD і плоскасцю ABC роўны $30°$.

291. Знайдзіце праекцыю на плоскасць нахіленай даўжынёй m, улічыўшы, што нахіленая ўтварае з плоскасцю вугал, роўны:
а) $45°$; б) $60°$; в) $30°$.

292. Адрэзак даўжынёй 10 см перасякае плоскасць: канцы яго знаходзяцца на адлегласці 3 см і 2 см ад плоскасці. Знайдзіце вугал паміж гэтым адрэзкам і плоскасцю.

293. Дакажыце, што калі ў правільнай трохвугольнай піраміды старана асновы роўная адлегласці ад вяршыні да плоскасці асновы, то бакавыя канты нахілены да плоскасці асновы пад вугламі ў $60°$.

294. Вяршыня правільнай чатырохвугольнай піраміды адлеглая ад плоскасці асновы на h, а яе бакавыя канты ўтвараюць з плоскасцю асновы вуглы ў $60°$. Знайдзіце бакавую паверхню піраміды.

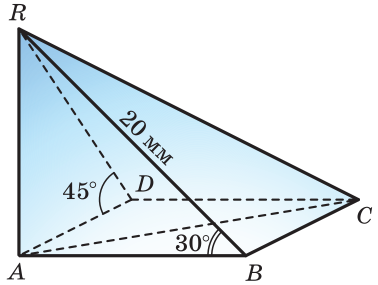
295. З пункта, адлеглага ад плоскасці на d, праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць паміж сабой вугал φ, а з плоскасцю — вуглы α і β. Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:
а) $\alpha = \beta = 45°$, $\varphi = 60°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

296. З пункта, адлеглага ад плоскасці на d, праведзены дзве нахіленыя, якія ўтвараюць з плоскасцю вуглы α і β, а вугал паміж іх праекцыямі роўны φ. Знайдзіце адлегласць паміж іх канцамі, улічыўшы, што:
а) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 150°$; б) $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, $\varphi = 90°$.

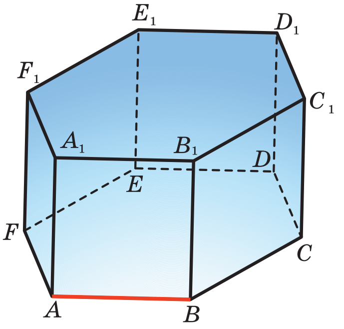
297. З пункта A, адлеглага на d ад плоскасці α, праведзены нахіленыя AB і AC пад вуглом $30°$ да плоскасці. Іх праекцыі на плоскасць α ўтвараюць вугал у $120°$. Знайдзіце даўжыню адрэзка BC.

298. Пункт P адлеглы на a ад кожнай вяршыні квадрата $ABCD$ са стараной a. Знайдзіце вугал, які ўтварае з плоскасцю квадрата прамая AP.

299. Бакавы кант RA чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца прамавугольнік $ABCD$, перпендыкулярны плоскасці асновы (рыс. 286). Знайдзіце радыус акружнасці, апісанай каля трохвугольніка RAC, улічыўшы, што кант RB роўны 20 мм, бакавыя канты RB і RD нахіленыя да плоскасці асновы пад вугламі 30° і 45° адпаведна.



Рыс. 286



Рыс. 287

300. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце вугал паміж прамой AB (рыс. 287) і прамой:

а) FF_1; б) CD; в) DE; г) A_1B_1; д) B_1E_1; е) A_1C_1.

301. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце вугал паміж прамой BC_1 і прамой:

а) B_1E; б) F_1C; в) B_1D; г) AC_1; д) A_1E; е) F_1D.

302. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ бакавы кант у $\sqrt{3}$ разоў большы за кант асновы. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і BD_1.

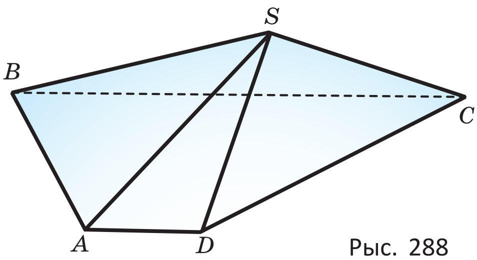
303. Праз сярэдзіну K канта AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена плоскасць, паралельная кантам AB і CD. Яна перасякае кант BC у пункце M. Улічыўшы, што $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD.

304. У трохвугольнай пірамідзе адлегласць паміж сярэдзінамі двух скрыжаваных кантаў роўная 13. Знайдзіце вугал паміж другой парай скрыжаваных кантаў, улічыўшы, што іх даўжыні 10 і 24.

305*. Дакажыце, што:

а) калі адзін катэт раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка належыць плоскасці, а другі ўтварае з ёю вугал у 45°, то гіпатэнуза ўтварае з плоскасцю вугал у 30°;

б) калі нахіленая a ўтварае з плоскасцю α вугал у 45°, а прамая b плоскасці — вугал у 45° з праекцыяй нахіленай, то вугал паміж прамымі a і b роўны 60°.



Рыс. 288

306*. Ёсць трохвугольная піраміда, усе канты якой роўныя адзін аднаму. Знайдзіце вугал паміж кантам піраміды і гранню, якой ён не належыць.

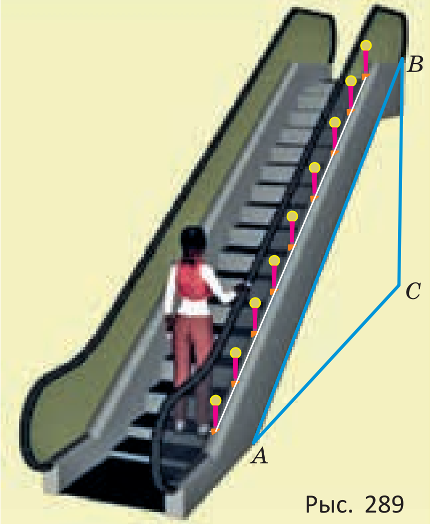
307*. З пункта Q да плоскасці α праведзены такія роўныя нахіленыя QA і QB, што вугал паміж імі роўны $60°$, а вугал паміж іх праекцыямі на плоскасць α складае $90°$. Знайдзіце вугал, які ўтварае нахіленая QA з плоскасцю α.

308*. У аснове піраміды $SABCD$ (рыс. 288) ляжыць трапецыя з асновамі AD і BC, $AD = 0{,}5\ AB$, $BC = 2\ AB$, $SA = \sqrt{3}\ AB$. Усе плоскія вуглы пры вяршыні A прамыя. Дакажыце, што сячэнне піраміды плоскасцю, якая праходзіць праз прамую AD і сярэдзіну M канта SC, — прамавугольнік, і знайдзіце вугал паміж прамымі AM і CD.

Прасторавае мадэляванне

Вызначым, як можна пры руху на эскалатары ацаніць глыбіню закладання станцыі метро, даўжыню эскалатара (рыс. 289).

Звернем увагу на тое, што пры спуску або пад'ёме па эскалатары мы праязджаем уздоўж шэрагу лямпаў, размешчаных на роўных адлегласцях адна ад адной. Нарматывамі задаецца асветленасць тунэлю, зыходзячы з якой устанаўліваецца і адлегласць паміж суседнімі лямпамі. Таксама ўлічым, што аптымальны вугал нахілу лініі эскалатара да плоскасці зямлі роўны $30°$.



Рыс. 289

Будзем разглядаць эскалатар як нахіленую да плоскасці зямлі. Тады глыбіню закладання станцыі можна інтэрпрэтаваць як даўжыню перпендыкуляра да плоскасці зямлі.

Для адказу на пытанне дастаткова разгледзець прамавугольны трохвугольнік ABC, у якім гіпатэнуза AB выяўляе эскалатар, а катэт BC — глыбіню закладання той станцыі метро, на якую вядзе гэты эскалатар.

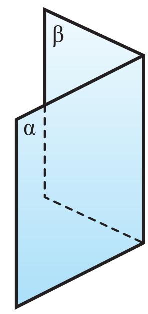
а) Падлічыце даўжыню эскалатара, улічыўшы, што адлегласць паміж лямпамі роўная a.

б) Складзіце формулу для знаходжання глыбіні закладання станцыі метро.

§ 10. Перпендыкулярнасць плоскасцей

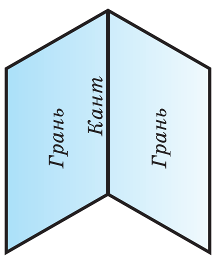
А) Два прамені на плоскасці з агульным пачаткам раздзяляюць гэту плоскасць на дзве часткі, кожная з якіх называецца *вуглом*.

Аналагічна дзве паўплоскасці з агульнай мяжой раздзяляюць прастору на дзве часткі (рыс. 290). Кожную з гэтых частак разам з паўплоскасцямі называюць **двухгранным вуглом**. Паўплоскасці, што абмяжоўваюць двухгранны вугал, называюць **гранямі** вугла, а агульную прамую — **кантам** двухграннага вугла (рыс. 291).

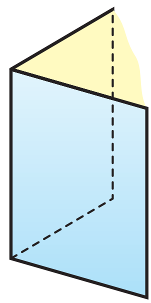


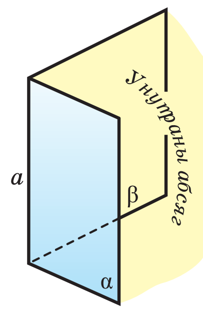
Рыс. 290

Звычайна разглядаюць меншы з двухгранных вуглоў з дадзенымі гранямі (рыс. 292). Пункты вугла, што не ляжаць на яго гранях, складаюць *унутраны абсяг* двухграннага вугла (рыс. 293).

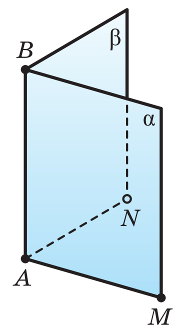


Рыс. 291


Рыс. 292



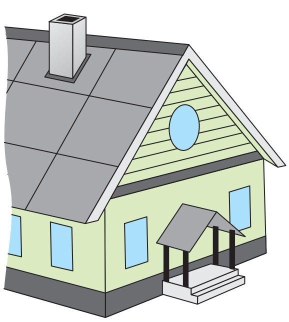
Рыс. 293

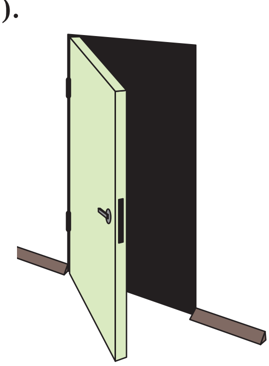


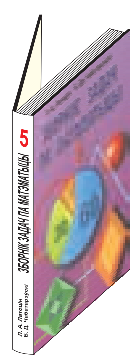
Рыс. 294

Двухгранны вугал звычайна абазначаюць па канце: $\angle\, a$ (гл. рыс. 293) або $\angle\, AB$ (рыс. 294). Пры неабходнасці можна далучыць назвы граняў або назвы пунктаў на гранях: $\angle\, \alpha a \beta$ (гл. рыс. 293), або $\angle\, \alpha AB\beta$ (гл. рыс. 294), або $\angle\, MABN$ (гл. рыс. 294).

Мадэллю двухграннага вугла можа служыць двухсхільны дах (рыс. 295), сцяна разам з адчыненымі дзвярыма (рыс. 296), напаўразгорнутая кніга (рыс. 297).

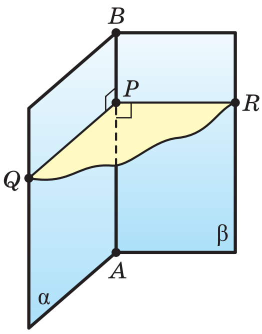

Рыс. 295


Рыс. 296



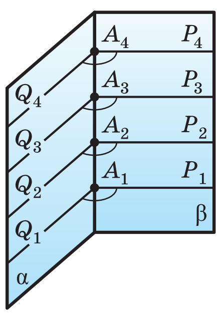
Рыс. 297

Для вымярэння двухгранных вуглоў уводзіцца паняцце лінейнага вугла. Выберам на канце AB двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ пункт P, і ў яго гранях α і β з гэтага пункта правядзём прамені PQ і PR, перпендыкулярныя канту AB (рыс. 298). Атрыманы вугал QPR, стораны якога PQ і PR абмяжоўваюць частку плоскасці PQR, што належыць двухграннаму вуглу $\alpha AB\beta$, называюць **лінейным вуглом** двухграннага вугла. Плоскасць лінейнага вугла перпендыкулярная да канта двухграннага вугла, бо па пабудаванні прамені PQ і PR перпендыкулярныя канту AB.



Рыс. 298

Зразумела, што двухгранны вугал мае бясконца многа лінейных вуглоў (рыс. 299).

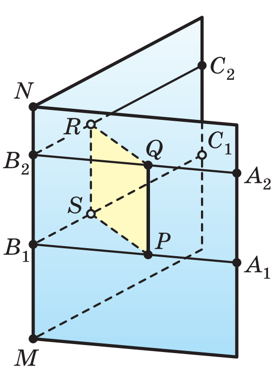


Рыс. 299

Т э а р э м а 10. Усе лінейныя вуглы двухграннага вугла роўныя адзін аднаму.

Доказ. Няхай $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ — лінейныя вуглы двухграннага вугла MN (рыс. 300). Дакажам, што $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$.

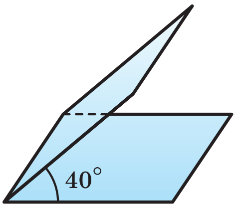
Адкладзём на старанах вуглоў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ роўныя адрэзкі B_1P, B_2Q, B_1S, B_2R. Тады атрымаюцца чатырохвугольнікі PQB_2B_1 і SRB_2B_1, у якіх супрацьлеглыя стораны PB_1 і QB_2, а таксама SB_1 і RB_2 роўныя па пабудаванні і паралельныя як перпендыкуляры да адной прамой, праведзеныя ў адпаведнай плоскасці. Таму $PQ = B_2B_1 = SR$ і $PQ \parallel B_2B_1 \parallel SR$. А гэта азначае, што чатырохвугольнік $PQRS$ з'яўляецца паралелаграмам, што дазваляе зрабіць вывад пра роўнасць адрэзкаў PS і QR. Атрымалі, што ў трохвугольнікаў PSB_1 і QRB_2 роўныя адпаведныя стораны, таму трохвугольнікі роўныя, а значыць, роўныя і іх вуглы $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$.



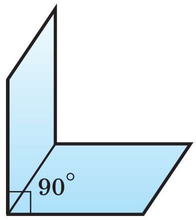
Рыс. 300

Вымярэнне двухгранных вуглоў звязваецца з вымярэннем іх лінейных вуглоў. У залежнасці ад таго, якім — вострым, прамым, тупым, разгорнутым — з'яўляецца лінейны вугал двухграннага вугла, адрозніваюць *вострыя, прамыя, тупыя, разгорнутыя двухгранныя вуглы*. Двухгранны вугал, адлюстраваны на рысунку 301, — востры, на рысунку 302 — прамы, на рысунку 303 — тупы.

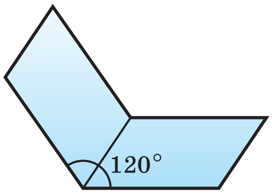
Дзве перасякальныя плоскасці раздзяляюць прастору на чатыры двухгранныя вуглы з агульным кантам (рыс. 304). Калі адзін з іх роўны α,



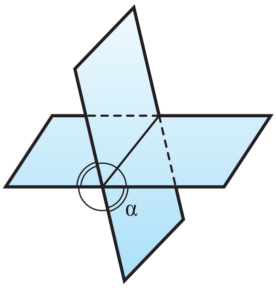
Рыс. 301



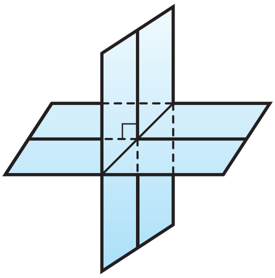
Рыс. 302



Рыс. 303



Рыс. 304



Рыс. 305

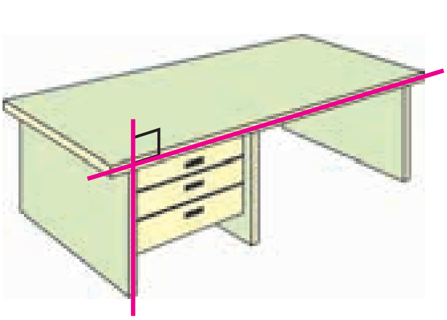
то яшчэ адзін з іх таксама роўны α, а два астатнія — 180° − α. Сярод гэтых вуглоў ёсць такі, які не перавышае 90°, яго велічыню і прымаюць за велічыню вугла паміж перасякальнымі плоскасцямі.

Калі адзін з двухгранных вуглоў, што ўзнікаюць пры перасячэнні дзвюх плоскасцей, прамы, то тры астатнія таксама прамыя (рыс. 305).

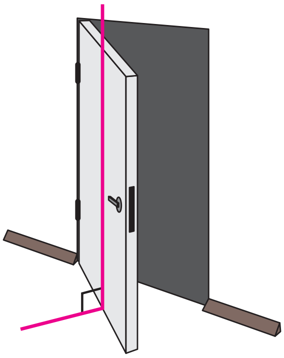
Б) Плоскасці, пры перасячэнні якіх утвараюцца прамыя двухгранныя вуглы, называюцца **перпендыкулярнымі плоскасцямі**.

Для абазначэння перпендыкулярнасці плоскасцей, як і для абазначэння перпендыкулярнасці прамых, выкарыстоўваюць знак ⊥.

Мадэлямі перпендыкулярных плоскасцей могуць служыць стальніца і бакавіна стала (рыс. 306), падлога пакоя і дзверы ў яго (рыс. 307).



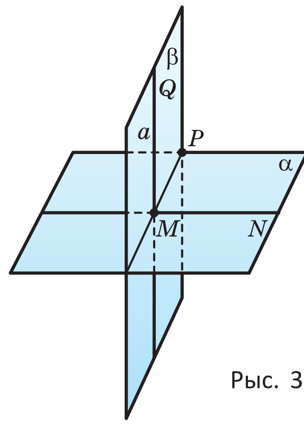
Рыс. 306



Рыс. 307

Т э а р э м а 11. Калі адна з дзвюх плоскасцей праходзіць праз прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то такія плоскасці перпендыкулярныя.

Доказ. Няхай праз прамую a, якая перпендыкулярная плоскасці α і перасякае яе ў пункце M, праходзіць плоскасць β (рыс. 308). Дакажам, што $\alpha \perp \beta$.



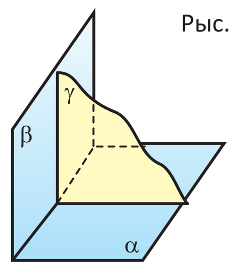
Рыс. 308

Плоскасці α і β перасякаюцца па пэўнай прамой MP, якая перпендыкулярная прамой a, бо па ўмове прамая a і плоскасць α перпендыкулярныя.

У плоскасці α правядзём прамую MN, перпендыкулярную прамой MP. Атрыманы вугал NMQ, дзе Q — пункт прамой a, ёсць лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha MP\beta$. Паколькі па ўмове $a \perp \alpha$, то вугал NMQ — прамы, і, значыць, плоскасці α і β перпендыкулярныя.

Тэарэма **11** выражае *прымету перпендыкулярнасці плоскасцей*.

Рыс. 309



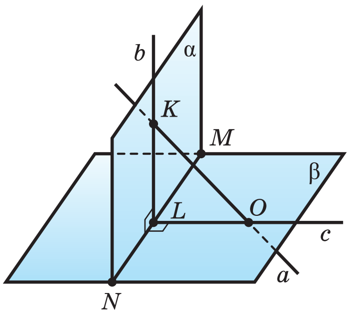
Вынік. Плоскасць, перпендыкулярная лініі перасячэння дзвюх дадзеных плоскасцей, перпендыкулярная да кожнай з іх (рыс. 309).

Дакажам цяпер сцверджанне, адваротнае сцверджанню тэарэмы **11**.

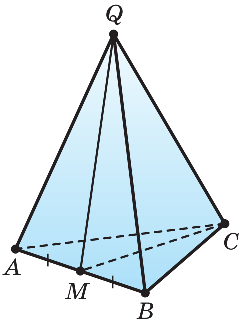
Т э а р э м а 12. Калі праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей правесці прамую, перпендыкулярную другой плоскасці, то гэта прамая належыць першай плоскасці.

Доказ. Няхай дзве перпендыкулярныя плоскасці α і β перасякаюцца па прамой MN, і праз пункт K плоскасці α праведзена прамая a, перпендыкулярная плоскасці β. Дакажам, што гэта прамая належыць плоскасці α.

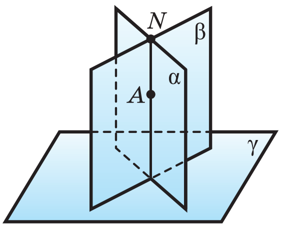
Праз пункт K у плоскасці α правядзём прамую b, перпендыкулярную MN, і праз пункт L іх перасячэння ў плоскасці β — прамую c, таксама перпендыкулярную MN (рыс. 310). Вугал паміж прамымі b і c прамы як лінейны вугал прамога двухграннага вугла. Атрымалі, што прамая b праходзіць праз пункт K і перпендыкулярная плоскасці β, бо яна перпендыкулярная перасякальным прамым MN і c гэтай плоскасці. А паколькі праз гэты пункт да дадзенай плоскасці можна правесці толькі адну перпендыкулярную прамую, то прамыя b і a супадаюць. Значыць, прамая a належыць плоскасці α.



Рыс. 310



Рыс. 311



Рыс. 312

Прыклад 1. Пункт M — сярэдзіна канта AB пры аснове правільнай піраміды $QABC$ (рыс. 311). Дакажам, што плоскасць QCM перпендыкулярная плоскасці асновы ABC.

Р а ш э н н е. Прамая AB з'яўляецца асновай раўнабедраных трохвугольнікаў AQB і ACB. Таму яна перпендыкулярная медыянам QM і CM гэтых трохвугольнікаў і разам з гэтым плоскасці QCM. З тэарэмы **12** вынікае, што плоскасць ABC, якая праходзіць праз перпендыкуляр AB да плоскасці QCM, ёй перпендыкулярная.

Вынік. Калі дзве перасякальныя плоскасці перпендыкулярныя трэцяй плоскасці, то іх лінія перасячэння перпендыкулярная той самай плоскасці (рыс. 312).

Прыклад 2. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны α. Знойдзем велічыню двухграннага вугла пры бакавым канце.

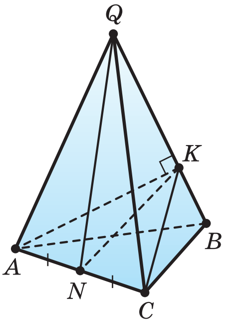
Р а ш э н н е. Няхай N — сярэдзіна канта AC, AK — перпендыкуляр да канта BQ, праведзены з пункта A (рыс. 313).

З роўнасці трохвугольнікаў ABQ і CBQ вынікае, што $CK \perp BQ$. Таму вугал AKC — лінейны вугал двухграннага вугла BQ.

З прамавугольных трохвугольнікаў AKQ і ANQ атрымліваем: $AK = AQ \sin\alpha$, $AN = AQ \sin \frac{\alpha}{2}$. З прамавугольнага трохвугольніка AKN знаходзім, што

$$\sin\left(\frac{\angle AKC}{2}\right) = \frac{AN}{AK} = \frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Таму $\angle AKC = 2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

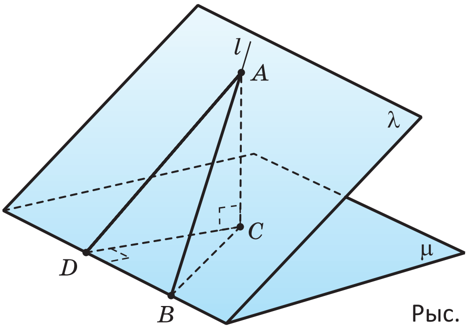


Рыс. 313

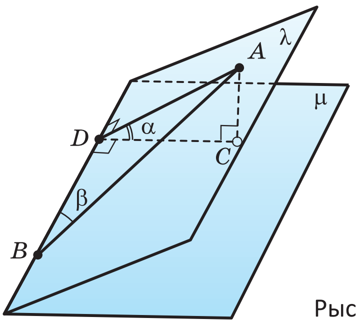
А д к а з: $2 \arcsin \dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

В) Пры вылічэннях бывае карысней наступная *тэарэма пра тры сінусы*.

Тэарэма 13. Лінейны вугал α двухграннага вугла, вугал β паміж кантам гэтага двухграннага вугла і прамой, што ляжыць у адной з яго граняў, і вугал γ паміж гэтай прамой і плоскасцю іншай грані звязаны роўнасцю $\sin\alpha \sin\beta = \sin\gamma$.



Рыс. 314

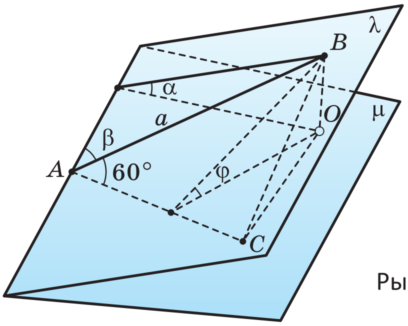


Рыс. 315

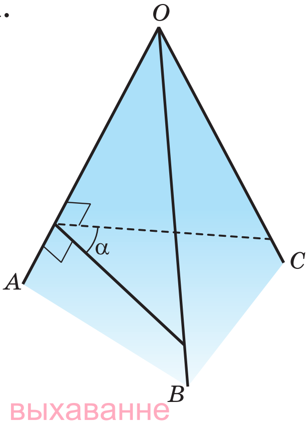
Доказ. Няхай прамая l ляжыць у плоскасці λ, пункт A належыць прамой l, B — пункт перасячэння прамой l з кантам двухграннага вугла $\lambda\mu$, C — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на грань μ, D — аснова перпендыкуляра, апушчанага з пункта A на кант вугла (рыс. 314). Няхай $AB = a$ і $\angle ADC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle ABC = \gamma$. Паколькі DC — праекцыя AD і $AD \perp BD$, то $DC \perp BD$. Тады з прамавугольных трохвугольнікаў ADB, ACD і ACB будзем мець: $AD = a\sin\beta$, $AC = AD \sin\alpha = a\sin\beta \sin\alpha$ і $\sin\gamma = AC : AB = \sin\alpha \sin\beta$.

Вынік 1. Калі пункт A ляжыць у грані λ двухграннага вугла велічынёй α, то адлегласць ад яго да плоскасці другой грані μ вугла роўная $AB \sin\alpha \sin\beta$, дзе B — пункт на канце двухграннага вугла, а β — вугал паміж прамой AB і кантам двухграннага вугла (рыс. 315).

Прыклад 3. Стораны AB і AC правільнага трохвугольніка ABC ляжаць адпаведна ў гранях λ і μ вострага двухграннага вугла велічынёй α. Старана AB утварае вугал β з кантам двухграннага вугла. Знойдзем велічыню вугла паміж плоскасцю ABC і плоскасцю μ.



Рыс. 316



Рыс. 317

Рашэнне. Няхай шуканы вугал роўны φ, старана трохвугольніка мае даўжыню a. Тады адлегласць BO ад пункта A да плоскасці μ можна знайсці двума спосабамі (рыс. 316): $BO = a\sin\alpha\sin\beta$ і $BO = a\sin\varphi\sin 60°$.

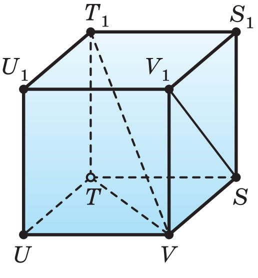
Таму $$\sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\alpha\sin\beta \text{ і } \varphi = \arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right).$$

Адказ: $\arcsin\left(\frac{2\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{3}}\right)$.

Вынік 2. Няхай прамені OA, OB і OC ёсць грані двухгранных вуглоў велічынёй α, β і γ адпаведна. Тады $\frac{\sin\alpha}{\sin BOC} = \frac{\sin\beta}{\sin AOC} = \frac{\sin\gamma}{\sin AOB}$ (рыс. 317).

?

1. Што называюць вуглом? Што называюць двухгранным вуглом?
2. Што называюць гранню двухграннага вугла; кантам двухграннага вугла? Як абазначаюць двухгранны вугал?
3. Як пабудаваць лінейны вугал двухграннага вугла? Якую ўласцівасць маюць лінейныя вуглы двухграннага вугла?
4. Які двухгранны вугал называюць вострым; прамым; тупым; разгорнутым?
5. Якія плоскасці называюцца перпендыкулярнымі?
6. Сфармулюйце прымету перпендыкулярнасці плоскасцей.
7. Сфармулюйце ўласцівасць плоскасці, перпендыкулярнай да лініі перасячэння дзвюх плоскасцей.
8. Сфармулюйце ўласцівасць прамой, праведзенай праз пункт адной з перпендыкулярных плоскасцей перпендыкулярна другой плоскасці.
9. Сфармулюйце ўласцівасць лініі перасячэння дзвюх плоскасцей, якія перпендыкулярныя трэцяй.
10. Сфармулюйце тэарэму пра тры сінусы.
11. Вынік 2 называюць яшчэ тэарэмай сінусаў для трохграннага вугла. Патлумачце чаму.
12. Колькі двухгранных вуглоў мае:
а) трохвугольная піраміда; б) паралелепіпед?
13. Ёсць прамавугольны паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назавіце лінейны вугал двухграннага вугла:
а) DD_1; б) A_1B_1.
14. Улічыўшы, што $STUVS_1T_1U_1V_1$ — куб (рыс. 318), вызначце:
а) ці з'яўляецца вугал TVT_1 лінейным вуглом двухграннага вугла T_1SVT;
б) ці з'яўляецца вугал T_1ST лінейным вуглом двухграннага вугла T_1SVT;
в) велічыню двухграннага вугла V_1UTS.



Рыс. 318

Задача 1. Плоскасці правільных трохвугольніка KMD і чатырохвугольніка $KMNP$ перпендыкулярныя (рыс. 319). Знайдзіце DN, улічыўшы, што $KM = a$.

Р а ш э н н е. $(KDM) \perp (KMN)$ і $MN \perp MK$, таму па тэарэме 12 $MN \perp (KDM)$.

$MN \perp MD$, таму $\triangle DMN$ — прамавугольны.

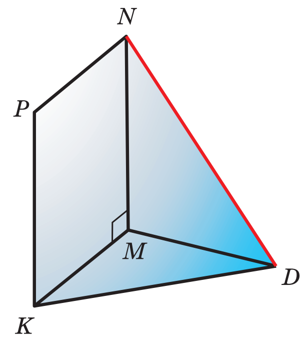
$MD = a$, бо $\triangle KDM$ — правільны і $KM = a$.

$MN = a$, бо чатырохвугольнік $KMNP$ — правільны і $KM = a$.

Тады па тэарэме Піфагора

$$DN = \sqrt{MD^2 + MN^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

А д к а з: $a\sqrt{2}$.



Рыс. 319

Задача 2. З пунктаў M і N канта двухграннага вугла ў розных яго гранях узведзены перпендыкуляры MK і NL (рыс. 320). Вызначце велічыню двухграннага вугла, улічыўшы, што $MN = 48$ см, $MK = 16$ см, $NL = 10$ см і адлегласць паміж пунктамі K і L роўная 50 см.

Р а ш э н н е. Няхай $NL \parallel MA$ і $NM \parallel LA$. Тады $MNLA$ — паралелаграм і $MA = NL = 10$ см, $AL = MN = 48$ см.

$MA \parallel NL$ і $NL \perp MN$, таму $MA \perp MN$.

$\angle KMA$ — лінейны вугал двухграннага вугла $KMNL$ ($MK \perp MN$ і $MA \perp MN$).

$MN \perp MK$ і $MN \perp MA$, таму $MN \perp (KMA)$.

$AL \parallel MN$ і $MN \perp (KMA)$, таму $AL \perp (KMA)$.

$AL \perp (KMA)$ і $AK \subset (KMA)$, таму $AL \perp AK$.

$AL \perp AK$, таму $\triangle KAL$ — прамавугольны.

Тады па тэарэме Піфагора

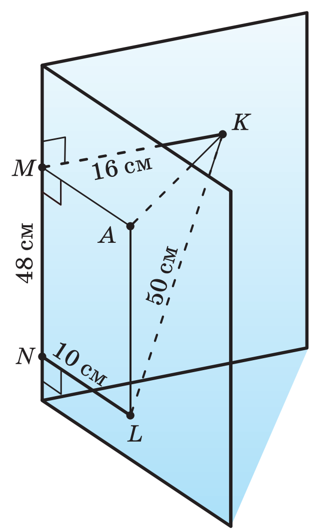
$$AK = \sqrt{KL^2 - AL^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14 \text{ (см)}.$$

З трохвугольніка MKA:

$$\cos \angle KMA = \frac{MK^2 + MA^2 - AK^2}{2MK \cdot MA} = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{1}{2}.$$

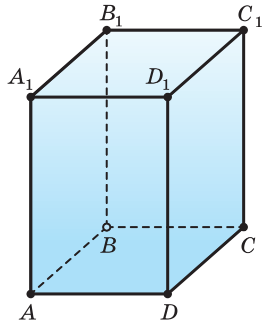
Таму $\angle KMA = 60°$.

А д к а з: 60°.



Рыс. 320

309. Ёсць прамы паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 321). Назавіце яго:
а) прамыя двухгранныя вуглы;
б) перпендыкулярныя грані.

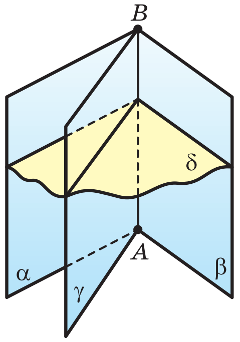


Рыс. 321

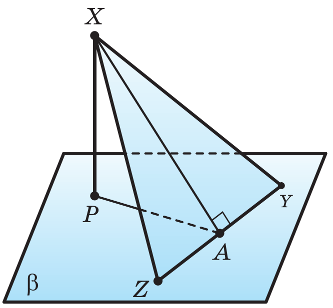
310. Улічыўшы, што пункт T ёсць сярэдзіна канта QR трохвугольнай піраміды $OPQR$, у якой асновай з'яўляецца правільны трохвугольнік PQR, а бакавыя канты роўныя адзін аднаму, вызначце, ці з'яўляецца вугал:
а) PRO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$;
б) PTO лінейным вуглом двухграннага вугла $PRQO$.

311. Ці праўдзіцца сцверджанне, што калі двухгранны вугал $\alpha AB\beta$ разбіць на два двухгранныя вуглы $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$ (рыс. 322), то лінейны вугал двухграннага вугла $\alpha AB\beta$ роўны суме лінейных вуглоў двухгранных вуглоў $\alpha AB\gamma$ і $\gamma AB\beta$?

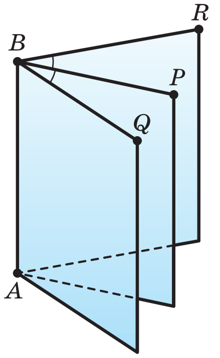
312. З вяршыні X трохвугольніка XYZ, старана YZ якога ляжыць у плоскасці β, праведзена вышыня XA і перпендыкуляр XP да плоскасці β (рыс. 323). Дакажыце, што вугал XAP — лінейны вугал двухграннага вугла $XYZP$.



Рыс. 322



Рыс. 323



Рыс. 324

313. На рысунку 324 двухгранныя вуглы $RABP$ і $PABQ$ роўныя. Дакажыце, што кожны пункт плоскасці ABP роўнаадлеглы ад плоскасцей ABR і ABQ.

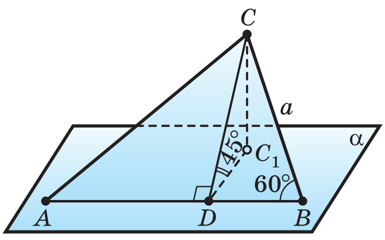
314. Ёсць два двухгранныя вуглы, у якіх адна грань агульная, а дзве іншыя грані разам складаюць плоскасць. Дакажыце, што сума гэтых двухгранных вуглоў роўная $180°$.

315. Усе канты трохвугольнай піраміды $ABCD$ роўныя адзін аднаму, а пункт M ёсць сярэдзіна канта AC. Дакажыце, што вугал DMB з'яўляецца лінейным вуглом двухграннага вугла $BACD$.

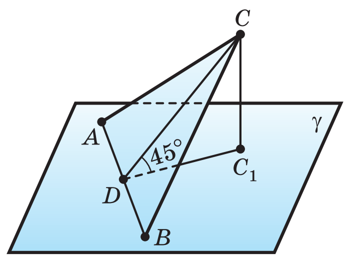
316. Два пункты адной грані двухграннага вугла адлеглыя ад яго канта на 51 см і 34 см, а першы з іх адлеглы ад другой грані на 15 см. Знайдзіце адлегласць да гэтай грані ад другога пункта.

317. На адной грані двухграннага вугла выбраны пункт X, адлеглы на 36 см ад канта вугла і на 24 см ад другой яго грані. На другой грані гэтага вугла выбраны пункт Y, адлеглы ад першай грані на 18 см. Знайдзіце адлегласць пункта Y ад канта вугла.

318. Плоскасць прамавугольнага трохвугольніка ABC нахілена да плоскасці α пад вуглом у 45° (рыс. 325). Знайдзіце адлегласць вяршыні прамога вугла C ад плоскасці α, улічыўшы, што $\angle ABC = 60°$, $BC = a$.



Рыс. 325



Рыс. 326

319. Праз гіпатэнузу AB раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка ABC пад вуглом у 45° да яго плоскасці праведзена плоскасць γ, адлеглая ад вяршыні прамога вугла C на l (рыс. 326). Знайдзіце плошчу трохвугольніка ABC.

320. Большы катэт прамавугольнага трохвугольніка з вострым вуглом і гіпатэнузай, адпаведна роўнымі 30° і c, ляжыць у плоскасці γ, якая з плоскасцю трохвугольніка складае вугал у 60°. Знайдзіце:
а) адлегласць ад вяршыні большага вострага вугла трохвугольніка да плоскасці γ;
б) вугал паміж гіпатэнузай і плоскасцю γ.

321. Знайдзіце адлегласць ад вяршыні прамога вугла прамавугольнага трохвугольніка з катэтамі, роўнымі 7 см і 24 см, да плоскасці, якая праходзіць праз гіпатэнузу і складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 30°.

322. Асновай прамой прызмы з'яўляецца трохвугольнік MNK, у якім $MN = NK = 25$ см, $MK = 14$ см. Праз старану MK праведзена плоскасць пад вуглом 30° да плоскасці асновы, якая перасякае супрацьлеглы бакавы кант у пункце L. Знайдзіце:
а) адрэзак NL бакавога канта;
б) плошчу атрыманага сячэння.

323. Праз старану CE трохвугольніка CDE, у якога $CD = 9$ м, $DE = 6$ м і $CE = 5$ м, праходзіць плоскасць ρ, якая складае з плоскасцю трохвугольніка вугал у 45°. Знайдзіце адлегласць да плоскасці ρ ад вяршыні D.

324. Кант CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярны плоскасці ABC, $AB = BC = AC = 6$ і $BD = 3\sqrt{7}$. Знайдзіце двухгранныя вуглы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

325. Знайдзіце двухгранны вугал $ABCD$ трохвугольнай піраміды $ABCD$, улічыўшы, што вуглы DAB, DAC і ACB прамыя, $AC = CB = 5$ і $DB = 5\sqrt{5}$.

326*. Праекцыяй прамавугольніка $ABCD$ на плоскасць ω з'яўляецца квадрат ABC_1D_1. Знайдзіце вугал паміж плоскасцю ω і плоскасцю прамавугольніка $ABCD$, улічыўшы, што $AB : BC = 1 : 2$.

327*. Паралельныя прамыя AB і CD ляжаць у розных гранях двухграннага вугла, роўнага 60°, а іх пункты A і D адлеглыя ад канта гэтага вугла адпаведна на 16 см і 13 см. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі AB і CD.

328. З пунктаў A і B канта двухграннага вугла, роўнага 120°, у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры AC і BD да канта. Знайдзіце адрэзак CD, улічыўшы, што $AB = AC = BD = a$.

329. Бакавыя канты трохвугольнай піраміды ўзаемна перпендыкулярныя, а іх даўжыня роўная l. Знайдзіце косінус вугла, утворанага плоскасцю бакавой грані з плоскасцю асновы.

330. З пунктаў C і D канта двухграннага вугла, роўнага 120°, у розных яго гранях узведзены перпендыкуляры CK і DL. Знайдзіце даўжыню адрэзка KL, улічыўшы, што $CK = 3$ см, $DL = 5$ см, $CD = 24$ см.

331. У розных гранях двухграннага вугла з пунктаў M і N яго канта да гэтага канта ўзведзены перпендыкуляры MA і NB. Вызначце адлегласць AB, улічыўшы, што:
а) двухгранны вугал прамы, $MN = 36$ см, $MA = 18$ см і $NB = 12$ см;
б) двухгранны вугал роўны 120°, $MN = 12$, $MA = 8$, $NB = 4$;
в) двухгранны вугал роўны 120°, $MN = MA = NB = x$.

332. Старана IJ трохвугольніка IJK, у якога $IJ = JK = 9$ см, $IK = 12$ см, ляжыць у плоскасці ρ, а праекцыі дзвюх іншых старон трохвугольніка на гэту плоскасць адносяцца як $1 : 2$. Вызначце велічыню двухграннага вугла, што ўтвораны плоскасцямі ρ і IJK.

333. Знайдзіце двухгранны вугал, утвораны дзвюма бакавымі гранямі чатырохвугольнай піраміды, асновай якой з'яўляецца квадрат са стараной $20\sqrt{3}$ см, а бакавыя канты роўныя 30 см кожны.

334*. Правільныя трохвугольнікі ABC і DBC размешчаны так, што вяршыня D праектуецца ў цэнтр трохвугольніка ABC. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі гэтых трохвугольнікаў.

335*. Адрэзак EL, які злучае вяршыню E трохвугольніка CDE з вяршыняй L трохвугольніка CDL, перпендыкулярны плоскасці гэтага трохвугольніка. Дакажыце, што плошча трохвугольніка CDE роўная $S \cdot \cos \varphi$, дзе S — плошча трохвугольніка CDL, φ — вугал паміж плоскасцямі CDL і CDE.

336*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай пірамiды.

337*. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай пірамiды.

338*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты роўныя. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай пірамiды.

339*. У чатырохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце двухгранныя вуглы гэтай пірамiды.

340. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што праз дадзены пункт можна правесці плоскасць, перпендыкулярную дадзенай плоскасці? Колькі існуе такіх плоскасцей?

341. Ці праўдзіцца сцверджанне пра тое, што плоскасць лінейнага вугла двухграннага вугла перпендыкулярная кожнай яго грані?

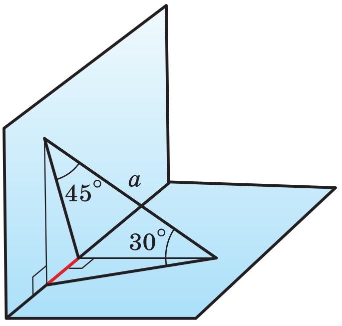
342. Прамая a не перпендыкулярная да плоскасці α. Дакажыце, што існуе плоскасць, якая змяшчае прамую a і перпендыкулярная плоскасці α.

343. Агульная старана AB трохвугольнікаў ABC і ABD роўная 10 см. Плоскасці гэтых трохвугольнікаў узаемна перпендыкулярны. Знайдзіце CD, улічыўшы, што трохвугольнікі:

а) роўнастароннія;

б) прамавугольныя раўнабедраныя з гіпатэнузай AB.

344. Адрэзак даўжынёй a з канцамі на дзвюх перпендыкулярных плоскасцях утварае з адной з іх вугал у 45°, а з другой — вугал у 30° (рыс. 327). Знайдзіце частку лініі перасячэння плоскасцей, заключаную паміж перпендыкулярамі, апушчанымі на яе з канцоў адрэзка.



Рыс. 327

345. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 12 дм, а ўсе бакавыя канты роўныя 24 дм. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да асновы. Знайдзіце плошчу сячэння.

Прасторавае мадэляванне

Асобным відам паралельнага праектавання, што прымяняецца ў геаметрыі для адлюстравання прасторавых фігур, з'яўляецца артаганальнае праектаванне.

Артаганальнай праекцыяй пункта на плоскасць α называецца пункт перасячэння з гэтай плоскасцю прамой, што праходзіць праз дадзены пункт перпендыкулярна плоскасці α.

Артаганальнай праекцыяй фігуры на плоскасць называецца мноства артаганальных праекцый усіх пунктаў гэтай фігуры на плоскасць.

а) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі трохвугольніка з плошчай S на плоскасць α, улічыўшы, што адна з яго старон ляжыць у плоскасці α, а вугал нахілу плоскасці трохвугольніка да плоскасці α роўны β $(0° < \beta < 90°)$ (рыс. 328).

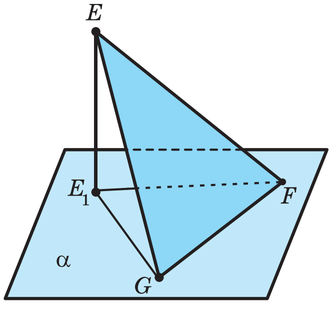
б) Рашыце папярэднюю задачу, улічыўшы, што трохвугольнік не мае з плоскасцю α агульных пунктаў і адна са старон трохвугольніка паралельная плоскасці α (рыс. 329).

в*) Знайдзіце плошчу артаганальнай праекцыі многавугольніка з плошчай S на плоскасць α, улічыўшы, што вугал нахілу плоскасці многавугольніка да плоскасці α роўны β $(0° < \beta < 90°)$.

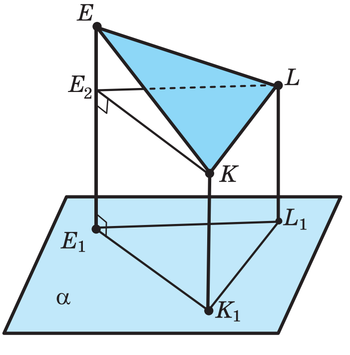
г*) Выкарыстаўшы вынікі рашэння задач *а–в*, дакажыце *прасторавую тэарэму Піфагора*: «Калі ўсе плоскія вуглы пры адной вяршыні тэтраэдра прамыя, то квадрат плошчы грані, супрацьлеглай гэтай вяршыні, роўны суме квадратаў плошчаў астатніх граняў» (рыс. 330).

Калі $AJIK$ — трохвугольная піраміда, $AJ \perp IJ$, $AJ \perp JK$ і $JI \perp KJ$,

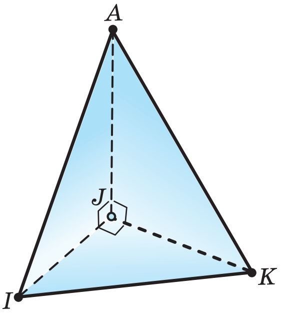
$$\text{то } S_{AIK}^2 = S_{AIJ}^2 + S_{AKJ}^2 + S_{IJK}^2.$$



Рыс. 328



Рыс. 329



Рыс. 330

Дадатковыя заданні да раздзела 3

346. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны іх сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце:

а) ці перпендыкулярныя прамыя UV і YX;

б) вугал паміж прамымі UV і AY.

347. Адрэзкі AE і CF — вышыні трохвугольніка ABC, а адрэзак DK — перпендыкуляр да плоскасці ABC. Дакажыце, што прамыя KD і AC перпендыкулярныя.

348. Канты BC і AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ перпендыкулярныя. Дакажыце, што кант AD перпендыкулярны адной з сярэдніх ліній грані ABC.

349. Два роўныя кругі маюць адзіны агульны пункт A, праз які праходзяць дыяметры AB і AC гэтых кругоў, прычым гэтыя дыяметры не ляжаць на адной прамой. Вызначце, ці перпендыкулярная плоскасці ABC лінія перасячэння плоскасцей, у якіх ляжаць гэтыя кругі. Ці зменіцца вынік, калі кругі не будуць роўнымі?

350. У якім выпадку праз адну з дзвюх скрыжаваных прамых можна правесці плоскасць, перпендыкулярную другой прамой?

351. Пункты A, B, C, D з'яўляюцца сярэдзінамі кантаў TZ, XY, YZ, Y_1Z_1 прамавугольнага паралелепіпеда $TXYZT_1X_1Y_1Z_1$, у аснове якога ляжыць квадрат. Вызначце:

а) ці перпендыкулярная прамая YA плоскасці сячэння XX_1DC;

б) ці перпендыкулярная прамая TB плоскасці XX_1D;

в) вугал паміж прамымі AY і XD.

352. Ёсць прамавугольны трохвугольнік ABC, адзін катэт якога і прылеглы да яго востры вугал роўныя m і β. З вяршыні прамога вугла C узведзены перпендыкуляр CD, роўны n. Знайдзіце адлегласць ад пункта D да прамой AB.

353. Канцы A і B адрэзкаў AA_1 і BB_1 належаць плоскасці α, а самі адрэзкі ёй перпендыкулярныя і размешчаны па адзін бок ад плоскасці. Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка AA_1B_1B, улічыўшы, што:

а) $AA_1 = BB_1$;

б) $A_1B_1 = 2\ AB$;

в) $A_1B_1 : AB = 3 : 2$.

354. Вымярэнні AB, BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AC і BB_1; б) A_1D і C_1A.

355. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце вугал паміж прамой AB і прамой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

356. З вяршыні A трохвугольніка ABC узведзены перпендыкуляр AM, і пункт M злучаны з сярэдзінай D стараны BC. Дакажыце, што:

а) прамыя MD і BC перпендыкулярныя, улічыўшы, што стораны AB і AC роўныя;

б) стораны AB і AC роўныя, улічыўшы, што прамыя MD і BC перпендыкулярныя.

357. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці γ. Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць γ, перпендыкулярная прамой AB.

358. Дакажыце, што вугал паміж прамой і плоскасцю ёсць найменшы з вуглоў, якія ўтварае гэта прамая з усімі прамымі плоскасці, што праходзяць праз пункт перасячэння прамой з плоскасцю.

359. Катэт AB прамавугольнага трохвугольніка ABC ляжыць у плоскасці α. Дакажыце, што плоскасць, якая праходзіць праз другі катэт і яго праекцыю на плоскасць α, перпендыкулярная прамой AB.

360. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:

а) CD; в) A_1B_1; д) FC;
б) DE; г) D_1E_1; е) F_1C_1.

361. Асновай прамавугольнага паралелепіпеда з'яўляецца прамавугольнік з вымярэннямі 5 см і 12 см, а дыяганаль паралелепіпеда роўная 13 см. Знайдзіце трэцяе вымярэнне паралелепіпеда.

362. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце адлегласці паміж прамой AB і прамой:

а) B_1C_1; в) A_1D_1; д) F_1E_1;
б) B_1D_1; г) C_1D_1; е) D_1F_1.

363. У правільнай трохвугольнай пірамідзе $QABC$ плоскі вугал AQB пры вяршыні роўны $30°$. Знайдзіце двухгранны вугал пры бакавым канце.

364. Плоскасці квадрата $KMNP$ і ромба $KMDF$ перпендыкулярныя. Знайдзіце FN, улічыўшы, што старана ромба і вугал KMD адпаведна роўныя a і $60°$.

365. Ёсць піраміда, у аснове якой ляжыць правільны шасцівугольнік са стараной 6 см, а ўсе бакавыя канты роўныя 12 см. Праз сярэдзіны дзвюх сумежных старон асновы праведзена плоскасць, перпендыкулярная да яе. Знайдзіце плошчу сячэння.

Праверце свае веды

1. Праекцыяй прамой на плоскасць можа быць:

а) пункт; б) прамая; в) адрэзак.

2. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце, ці перпендыкулярныя прамыя SA і UV.

3. Ёсць трохвугольная піраміда $SABC$, усе канты якой роўныя адзін аднаму. На кантах SC, SB, CB пазначаны сярэдзіны U, V, Y адпаведна, а на канце SA — адвольны пункт X. Вызначце вугал паміж прамымі UV і AY.

4. Вымярэнні AB, BC і CC_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB_1 і CD_1.

5. З цэнтра O акружнасці, умежанай у раўнабедраны трохвугольнік ABC з асновай BC і бакавой стараной AB, адпаведна роўнымі 18 см і 15 см, узведзены перпендыкуляр OX, роўны 6 см. Знайдзіце адлегласці пункта X ад старон трохвугольніка.

6. На плоскасці δ праведзены дзве паралельныя прамыя MN і KL, адлеглыя адна ад адной на a, а па-за плоскасцю δ выбраны пункт C, адлеглы ад MN на b і ад KL на c. Знайдзіце адлегласць ад пункта C да плоскасці δ, улічыўшы, што $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

7. З вяршыні большага вугла трохвугольніка са старанамі 20 см, 34 см і 42 см узведзены перпендыкуляр да плоскасці гэтага трохвугольніка даўжынёй 30 см. Знайдзіце адлегласць ад яго канцоў да большай стараны трохвугольніка.

8. Асновай піраміды служыць трохвугольнік са старанамі 13 см, 14 см, 15 см. Бакавы кант насупраць сярэдняй па велічыні стараны асновы перпендыкулярны плоскасці асновы і роўны 16 см. Знайдзіце велічыні двухгранных вуглоў пры аснове гэтай піраміды.

9. У трохвугольнай пірамідзе ўсе канты асновы роўныя a, а ўсе бакавыя канты — b. Знайдзіце адлегласць паміж бакавым кантам і кантам асновы, які не ляжыць з ім у адной плоскасці.

10. Перпендыкуляры, апушчаныя з пунктаў C і D, узятых у розных перпендыкулярных плоскасцях, на лінію іх перасячэння, адпаведна роўныя c і d, а адлегласць паміж іх асновамі роўная l. Знайдзіце адрэзак CD і яго праекцыі на кожную з плоскасцей.

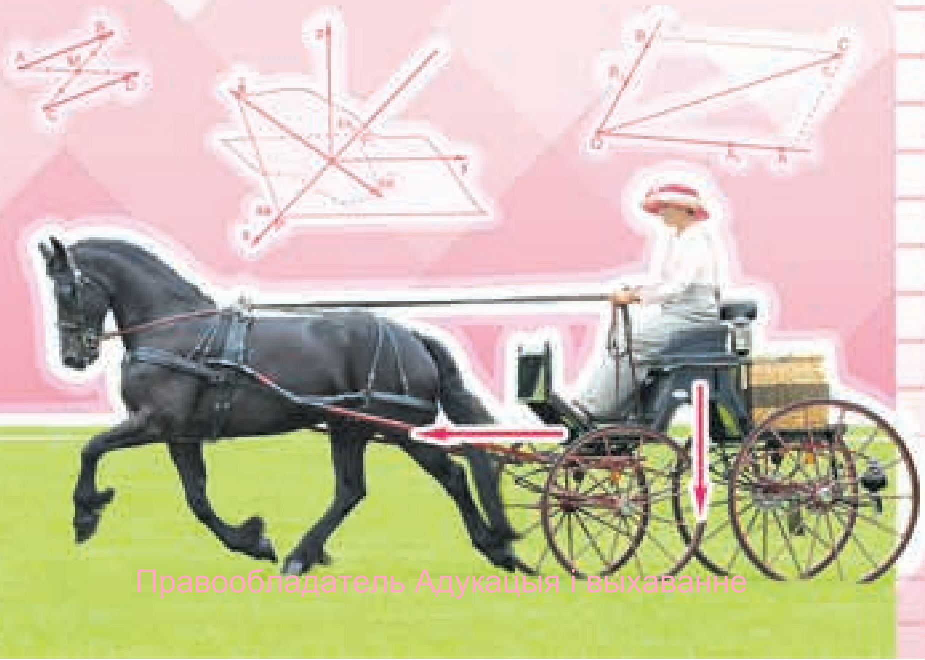
«...Розум заключаецца не толькі ў ведах, а і ва ўменні прымяняць веды ў справе...» (Арыстоцель).

РАЗДЗЕЛ

4 КААРДЫНАТЫ І ВЕКТАРЫ Ў ПРАСТОРЫ

У гэтым раздзеле вы даведаецеся:

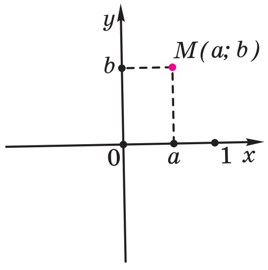
- пра каардынаты ў прасторы;
- пра вектары і дзеянні над імі;
- пра выкарыстанне вектараў і каардынат.



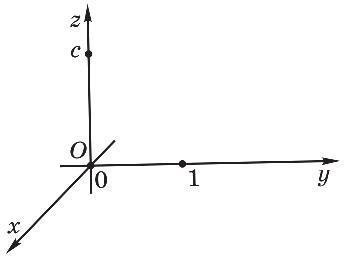
§ 11. Каардынаты ў прасторы

А) Сістэма каардынат на плоскасці дазваляе ўстанавіць узаемна адназначную адпаведнасць паміж пунктамі плоскасці і ўпарадкаванымі парамі лікаў (рыс. 331). Каардынаты вы шырока выкарыстоўвалі для графічнага выяўлення залежнасцей, пры рашэнні сістэм ураўненняў, а таксама ў геаметрыі, каб геаметрычную задачу звесці да задачы алгебраічнай.

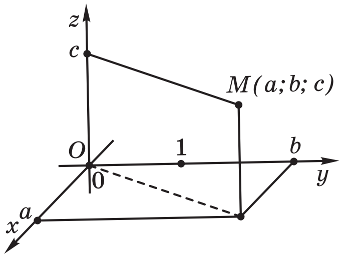
Каб увесці дэкартаву сістэму каардынат у прасторы, выберам пункт O, які будзе лічыцца пачаткам сістэмы каардынат, і тры папарна перпендыкулярныя прамыя. Кожную з гэтых прамых зробім воссю, г. зн. на іх адзначым роўныя адзінкавыя адрэзкі OA, OB, OC. Першую вось называюць воссю абсцыс і абазначаюць Ox, другую вось — воссю ардынат і абазначаюць Oy, а трэцюю вось называюць воссю аплікат і абазначаюць Oz (рыс. 332). Цяпер кожнаму пункту M прасторы можна паставіць у адпаведнасць упарадкаваную тройку лікаў $(x; y; z)$ — каардынаты гэтага пункта. Тут x — каардыната на восі Ox пункта перасячэння з гэтай воссю плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Ox, y — каардыната на восі Oy пункта перасячэння з гэтай воссю плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Oy, і z — каардыната пункта перасячэння з воссю Oz плоскасці, якая праходзіць праз пункт M перпендыкулярна восі Oz. Запіс $M(a; b; c)$ азначае, што пункт M мае каардынаты $(a; b; c)$. Зразумела, што кожнай упарадкаванай тройцы лікаў $(a; b; c)$ у прасторы адпавядае пэўны пункт (рыс. 333).



Рыс. 331



Рыс. 332



Рыс. 333

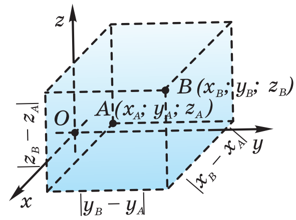
Б) Вы ведаеце, што па каардынатах канцоў $A(x_A; y_A)$ і $B(x_B; y_B)$ адрэзка AB на плоскасці можна вызначыць яго даўжыню:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Аналагічная формула выражае даўжыню адрэзка AB прасторы праз каардынаты яго канцоў $A(x_A; y_A; z_A)$ і $B(x_B; y_B; z_B)$:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Каб даказаць гэту формулу, разгледзім плоскасці, якія праходзяць праз пункты A і B перпендыкулярна каардынатным восям. Атрымаем, што адрэзак AB ёсць па сутнасці дыяганаль прамавугольнага паралелепіпеда, канты якога паралельныя каардынатным восям і маюць даўжыні $|x_B - x_A|$, $|y_B - y_A|$ і $|z_B - z_A|$ (рыс. 334) (калі ж якія-небудзь з праведзеных плоскасцей супадуць, то паралелепіпед пераўтворыцца ў прамавугольнік або ў адрэзак).



Рыс. 334

Раней вы даказвалі, што каардынаты сярэдзіны адрэзка ёсць сярэднія арыфметычныя адпаведных каардынат яго канцоў. Гэта сцверджанне застаецца праўдзівым і ў выпадку прасторы (гл. прыклад 2 у § 6): калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ і пункт $C(x_C; y_C; z_C)$ — сярэдзіна адрэзка AB, то:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2},\ \ y_C = \frac{y_A + y_B}{2},\ \ z_C = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Прыклад 1. На восі ардынат знойдзем пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $P(7; -1; 5)$ і $K(-1; 4; -3)$.

Р а ш э н н е. Няхай M — шуканы пункт. Тады $M(0; y; 0)$ і, паколькі $MP = MK$, то

$$\sqrt{(7-0)^2 + (-1-y)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (4-y)^2 + (-3-0)^2},$$

або $74 + (1 + y)^2 = 10 + (4 - y)^2$. Адсюль $y = -4{,}9$.

А д к а з: $M(0; -4{,}9; 0)$.

Прыклад 2. Знойдзем умову, што задае геаметрычнае месца пунктаў, якія роўнаадлеглыя ад пачатку каардынат і ад пункта $A(a; b; c)$.

Р а ш э н н е. Паводле геаметрычных меркаванняў шуканае мноства складаецца з усіх тых пунктаў, якія размешчаны на пасярэдніх перпендыкулярах да адрэзка OA. Такія пункты запаўняюць плоскасць, якая праходзіць праз сярэдзіну адрэзка OA і перпендыкулярная да яго. Знойдзем умову, якую праўдзяць каардынаты $(x; y; z)$ адвольнага пункта M гэтай плоскасці. Умова $OM = AM$ азначае, што

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2, \text{ або}$$
$$2(ax + by + cz) = a^2 + b^2 + c^2.$$

А д к а з. Шуканае геаметрычнае месца пунктаў ёсць плоскасць, якая задаецца ўраўненнем $ax + by + cz = 0{,}5(a^2 + b^2 + c^2)$.

Прыклад 3. Знойдзем умову, якую праўдзяць каардынаты пунктаў плоскасці α, што праходзіць праз пункт $A(3; 1; -2)$ перпендыкулярна прамой AB, дзе $B(2; 3; 4)$.

Р а ш э н н е. Няхай $M(x;\ y;\ z)$ — адвольны пункт плоскасці α. Тады з прамавугольнага трохвугольніка ABM па тэарэме Піфагора маем: $BM^2 = AB^2 + AM^2$.

Паколькі $BM^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2$,

$$AB^2 = (2-3)^2 + (3-1)^2 + (4+2)^2 = 41,\ AM^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2,$$

$$\text{то } (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 + 41,$$

або $x - 2y - 6z - 13 = 0$.

А д к а з: $x - 2y - 6z - 13 = 0$.

?

1. Як задаюць прамавугольную дэкартаву сістэму каардынат на плоскасці; у прасторы?

2. Як абазначаюць каардынатныя восі дэкартавай сістэмы каардынат у прасторы? Як іх называюць?

3. Як у выбранай дэкартавай сістэме каардынат знайсці абсцысу пэўнага пункта прасторы; ардынату; аплікату?

4. Як знайсці пункт прасторы, які ў выбранай дэкартавай сістэме каардынат мае каардынаты $(a;\ b;\ c)$?

5. Дзе размяшчаецца пункт $M(a;\ 0;\ 0)$, пункт $K(0;\ b;\ 0)$, пункт $P(0;\ 0;\ c)$?

6. Дзе размяшчаецца пункт $A(a;\ b;\ 0)$, пункт $B(0;\ b;\ c)$, пункт $C(a;\ 0;\ c)$?

7. Як знайсці адлегласць паміж пунктамі, калі вядомыя іх каардынаты?

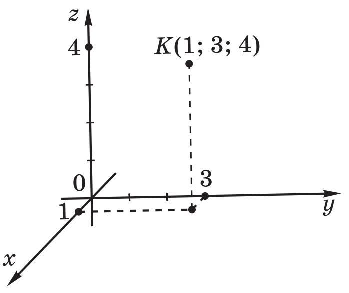
8. Як знайсці каардынаты сярэдзіны адрэзка, калі вядомыя каардынаты яго канцоў?

366. Куб з кантам a размешчаны так, што тры яго канты знаходзяцца на восях каардынат. Знайдзіце каардынаты яго вяршынь, улічыўшы, што:

а) яны ўсе неадмоўныя;
б) яны ўсе недадатныя;
в) абсцысы і ардынаты неадмоўныя, а аплікаты недадатныя;
г) абсцысы і ардынаты недадатныя, а аплікаты неадмоўныя;
д) абсцысы і аплікаты неадмоўныя, а ардынаты недадатныя;
е) абсцысы і аплікаты недадатныя, а ардынаты неадмоўныя;
ж) ардынаты і аплікаты неадмоўныя, а абсцысы недадатныя;
з) ардынаты і аплікаты недадатныя, а абсцысы неадмоўныя.

367. На рысунку 335 пададзена дэкартава сістэма каардынат у прасторы і паказаны пункт $K(1;\ 3;\ 4)$. У сшытку зрабіце падобную выяву дэкартавай сістэмы каардынат у прасторы і пакажыце пункт:

а) $A(3;\ 1;\ 2)$; в) $C(1;\ -1;\ 2)$;
б) $B(-1;\ 2;\ 1)$; г) $M(-1;\ 3;\ -2)$.



Рыс. 335

368. У прасторы адзначаны пункты $A(-2;\ 4;\ 3)$ і $B(a;\ b;\ c)$. Знайдзіце каардынаты праекцыі гэтых пунктаў:

а) на вось абсцыс; г) на плоскасць xOy;
б) на вось ардынат; д) на плоскасць yOz.
в) на вось аплікат; е) на плоскасць xOz.

369. У прасторы адзначаны пункты $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(3;\ 1;\ -5)$ і $C(4;\ 3;\ 1)$. Знайдзіце каардынаты такога пункта D, што паралелаграмам з'яўляецца чатырохвугольнік:

а) $ABCD$; б) $ABDC$; в) $ADBC$.

370. Вызначце, ці з'яўляецца паралелаграмам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:

а) $A(-1;\ 3;\ -4)$, $B(-2;\ 3;\ 4)$, $C(-5;\ 3;\ -2)$, $D(-4;\ 3;\ -10)$;
б) $A(1;\ -2;\ -3)$, $B(-3;\ 2;\ 1)$, $C(-5;\ 4;\ 3)$, $D(-1;\ 3;\ -1)$;
в) $A(-1;\ 2;\ -3)$, $B(-2;\ 3;\ -4)$, $C(5;\ -2;\ -2)$, $D(4;\ -1;\ -3)$.

371. Вызначце, ці з'яўляецца прамавугольнікам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:

а) $A(-3;\ -1;\ 10)$, $B(-10;\ -8;\ -2)$, $C(7;\ -1;\ -14)$, $D(2;\ 6;\ 14)$;
б) $A(-3;\ -1;\ 10)$, $B(2;\ 6;\ 14)$, $C(7;\ -1;\ -14)$, $D(2;\ -8;\ -16)$;
в) $A(7;\ -1;\ 14)$, $B(-10;\ -3;\ -10)$, $C(-3;\ -1;\ 10)$, $D(14;\ -5;\ 6)$.

372. Вызначце, ці з'яўляецца ромбам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:

а) $A(4;\ 2;\ 1)$, $B(3;\ 6;\ 7)$, $C(0;\ 2;\ 5)$, $D(5;\ 6;\ 4)$;
б) $A(-1;\ 2;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 5)$, $C(5;\ 6;\ 4)$ $D(4;\ 2;\ 1)$;
в) $A(6;\ 5;\ 4)$, $B(-2;\ 3;\ -4)$, $C(4;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 0)$.

373. Вызначце, ці з'яўляецца квадратам чатырохвугольнік $ABCD$, калі:

а) $A(4;\ 1;\ 3)$, $B(3;\ 2;\ 5)$, $C(6;\ 5;\ 5)$, $D(7;\ 4;\ 3)$;
б) $A(6;\ -1;\ 4)$, $B(5;\ 1;\ 5)$, $C(-2;\ -1;\ -2)$, $D(-1;\ -11;\ 7)$;
в) $A(-50;\ -1;\ 40)$, $B(-13;\ -11;\ -19)$, $C(54;\ -1;\ -38)$, $D(17;\ 9;\ 21)$.

374. У прасторы адзначаны пункты $A(2;\ -1;\ 3)$ і $B(a;\ b;\ c)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў, сіметрычных дадзеным адносна:

а) пачатку сістэмы каардынат; д) восі аплікат;
б) пункта $M(-1;\ 3;\ -2)$; е) плоскасці xOy;
в) восі абсцыс; ж) плоскасці xOz;
г) восі ардынат; з) плоскасці yOz.

375. Знайдзіце адлегласць ад пункта $A(3; -1; 4)$:

а) да пачатку сістэмы каардынат;
б) да пункта $M(-1; -4; -8)$;
в) да восі абсцыс;
г) да восі ардынат;
д) да восі аплікат;
е) да плоскасці xOy;
ж) да плоскасці xOz;
з) да плоскасці yOz.

376. Знайдзіце пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $A(3; -2; 5)$ і $B(-1; 4; -3)$, які размешчаны:

а) на восі абсцыс; б) на восі аплікат.

377. Знайдзіце пункт, роўнаадлеглы ад пунктаў $A(2; -3; 3)$ і $B(-2; 3; 3)$, які размешчаны:

а) на восі абсцыс; б) на восі ардынат.

378. Знайдзіце пункт, адлегласць ад якога да пункта $M(-2; 3; 5)$ удвая меншая за адлегласць да пункта $K(4; -10; -4)$, улічыўшы, што ён размешчаны:

а) на восі абсцыс; б) на восі ардынат; в) на восі аплікат.

379. Прамая праходзіць праз пачатак сістэмы каардынат і пункт $C(4; -3; 12)$. Знайдзіце вуглы, што ўтварае гэта прамая:

а) з воссю абсцыс;
б) з воссю ардынат;
в) з воссю аплікат;
г) з плоскасцю xOy;
д) з плоскасцю xOz.
е) з плоскасцю yOz.

380. Прамая праходзіць праз пункты $B(8; -3; 7)$ і $C(5; 1; 7)$. Знайдзіце вуглы, што ўтварае гэта прамая:

а) з воссю абсцыс;
б) з воссю ардынат;
в) з воссю аплікат;
г) з плоскасцю xOy;
д) з плоскасцю xOz.
е) з плоскасцю yOz.

381. Знайдзіце ўмову, якую праўдзяць каардынаты пунктаў плоскасці, што праходзіць праз пункт $B(2; 3; -2)$ перпендыкулярна:

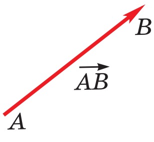
а) восі абсцыс;
б) восі ардынат;
в) восі аплікат;
г) прамой AB, дзе $A(4; 1; -2)$.

§ 12. Вектар. Дзеянні над вектарамі

А) З вектарамі вы сустрэліся ў курсе фізікі дзявятага класа пры знаёмстве з вектарнымі велічынямі. Фізічная велічыня з'яўляецца вектарнай, калі яна характарызуецца не толькі лікавым значэннем, а і кірункам. Такія велічыні, як сіла, скорасць і іншыя, выяўляюць накіраванымі адрэзкамі. Даўжыня накіраванага адрэзка (стрэлкі) характарызуе лікавае значэнне вектарнай велічыні (яе модуль).

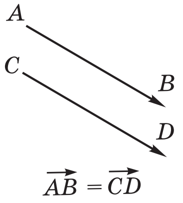
Асаблівасцю паняцця *вектар* з'яўляецца тое, што ўсе асноўныя азначэнні і ўласцівасці, звязаныя з гэтым паняццем, фармулююцца амаль аднолькава як у планіметрыі, так і ў стэрэаметрыі.

Вектар у геаметрыі выяўляецца накіраваным адрэзкам (рыс. 336), пачатак якога лічыцца пачаткам вектара, а канец — канцом вектара. Адлегласць паміж пачаткам накіраванага адрэзка і яго канцом лічыцца **даўжынёй вектара**.

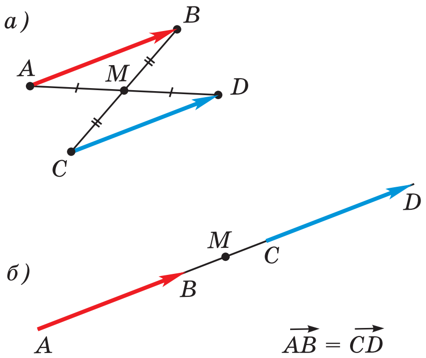


Рыс. 336

Накіраваныя адрэзкі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ выражаюць адзін вектар, калі яны аднолькава накіраваны і маюць аднолькавую даўжыню (рыс. 337). У такім выпадку гавораць, што вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ роўныя, і пішуць $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ роўныя тады і толькі тады, калі супадаюць сярэдзіны адрэзкаў AD і BC (рыс. 338).



Рыс. 337



Рыс. 338

Гэта нагадвае сітуацыю з дробамі: пэўны лік можа выражацца рознымі дробамі, напрыклад, дробы $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{29}{58}$ выражаюць адзін і той жа лік. Дробы $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ роўныя тады і толькі тады, калі $ad = bc$.

Калі вектар $\vec{a}$ выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overrightarrow{AB}$, то кажуць, што гэты вектар *адкладзены ад пункта A*. Вектар можна, і пры гэтым адназначна, адкласці ад любога пункта.

Вектар, які выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overrightarrow{AA}$, называюць нулявым: $\overrightarrow{AA}$, = 0. Вектары, што выяўляюцца накіраванымі адрэзкамі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, называюць супрацьлеглымі і пішуць $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Калі ненулявыя вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ адкладзены ад аднаго пункта: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, = $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, то вугал BAC называецца **вуглом паміж вектарамі** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Ненулявыя вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ называюць **калінеарнымі**, калі прамыя AB і CD паралельныя або супадаюць. Нулявы вектар лічыцца калінеарным з любым вектарам.

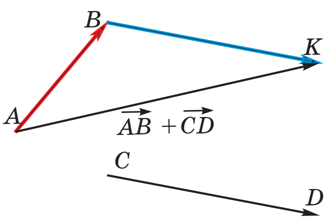
Вектары можна складваць і множыць на лік. Каб скласці вектары $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, можна адзін з іх замяніць роўным яму вектарам з тым, каб канец першага накіраванага адрэзка супадаў з пачаткам другога:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK},$$

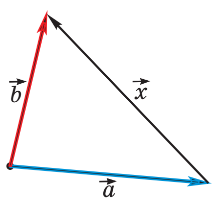
і тады сума вектараў выяўляецца накіраваным адрэзкам $\overrightarrow{AK}$ (рыс. 339).

Складанне вектараў мае перамяшчальную ўласцівасць, г. зн. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, спалучальную ўласцівасць, г. зн. $\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$, акрамя таго, ураўненне $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$ заўсёды мае адзінае рашэнне, якое называюць рознасцю вектараў $\vec{b}$ і $\vec{a}$: $\vec{x}=\vec{b}-\vec{a}$ (рыс. 340).

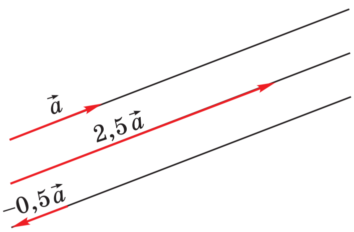
Здабыткам вектара $\vec{a}$ на лік k з'яўляецца такі вектар $k\vec{a}$, што, па-першае, вектары $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ аднолькава накіраваны пры $k > 0$ і супрацьскіраваны пры $k < 0$, і, па-другое, даўжыні вектараў $k\vec{a}$ і $\vec{a}$ звязаны роўнасцю $\left|k\vec{a}\right|=|k|\cdot\left|\vec{a}\right|$ (рыс. 341). Вектары $\vec{a}$ і $k\vec{a}$ з'яўляюцца калінеарнымі. Пры гэтым праўдзіцца роўнасць $(m\cdot n)\vec{a}=m\left(n\vec{a}\right)$. Калі $k = 0$, то здабыткам $k\vec{a}$ з'яўляецца нулявы вектар.



Рыс. 339



Рыс. 340



Рыс. 341

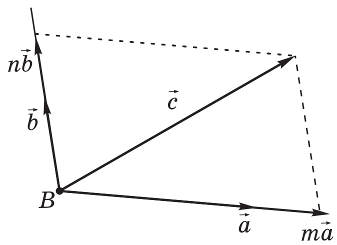
З дзеяннем множання вектара на лік звязваюцца дзве размеркавальныя ўласцівасці — $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ і $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$.

Б) Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ калінеарныя, то адзін з іх можна выразіць праз другі: або $\vec{a} = n\vec{b}$, або $\vec{b} = m\vec{a}$ пры пэўных ліках m і n.

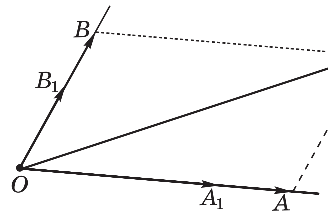
Для любых двух вектараў існуе плоскасць, якой яны паралельныя. Вектары, паралельныя адной плоскасці, называюць **кампланарнымі**. Калі вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ некалінеарныя, то любы вектар $\vec{c}$, кампланарны з імі, можна адназначна выразіць праз вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (рыс. 342).

Праўдзіцца і адваротнае сцверджанне: калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ звязаны роўнасцю $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, то яны кампланарныя.

Сапраўды, калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ выразіць накіраванымі адрэзкамі з агульным пачаткам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ (рыс. 343), то $m\vec{a} + n\vec{b} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$, таму пункты O, A, A_1, B, B_1 і C знаходзяцца ў плоскасці OAB.



Рыс. 342



Рыс. 343

Т э а р э м а 1. Калі вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ некампланарныя, то для любога вектара $\vec{d}$ існуе такая адзіная ўпарадкаваная тройка рэчаісных лікаў (m, n, k), што $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + k\vec{c}$.

Доказ. Спачатку дакажам існаванне патрэбных лікаў. Выразім вектары $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ накіраванымі адрэзкамі з агульным пачаткам $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Праз пункт D правядзём прамую l паралельна OC, і няхай D_1 — пункт перасячэння прамой l з плоскасцю OAB (рыс. 344). Тады $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D}$. Паколькі вектар $\overrightarrow{OC}$ ненулявы і вектары $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{D_1D}$ калінеарныя, то існуе такі лік k, што $\overrightarrow{D_1D} = k\overrightarrow{OC}$. А паколькі вектары $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD_1}$ кампланарныя, а вектары $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ некалінеарныя, то існуюць такія лікі m і n, што $\overrightarrow{OD_1} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$. Таму

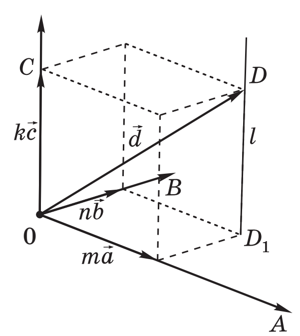
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{D_1D} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}.$$

Цяпер дакажам адзінасць выяўлення. Дапусцім, што існуе дзве розныя ўпарадкаваныя тройкі лікаў (m, n, k) і (m_1, n_1, k_1), пры якіх $\overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC}$. Тады

$$m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC} = m_1\overrightarrow{OA} + n_1\overrightarrow{OB} + k_1\overrightarrow{OC} \text{ і}$$

$$(m_1 - m)\overrightarrow{OA} + (n_1 - n)\overrightarrow{OB} + (k_1 - k)\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Калі тройкі лікаў (m, n, k) і (m_1, n_1, k_1) розныя, то лікі на адпаведных месцах не могуць усе супадаць. Няхай, напрыклад, $k \neq k_1$. У гэтым выпадку з апошняй роўнасці можна выразіць вектар $\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OC} = \dfrac{m - m_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OA} + \dfrac{n - n_1}{k_1 - k}\overrightarrow{OB}$. Апошняя роўнасць азначае, што вектары $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ кампланарныя. Атрыманая супярэчнасць з умовай азначае, што зробленае дапушчэнне пра існаванне дзвюх розных троек лікаў няпраўдзівае.



Рыс. 344

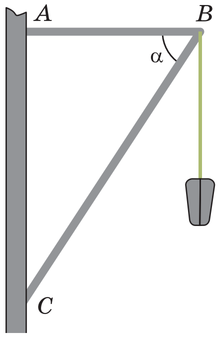
Вынік 1. З чатырох любых вектараў прасторы адзін можа быць выражаны праз тры іншыя.

Сапраўды, калі сярод зададзеных чатырох вектараў прасторы ёсць тры некампланарныя, то чацвёрты вектар можна праз гэтыя тры выразіць. Далей, калі сярод зададзеных чатырох вектараў прасторы любыя тры кампланарныя, то можа знайсціся сярод іх два некалінеарныя, або любыя два вектары калінеарныя. У першым выпадку праз гэтыя два некалінеарныя вектары можна выразіць трэці і да гэтага выразу дадаць чацвёрты, памножаны на нуль. У другім выпадку адзін з вектараў можна выразіць праз другі і потым дадаць да гэтага выразу два астатнія вектары, памножаныя на нуль.

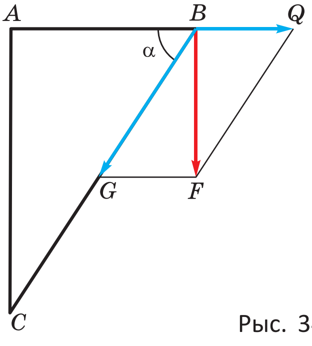
Такім чынам, цяпер вы ведаеце, што з двух калінеарных вектараў адзін можа быць выражаны праз другі, з трох кампланарных вектараў адзін можа быць выражаны праз два іншыя, а з чатырох любых вектараў адзін можа быць выражаны праз тры іншыя.

Прыклад 1. На кранштэйне, што складаецца з падкосіны CB і расцяжкі AB, падвешаны груз. Кранштэйн прымацаваны да вертыкальнай сцяны AC, расцяжка займае гарызантальнае становішча (рыс. 345). Знойдзем сілы, якія дзейнічаюць на падкосіну і расцяжку, калі вугал паміж імі роўны α, а вага грузу роўная P.

Р а ш э н н е. Сіла цяжару выражаецца вектарам $\overrightarrow{BF}$, накіраваным уніз па вертыкалі. Выявім яго сумай вектараў, якія калінеарны вектарам $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$. Для гэтага пабудуем паралелаграм $BQFG$ з дыяганаллю BF, стораны якога размешчаны на прамых AB і CB (рыс. 346).



Рыс. 345



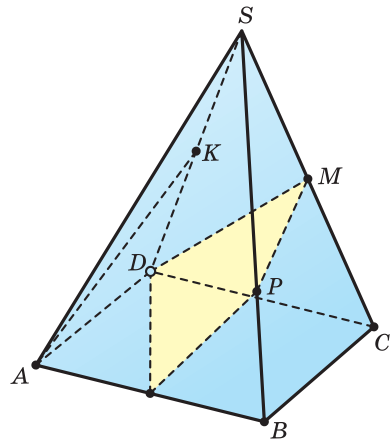
Рыс. 346

Паколькі вуглы BGF і ABC з’яўляюцца ўнутранымі накрыжлеглымі пры паралельных прамых GF і AB і сякучай BG, то ў прамавугольным трохвугольніку BFG вугал BGF роўны α і катэт BF роўны P. Таму

$$FG = BF \operatorname{ctg} \alpha \text{ і } BG = \frac{BF}{\sin \alpha}.$$

А д к а з. Пад уздзеяннем грузу падкосіна сціскаецца з сілай $\frac{P}{\sin \alpha}$, а расцяжка расцягваецца з сілай $P \operatorname{ctg} \alpha$.

Прыклад 2. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ пункты K і M — сярэдзіны кантаў SD і SC адпаведна. Плоскасць, што праходзіць праз пункты D і M паралельна прамой AK, перасякае прамую SB у пункце P (рыс. 347). Знойдзем адносіну $SP : PB$.



Рыс. 347

Р а ш э н н е. Паколькі $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$, то вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$ цалкам вызначаюць піраміду. Паколькі вектары $\overrightarrow{SP}$ і $\overrightarrow{SB}$ калінеарныя, то вектар $\overrightarrow{SP}$ можна выразіць праз $\overrightarrow{SB}:\overrightarrow{SP} = a\overrightarrow{SB}$ пры пэўным ліку a. Вектар $\overrightarrow{SP}$ можна выразіць праз вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$, выкарыстаўшы тое, што пункт P знаходзіцца ў плоскасці, якая праходзіць праз пункты D і M паралельна прамой AK. Вектар $\overrightarrow{MP}$ кампланарны з вектарамі $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}$, таму $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{DM} + y\overrightarrow{AK}$ пры пэўных множніках x і y. Выразім вектары $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{AK}$ праз вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$.

Маем:

$$\overrightarrow{SM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC},\ \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{SM} - \overrightarrow{SD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SD},$$

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{SK} - \overrightarrow{SA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SD} - \left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}\right) = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{SD}.$$

Таму

$$\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC} + x\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\right)+y\left(\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{SD}\right)=$$

$$= -y\overrightarrow{SB}+\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+y\right)\overrightarrow{SC}-\left(x+\frac{y}{2}\right)\overrightarrow{SD}.$$

Улічым цяпер тое, што праз некампланарныя вектары $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{SD}$ кожны вектар прасторы, у тым ліку і вектар $\overrightarrow{SP}$, выражаецца адзіным спосабам. Таму павінны адначасова выконвацца ўмовы: $a = -y$, $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} + y = 0$, $x + \frac{y}{2} = 0$. Адсюль атрымліваем, што $a = \frac{2}{3}$. А паколькі $SP : SB = 2 : 3$, то $SP : PB = 2 : 1$.

А д к а з: 2 : 1.

В) Няхай у прасторы выбрана дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$. З кожным пунктам M прасторы можна звязаць вектар $\overrightarrow{OM}$. Гэта адпаведнасць паміж пунктамі прасторы і вектарамі з'яўляецца ўзаемна адназначнай: розным пунктам адпавядаюць розныя вектары з пачаткам O і канцамі ў гэтых пунктах, і розным вектарам адпавядаюць розныя пункты прасторы.

Будзем гаварыць, што вектар $\vec{a}$ мае каардынаты (m, n, k) у дэкартавай сістэме каардынат $Oxyz$, калі $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ і пункт A мае каардынаты (m, n, k). Гэта будзем запісваць: $\vec{a}(m, n, k)$.

Тэарэма 2. **Калі $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, то $\overrightarrow{AB}$ $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.**

Доказ. Няхай зададзена дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$ і $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$. Няхай таксама $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$ і $M(x_M; y_M; z_M)$. Трэба даказаць, што $x_M = x_B - x_A$, $y_M = y_B - y_A$ і $z_M = z_B - z_A$.

Паколькі $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то сярэдзіны адрэзкаў AM і BO супадаюць. Сярэдзіна адрэзка AM мае каардынаты $\left(\frac{x_A + x_M}{2}; \frac{y_A + y_M}{2}; \frac{z_A + z_M}{2}\right)$, а сярэдзіна адрэзка BO — каардынаты $\left(\frac{x_B + 0}{2}; \frac{y_B + 0}{2}; \frac{z_B + 0}{2}\right)$. Атрымліваем:

$$x_A + x_M = x_B,\ y_A + y_M = y_B,\ z_A + z_M = z_B.$$

Адсюль:

$$x_M = x_B - x_A,\ y_M = y_B - y_A \text{ і } z_M = z_B - z_A.$$

Тэарэма 3. **Калі $\vec{a}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b}(x_b; y_b; z_b)$, то $\vec{a} + \vec{b}(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$, $k\vec{a}(kx_a; ky_a; kz_a)$.**

Доказ. Няхай зададзена дэкартава сістэма каардынат $Oxyz$ і $\vec{a} = \overrightarrow{OA}(x_a; y_a; z_a)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = \overrightarrow{OC}(x_c; y_c; z_c)$ (рыс. 348). Паколькі $\vec{b} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$, то $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Па тэарэме 2 атрымліваем:

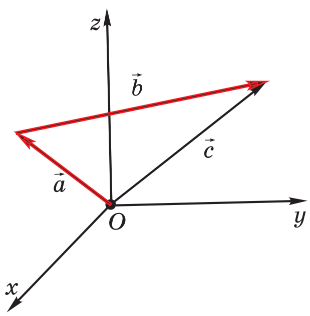
$$x_b = x_c - x_a,\ y_b = y_c - y_a \text{ і } z_b = z_c - z_a.$$

Таму

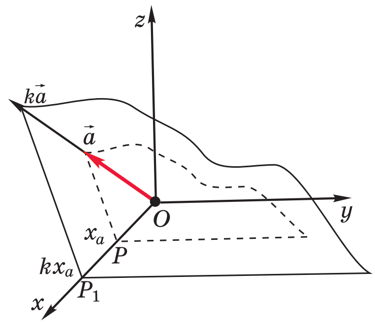
$$x_c = x_a + x_b,\ y_c = y_a + y_b \text{ і } z_c = z_a + z_b.$$

Значыць, вектар $\vec{a} + \vec{b}$ мае каардынаты $(x_a + x_b; y_a + y_b; z_a + z_b)$.

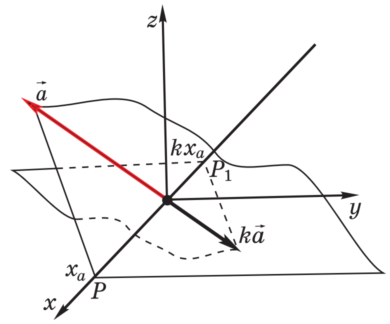
Дакажам другое сцверджанне тэарэмы 3. Няхай напачатку $k > 0$ і $k\vec{a} = \overrightarrow{OA_1}(x_1; y_1; z_1)$. Параўнаем аднайменныя, напрыклад, першыя каардынаты вектараў $\vec{a}$ і $k\vec{a}$. Для гэтага праз пункты A і A_1 правядзём плоскасці, паралельныя плоскасці yOz (рыс. 349), якія перасякаюць вось Ox у пунктах P і P_1. З падобнасці трохвугольнікаў OAP і OA_1P_1 вынікае, што $x_1 = kx_a$. Аналагічна атрымліваецца, што $y_1 = ky_a$ і $z_1 = kz_a$.



Рыс. 348



Рыс. 349



Рыс. 350

Калі ж $k < 0$, то тыя самыя разважанні праводзяцца для рысунка 350.

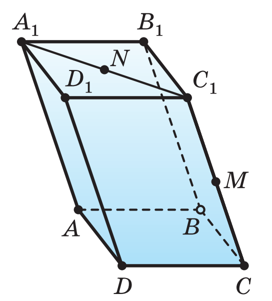
Вектары $\vec{i}\,(1;\ 0;\ 0)$, $\vec{j}\,(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{k}\,(0;\ 0;\ 1)$ называюць *адзінкавымі каардынатнымі вектарамі*.

Вынік 2. Калі $\vec{a}\ (x_a;\ y_a;\ z_a)$, то $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$.

Прыклад 3. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў CC_1 і A_1C_1 адпаведна (рыс. 351). Выразім:

а) вектары $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BN}$ праз вектары $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$;

б) вектары $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ праз вектары $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BN}$.



Рыс. 351

Рашэнне. а) Маем:

$$\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_1};$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1N} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A_1C_1} =$$

$$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_1D_1}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

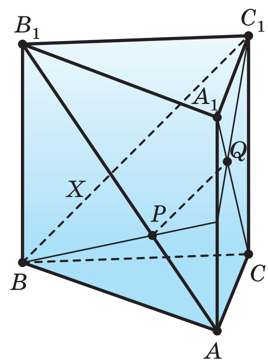
б) Будзем разглядаць атрыманыя роўнасці $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AM}$, $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}$ як сістэму ўмоў, з якой трэба знайсці $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$. З першай умовы выразім $\overrightarrow{AA_1}$ і выключым $\overrightarrow{AA_1}$ з дзвюх іншых:

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1},\ \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM},\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BN}.$$

Цяпер з апошняй роўнасці выразім $\overrightarrow{AD}$ і выключым $\overrightarrow{AD}$ з папярэдняй:

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CD_1},\ \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} - \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{CD_1} = \overrightarrow{AM}.$$

Далей можна паступова выразіць $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ праз вектары $\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BN}$: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 3\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AM} + 6\overrightarrow{BN} - 5\overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{AA_1} = 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BN} + 4\overrightarrow{CD_1}$.



Рыс. 352

Прыклад 4. Праз дыяганаль BC_1 грані трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ праведзена плоскасць так, што яна перасякае дыяганалі AB_1 і CA_1 граняў у пунктах P і Q адпаведна (рыс. 352). Знойдзем адносіну $PQ : BC_1$, улічыўшы, што $PQ \parallel BC_1$.

Р а ш э н н е. Вектары $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ некампланарныя, таму праз іх можна выразіць вектары $\overrightarrow{BC_1}$ і $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{BC_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Улічым, што $\overrightarrow{QC}$ і $\overrightarrow{CA_1}$ калінеарныя. Значыць, існуе такі лік p, што $\overrightarrow{QC} = p\cdot\overrightarrow{CA_1}$. Аналагічна, існуе такі лік q, што $\overrightarrow{PA} = q\cdot\overrightarrow{AB_1}$. Акрамя таго,

$$\overrightarrow{CA_1} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} \text{ і } \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}.$$

Значыць,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{QC} = q\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1}\right) + \overrightarrow{AC} - p\cdot\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) =$$

$$= q\cdot\overrightarrow{AB} + (p+1)\cdot\overrightarrow{AC} + (q-p)\cdot\overrightarrow{AA_1}.$$

З умовы вынікае, што вектары $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ калінеарныя. Таму

$$\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{BC_1} = k\cdot\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right) \text{ пры пэўным } k.$$

А паколькі $q\cdot\overrightarrow{AB} + (p+1)\cdot\overrightarrow{AC} + (q-p)\cdot\overrightarrow{AA_1} = k\cdot\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}\right)$

і ўлічыўшы адназначнасць раскладання вектара па трох некампланарных вектарах, атрымліваем, што $q = -k$, $p + 1 = k$, $q - p = k$. Адсюль знаходзім $k = \frac{1}{3}$.

А д к а з: $PQ : BC_1 = 1 : 3$.

?

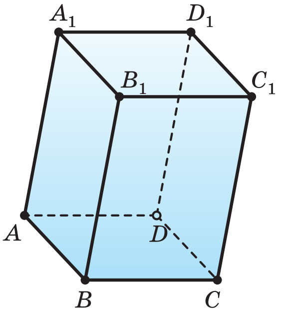
1. Што сабой уяўляе вектар? Якія вектары лічацца роўнымі?
2. Якія вектары лічацца супрацьлеглымі? Які вектар называюць нулявым?
3. Як абазначаецца складанне вектараў?
4. Якія ўласцівасці мае дзеянне складання вектараў?
5. Што называецца рознасцю вектараў?
6. Як абазначаецца дзеянне множання вектара на лік?
7. Якія ўласцівасці мае дзеянне множання вектара на лік?
8. Якія вектары называюцца калінеарнымі?
9. Якую ўласцівасць маюць калінеарныя вектары?
10. Якія вектары называюцца кампланарнымі?
11. Якую ўласцівасць маюць кампланарныя вектары?
12. Якую ўласцівасць маюць некампланарныя вектары?
13. Як абазначаюцца каардынаты вектара?
14. Як знайсці каардынаты вектара, выражанага накіраваным адрэзкам?
15. Як знайсці каардынаты сумы вектараў?
16. Як знайсці каардынаты здабытку вектара на лік?
17. Якая ёсць сувязь паміж каардынатамі вектара і адзінкавымі каардынатнымі вектарамі?

382. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 353). Укажыце вектары з канцамі ў вяршынях паралелепіпеда, якія роўныя вектарам:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{A_1B}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{D_1C}$;

б) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD_1}$, $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{D_1C} + \overrightarrow{BA_1}$;

в) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{D_1A}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{D_1C} - \overrightarrow{AD}$.



Рыс. 353

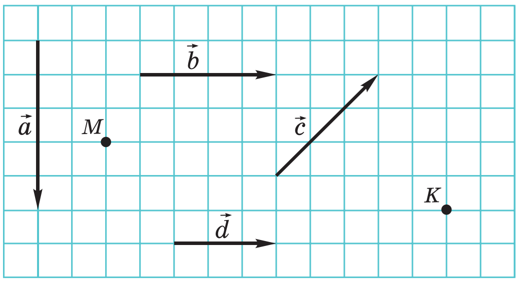
383. Перанясіце рысунак 354 у сшытак.

а) Адкладзіце ад пункта M вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знайдзіце даўжыні гэтых вектараў і вугал паміж імі;

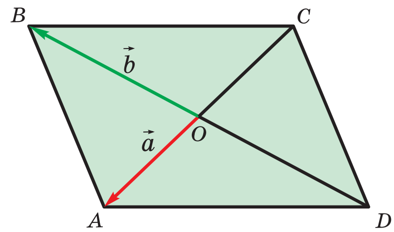
б) ад пункта K адкладзіце вектары $\vec{c}$ і $-\vec{d}$, знайдзіце даўжыні гэтых вектараў і вугал паміж імі;

в) пабудуйце вектар $\vec{a}+\vec{b}$, знайдзіце яго даўжыню і вугал паміж сумай і кожным складнікам;

г) пабудуйце вектар $\vec{c}-\vec{d}$ і знайдзіце яго даўжыню.



Рыс. 354



Рыс. 355

384. Нарысуйце паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Улічыўшы, што $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1A}=\vec{b}$, $\overrightarrow{C_1D_1}=\vec{c}$, пакажыце на рысунку вектар:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; д) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

б) $\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$;

385. Дыяганалі паралелаграма $ABCD$ перасякаюцца ў пункце O. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ (рыс. 355). Праз вектары $\vec{c}$ і $\vec{b}$ выразіце вектар:

а) $\overrightarrow{CO}$; в) $\overrightarrow{BD}$; д) $\overrightarrow{AB}$;

б) $\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BC}$; е) $\overrightarrow{CD}$.

386. У трохвугольніку ABC пункты M і K — сярэдзіны адрэзкаў AB і BC (рыс. 356). Выразіце:

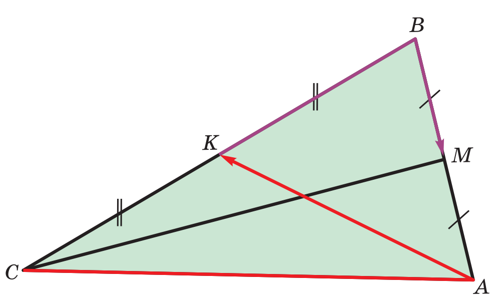
а) вектары $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AC}$ праз вектары $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BK}$;

б) вектары $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BK}$ праз вектары $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AC}$.

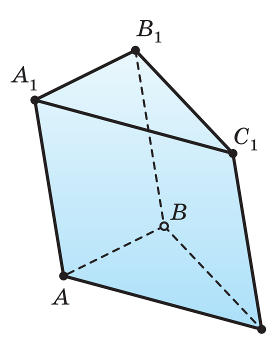
387. Ёсць трохвугольная прызма $ABCA_1B_1C_1$ (рыс. 357). Укажыце вектар з канцамі ў вяршынях прызмы, які роўны вектару $\vec{x}$, калі:

а) $\overrightarrow{AA_1}-\vec{x}+\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{BC_1}+\vec{x}=\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA}-\vec{x}+\overrightarrow{CA_1}$.

б) $\overrightarrow{BC_1}+\vec{x}+\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{BA}$;



Рыс. 356



Рыс. 357

388. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца паралелаграм. Ці праўда, што:

а) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}$; б) $\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{DA}$?

389. Дакажыце, што для любых чатырох пунктаў A, B, C, D прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

390. Асновай піраміды $SABCD$ з'яўляецца трапецыя, пункт O — сярэдзіна яе сярэдняй лініі. Дакажыце, што $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=4\cdot\overrightarrow{SO}$.

391. Пункты M, N, P, Q — сярэдзіны кантаў пры аснове чатырохвугольнай піраміды $SABCD$. Дакажыце, што

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{SP}+\overrightarrow{SQ}.$$

392. У прасторы выбраны пункты A, B, C, D, пункты M і N — сярэдзіны адрэзкаў AB і CD. Дакажыце, што $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{MN}$.

393. Нарысуйце два накіраваныя адрэзкі $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$. Пабудуйце вектар:

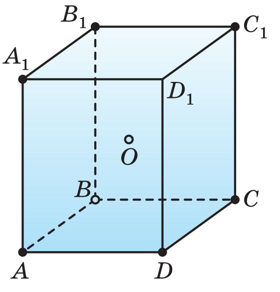
а) $-2\overrightarrow{AB}$; в) $\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{CD}$; д) $\frac{4}{3}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\cdot k\cdot\overrightarrow{CD}$.

б) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{CD}$; г) $\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{CD}$;

394. Дыяганалі куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 358) перасякаюцца ў пункце O. Знайдзіце лік k, улічыўшы, што праўдзіцца роўнасць:

а) $\overrightarrow{AB}=k\cdot\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{D_1B}=k\cdot\overrightarrow{BO}$.

б) $\overrightarrow{C_1O}=k\cdot\overrightarrow{AC_1}$;



Рыс. 358

395. Дакажыце, што рознасць вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ роўная вектару $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$.

396. Спрасціце выраз:

а) $\vec{a}-2(\vec{b}-\vec{a})+3(2\vec{b}-\vec{a})$; б) $-\left(\vec{p}+\vec{q}\right)+5\left(\vec{r}-2\vec{p}+3\vec{q}\right)-7\left(-\vec{p}+2\vec{q}+\vec{r}\right)$.

397. Вядома, што пункты A, B, C і D не ляжаць на адной прамой і $\overrightarrow{AB}=k\ \overrightarrow{CD}$. Ці могуць прамыя AC і BD быць скрыжаванымі? Пры якім значэнні k прамыя AC і BD:

а) паралельныя; б) перасякаюцца?

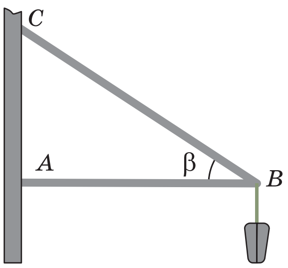
398. У прасторы выбраны пункты A і B. Дакажыце, што для любых пунктаў P і Q вектары $k\cdot\overrightarrow{PA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PQ}+k\cdot\overrightarrow{QA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{QB}$ супадаюць.

399. У прасторы выбраны пункты A, B і C. Дакажыце, што калі M — пункт перасячэння медыян трохвугольніка ABC, то для любога пункта P прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{PM}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}\right)$.

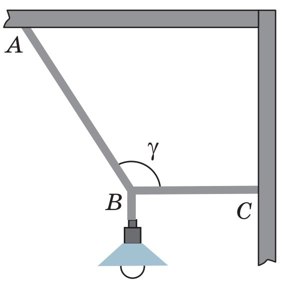
400. На кранштэйне, што складаецца з падкосіны AB і расцяжкі CB, падвешаны груз. Кранштэйн прымацаваны да вертыкальнай сцяны AC, падкосіна займае гарызантальнае становішча (рыс. 359). Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на падкосіну і расцяжку, калі вугал паміж імі роўны β, а вага грузу роўная P.

401. Электрычны ліхтар падвешаны на дроце AB і ўтрымліваецца гарызантальнай расцяжкай BC (рыс. 360). Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на дрот і расцяжку, калі вугал паміж імі роўны γ, а вага ліхтара роўная P.

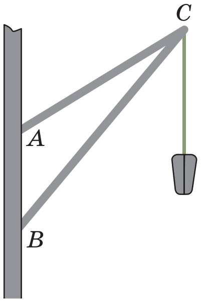
402. Знайдзіце сілы, якія дзейнічаюць на падкосіну і расцяжку, прымацаваныя да вертыкальнай сцяны (рыс. 361), калі падвешаны ў пункце C груз важыць P, $AB = 1{,}5$ м, $AC = 3$ м, $BC = 4$ м.



Рыс. 359

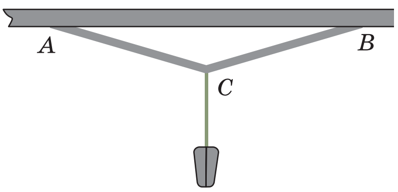


Рыс. 360



Рыс. 361

403. Да гарызантальнай паверхні прымацаваны шнур даўжынёй 5 м, які вытрымлівае нагрузку ў 0,2 т. Вызначце, ці ўтрымаецца на гэтым шнуры прымацаваны ў яго сярэдзіне груз вагой 0,05 т (рыс. 362), калі адлегласць AB паміж пунктамі мацавання роўная 4,8 м.



Рыс. 362

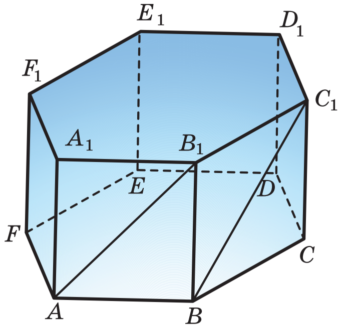
404. Сярод вектараў $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ёсць некалінеарныя. Дакажыце, што калі $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то $|\vec{m}| < |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

405. Ёсць правільная шасцівугольная прызма $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (рыс. 363). Укажыце вектар, калінеарны з вектарам:

а) $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC_1}$;

б) $\overrightarrow{A_1A}$; д) $\overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{A_1D_1}$; е) $\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BE}$.



Рыс. 363

406. Вядома, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{c}$, а таксама $\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя. Ці можна сцвярджаць, што вектары $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ калінеарныя? Дакажыце, што:
а) вектары $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
б) вектары $\vec{a}-\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
в) вектары $\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя;
г) вектары $-\vec{a}+2\vec{b}$ і $\vec{c}$ калінеарныя.

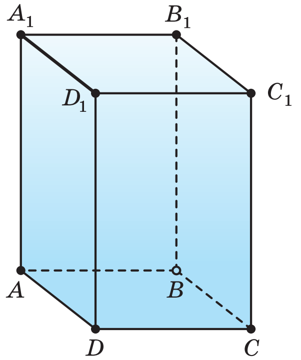
407. Вядома, што вектары $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ калінеарныя. Дакажыце, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ таксама калінеарныя.

408. Вядома, што вектары $\vec{a}+3\vec{b}$ і $\vec{a}-2\vec{b}$ калінеарныя. Дакажыце, што вектары $\vec{a}$ і $\vec{b}$ таксама калінеарныя.

409. У трохвугольнай пірамідзе кожная вяршыня злучана з пунктам перасячэння медыян супрацьлеглай грані. Дакажыце, што гэтыя чатыры адрэзкі праходзяць праз адзін пункт і дзеляцца ім у адносіне 3 : 1, калі лічыць ад вяршыні.

410. Ёсць трохвугольная піраміда $ABCD$. Знайдзіце ўсе такія пункты M прасторы, што $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

411. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 364). Устанавіце, ці кампланарная тройка вектараў:
а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{CD_1}$;
б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$;
в) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$;
г) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$.



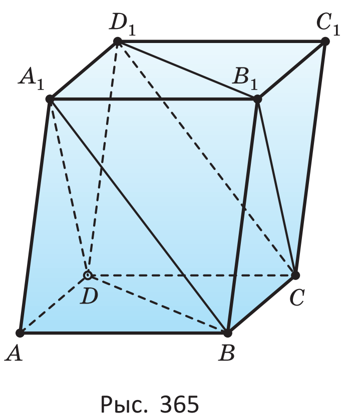
Рыс. 364

412. Сярэдзіны кантаў AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ — пункты P і Q адпаведна. Дакажыце, што $2\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. Ці кампланарныя вектары $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{PQ}$?

413. У грані ABC трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена медыяна AM. Выразіце вектар $\overrightarrow{DK}$ праз вектары $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$, улічыўшы, што K — такі пункт медыяны AM, што $AK : KM = 3 : 2$.

414. У грані ABC трохвугольнай піраміды $ABCD$ медыяны перасякаюцца ў пункце M. Дакажыце, што даўжыня адрэзка DM меншая за трэцюю долю сумы даўжынь кантаў AD, BD і CD.

415. Дакажыце, што дыяганаль AC_1 паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 365):
а) праходзіць праз пункты перасячэння медыян трохвугольнікаў A_1BD і B_1CD_1;
б) плоскасці A_1BD і B_1CD_1 раздзяляюць адрэзак AC_1 на тры роўныя часткі.

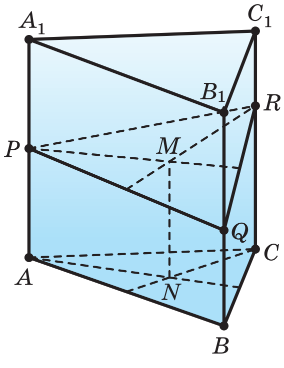


Рыс. 365

416. На бакавых кантах трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ выбраны пункты P, Q, R. Медыяны трохвугольніка PQR перасякаюцца ў пункце M, а медыяны трохвугольніка ABC — у пункце N (рыс. 366). Дакажыце, што $MN \parallel AA_1$.

417. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ пункт K на канце SC выбраны так, што $SK : SC = 1 : 3$. Плоскасць, што праходзіць праз пункты K і D паралельна прамой AS, перасякае прамую AB у пункце P. Знайдзіце адносіну $AP : PB$.

418. У прасторы выбраны пункты A, B, C, A_1, B_1, C_1, M, K. Вядома, што $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MA_1}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MB_1}$, $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{MC_1}$. Дакажыце, што стораны трохвугольніка ABC паралельныя і роўныя старанам трохвугольніка $A_1B_1C_1$.



Рыс. 366

419. У прасторы выбраны пункты A, B, C, D. Дакажыце, што:

а) адрэзкі, якія злучаюць сярэдзіны адрэзкаў AB і CD, AC і BD, AD і BC, праходзяць праз адзін пункт M і дзеляцца ім папалам;

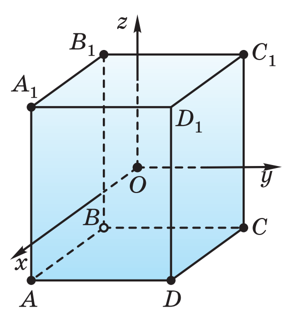
б) для любога пункта K прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{KM}=\frac{1}{4}\cdot\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}\right)$.

420. Цэнтр куба з кантам a размешчаны ў пачатку сістэмы каардынат, а яго канты паралельныя каардынатным восям (рыс. 367). Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{DA}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.



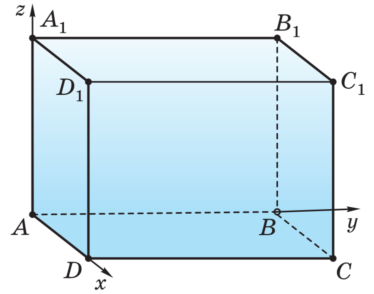
Рыс. 367

421. Паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мае вымярэнні $AB = a$, $AC = b$ і $AA_1 = c$. Пункт A з'яўляецца пачаткам сістэмы каардынат, канты размешчаны на каардынатных восях (рыс. 368). Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$;

б) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{C_1D}$, $\overrightarrow{D_1B}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$;

в) $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A_1D}$.



Рыс. 368

422. Тры пункты ў прасторы, зададзеныя сваімі каардынатамі: $M(2; -3; -1)$, $P(0; 1; 3)$, $K(4; 3; -3)$, з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма. Знайдзіце каардынаты яго чацвёртай вяршыні.

423. Чатыры пункты ў прасторы зададзены сваімі каардынатамі: $A(2; 3; 1)$, $B(0; 1; 3)$, $C(-1; 3; 0)$, $D(3; 1; 2)$. Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB}+2\cdot\overrightarrow{BC}+3\cdot\overrightarrow{CD}+4\cdot\overrightarrow{DA}$.

424. Чатыры пункты ў прасторы зададзены сваімі каардынатамі: $A(-2; 1; -1)$, $B(2; 0; -3)$, $C(1; -3; 0)$, $D(2; 3; -1)$. Знайдзіце каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$, $2\cdot\overrightarrow{AB}+3\cdot\overrightarrow{BC}+2\cdot\overrightarrow{CD}+3\cdot\overrightarrow{DA}$.

425. Чатыры вяршыні прызмы $ABCA_1B_1C_1$ размешчаны ў пунктах $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў C і B_1.

426. У паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вядомы каардынаты чатырох вяршынь. Знайдзіце каардынаты астатніх чатырох вяршынь, улічыўшы, што:

а) $A(1; 3; -1)$, $B(4; 3; 2)$, $C(3; 1; 2)$, $B_1(3; 2; 5)$;
б) $A(-2; 3; -1)$, $C(4; 1; 5)$, $B_1(4; 3; 2)$, $D_1(2; 5; 6)$.

427. Чатыры вяршыні прызмы $ABCA_1B_1C_1$ размешчаны ў пунктах $A(2; 0; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $A_1(4; 3; 6)$, $C_1(3; 2; -3)$. Знайдзіце каардынаты пунктаў C і B_1.

428. Пры якіх значэннях x і y будуць калінеарнымі вектары:

а) $\vec{a}(2; 6; x)$ і $\vec{b}(y; 3; -1)$;

б) $\vec{c}(1; 0; x)$ і $\vec{d}(y; 3; -1)$;

в) $\vec{m}(1; 3; x)$ і $\vec{n}(2; 6; y)$?

429. Вызначце, ці ляжаць на адной прамой пункты:

а) $A(1; -2; 2)$, $B(4; 1; 2)$, $C(3; 0; 4)$;
б) $M(1; 2; -3)$, $K(3; 3; -1)$, $P(5; 4; 1)$.

430. Ёсць вектар $\vec{a}(1; -1; 2)$. Вектар $\overrightarrow{AB}$ яму калінеарны. Знайдзіце каардынаты:

а) пункта B, які ляжыць у плоскасці xOy, улічыўшы, што $A(3; 1; 2)$;
б) пункта A, які ляжыць у плоскасці xOy, улічыўшы, што $B(2; -1; 1)$.

431. Устанавіце, ці з'яўляюцца кампланарнымі вектары:

а) $\vec{a}(2; 6; 3)$, $\vec{b}(1; 3; -1)$ і $\vec{c}(0; 0; 2)$;

б) $\vec{m}(1; 3; 0)$, $\vec{n}(2; 6; 5)$ і $\vec{k}(2; 3; -1)$.

432. Вызначце, пры якім значэнні m вектары $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 3; -1)$ і $\vec{c}(2; m; -1)$ будуць кампланарнымі.

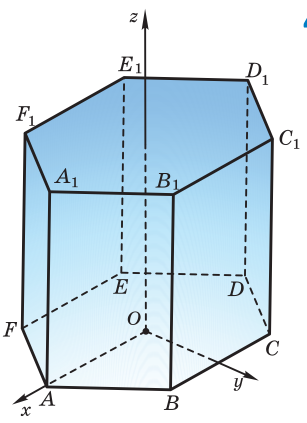
433. Ведаючы вектары $\vec{a}(1;\ -1;\ 2)$, $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$ і $\vec{c}(2;\ 0;\ -1)$, знайдзіце каардынаты вектара:

а) $2\vec{a}+\vec{b}$; в) $-\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$;

б) $\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$; г) $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

434. Прамыя A_1A_2 і B_1B_2 скрыжоўваюцца. Пункты A_3 і B_3 выбраны так, што $\overrightarrow{A_1A_3}=k\cdot\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{B_1B_3}=k\cdot\overrightarrow{B_1B_2}$. Дакажыце, што прамыя A_1B_1, A_2B_2 і A_3B_3 паралельныя адной плоскасці.

435. Усе медыяны трохвугольнікаў $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ праходзяць праз пункт K. Дакажыце, што прамыя A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 паралельныя адной плоскасці.



Рыс. 369

436. Цэнтр асновы правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ знаходзіцца ў пачатку дэкартавай сістэмы каардынат $Oxyz$, бакавыя канты паралельныя восі аплікат, а вяршыня A размяшчаецца на восі абсцыс (рыс. 369). Улічыўшы, што ўсе канты прызмы роўныя a, знайдзіце каардынаты вектараў $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AA_1}$, а потым і каардынаты вектараў:

а) $\overrightarrow{B_1E}$; г) $\overrightarrow{AD_1}$;

б) $\overrightarrow{F_1C}$; д) $\overrightarrow{BD}$;

в) $\overrightarrow{AC_1}$; е) $\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BE}$.

§ 13. Скалярны здабытак вектараў

А) Скалярным здабыткам вектараў $\vec{a}$ і $\vec{b}$ называецца лік $\vec{a}\cdot\vec{b}$, роўны здабытку даўжынь гэтых вектараў на косінус вугла α паміж імі:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha$.

Скалярны здабытак вектараў мае перамяшчальную ўласцівасць $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$, размеркавальную ўласцівасць $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$, акрамя таго, множнік можна выносіць за знак скалярнага здабытку $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$.

З дапамогай скалярнага здабытку можна знаходзіць даўжыні вектараў і косінусы вуглоў паміж імі: $|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$, $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

У нулявога вектара кірунак не вызначаны, таму зручна лічыць, што нулявы вектар перпендыкулярны любому іншаму вектару. З улікам гэтага атрымліваецца наступнае карыснае сцверджанне:

два вектары перпендыкулярныя тады і толькі тады, калі іх скалярны здабытак роўны нулю.

Тэарэма 1. Скалярны здабытак вектараў $\vec{a}\,(x_a;\ y_a;\ z_a)$ і $\vec{b}\,(x_b;\ y_b;\ z_b)$ выражаецца праз іх каардынаты ў дэкартавай сістэме роўнасцю $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Доказ. Паколькі $\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k}$, $\vec{b} = x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}$, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k})\cdot(x_b\vec{i} + y_b\vec{j} + z_b\vec{k}) =$$

$$= x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{i} + x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{j} + x_a x_b\vec{i}\cdot\vec{k} + y_a x_b\vec{j}\cdot\vec{i} + y_a y_b\vec{j}\cdot\vec{j} + y_a z_b\vec{j}\cdot\vec{k} +$$

$$+ z_a x_b\vec{k}\cdot\vec{i} + z_a y_b\vec{k}\cdot\vec{j} + z_a z_b\vec{k}\cdot\vec{k}.$$

Знаходзім далей:

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = 1\cdot1\cdot\cos0 = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j} = 1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Аналагічна,

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = 1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,\quad \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$$

Таму $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

Прыклад 1. Знойдзем даўжыню вектара $\vec{a}\,(2;\ 1;\ -2)$.

Маем: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = 2\cdot2 + 1\cdot1 + (-2)\cdot(-2) = 9$. Таму $|\vec{a}| = 3$.

Прыклад 2. Знойдзем вугал α паміж вектарамі $\vec{a}\,(4;\ 1;\ -3)$ і $\vec{b}\,(2;\ -5;\ 1)$.

Маем: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot2 + 1\cdot(-5) + (-3)\cdot1 = 0$. Таму:

$$\cos\alpha = 0 \text{ і } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Прыклад 3. Знойдзем даўжыню вектара $\vec{a}$, роўнага $\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}$, калі вядома, што вектары $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендыкулярныя вектару $\vec{p}$, паміж сабой утвараюць вугал $60°$ і $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 1$, $|\vec{p}| = 3$.

Маем: $|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = (\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p})\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) =$

$$= \vec{m}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) + 2\vec{n}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) - 3\vec{p}\cdot(\vec{m} + 2\vec{n} - 3\vec{p}) =$$

$$= \vec{m}\cdot\vec{m} + 2\cdot\vec{m}\cdot\vec{n} - 3\cdot\vec{m}\cdot\vec{p} + 2\vec{n}\cdot\vec{m} + 2\cdot2\vec{n}\cdot\vec{n} - 3\cdot2\vec{n}\cdot\vec{p} - 3\vec{p}\cdot\vec{m} -$$

$$- 3\cdot2\vec{p}\cdot\vec{n} + 3\cdot3\vec{p}\cdot\vec{p}.$$

Паколькі

$$\vec{m}\cdot\vec{m} = |\vec{m}|^2 = 4,\quad \vec{m}\cdot\vec{n} = 2\cdot1\cos60° = 1,\quad \vec{m}\cdot\vec{p} = 0,$$

$$\vec{n}\cdot\vec{n} = |\vec{n}|^2 = 1,\quad \vec{n}\cdot\vec{p} = 0,\quad \vec{p}\cdot\vec{p} = |\vec{p}|^2 = 9, \text{ то } |\vec{a}|^2 = 93.$$

Таму $|\vec{a}| = \sqrt{93}$.

Б) Вы ведаеце, што плоскасць у прасторы можна задаць трыма пунктамі, якія не ляжаць на адной прамой. Паколькі існуе адзіная плоскасць, што праходзіць праз дадзены пункт перпендыкулярна дадзенай прамой, то плоскасць можна задаваць таксама ўказаннем аднаго з яе пунктаў і вектара, ёй перпендыкулярнага.

Т э а р э м а 2. Калі плоскасць праходзіць праз пункт $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендыкулярна ненулявому вектару $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$, то каардынаты $(x;\ y;\ z)$ любога іншага пункта M гэтай плоскасці праўдзяць ураўненне $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

Доказ. Калі $M(x;\ y;\ z)$ — адвольны пункт плоскасці, якая праходзіць праз пункт $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендыкулярна вектару $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$, то вектары $\overrightarrow{M_0M}$ і $\overrightarrow{N}$ перпендыкулярныя, а таму іх скалярны здабытак роўны нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

З'яўляецца праўдзівым і адваротнае сцверджанне.

Т э а р э м а 3. Ураўненню $ax + by + cz + d = 0$, у якім каэфіцыенты a, b, c не роўныя нулю адначасова, задавальняе любы пункт пэўнай плоскасці. Гэтай плоскасці перпендыкулярны вектар $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$.

Доказ. Калі ёсць ураўненне $ax + by + cz + d = 0$ і лікі a, b, c не роўныя нулю адначасова, то можна знайсці ўпарадкаваную тройку лікаў $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, якая праўдзіць гэта ўраўненне. Напрыклад, калі $a \neq 0$, то можна, узяўшы $y = y_0$ і $z = z_0$, знайсці значэнне зменнай x так, каб тройка лікаў $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ праўдзіла ўраўненне $ax + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Паколькі $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$, то ўмовы $ax + by + cz + d = 0$ і $ax + by + cz + d - (ax_0 + by_0 + cz_0 + d) = 0$ раўназначныя. Атрымалі, што зыходнае ўраўненне раўназначнае ўраўненню $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$, якое праўдзяць каардынаты $(x;\ y;\ z)$ любога пункта M, размешчанага на прамой, што праходзіць праз пункт $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендыкулярна вектару $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$, г. зн. любога пункта плоскасці, што праходзіць праз пункт $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ перпендыкулярна вектару $\overrightarrow{N}(a;\ b;\ c)$.

Прыклад 4. Знойдзем ураўненне плоскасці ABC, якая праходзіць праз пункты $A(2;\ 1;\ 3)$, $B(4;\ 1,\ 2)$ і $C(5;\ 2;\ 1)$.

Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}(4 - 2;\ 1 - 1;\ 2 - 3)$, $\overrightarrow{AC}(5 - 2;\ 2 - 1;\ 1 - 3)$. Паколькі каардынаты $(2;\ 0;\ -1)$ і $(3;\ 1;\ -2)$ гэтых вектараў непрапарцыянальныя, то самі вектары некалінеарныя, і, значыць, пункты A, B і C не ляжаць на адной прамой, яны задаюць адзіную плоскасць.

Каб запісаць ураўненне плоскасці ABC, выкарыстаўшы тэарэму 2, знойдзем вектар $\vec{N}(a; b; c)$, перпендыкулярны гэтай плоскасці. Паколькі $\vec{N} \perp \overrightarrow{AB}$ і $\vec{N} \perp \overrightarrow{AC}$, то $2a + 0b + (-1)c = 0$ і $3a + b + (-2)c = 0$. З гэтых умоў атрымліваем: $c = 2a$, $b = a$. Такім чынам, у якасці шуканага вектара $\vec{N}$ можна ўзяць вектар з каардынатамі $(1; 1; 2)$.

Цяпер можна запісаць ураўненне плоскасці, якая праходзіць праз пункт A перпендыкулярна знойдзенаму вектару $\vec{N}$:

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 3) = 0, \text{ або } x + y + 2z = 9.$$

В) **Тэарэма 4. Калі плоскасць мае ўраўненне $ax + by + cz + d = 0$, то адлегласць да яе ад пункта $M_0(x_0; y_0; z_0)$ роўная $\dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.**

Доказ. Няхай з пункта M_0 на дадзеную плоскасць апушчаны перпендыкуляр M_0M_1, аснова якога — пункт M_1 — мае каардынаты $(x_1; y_1; z_1)$. Тады вектар $\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0; y_1 - y_0; z_1 - z_0)$ калінеарны з вектарам $\vec{N}(a; b; c)$. Паколькі вугал паміж гэтымі вектарамі роўны 0° або 180°, то $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N} = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot |\vec{N}| \cdot (\pm 1)$, адкуль

$$|\overrightarrow{M_0M_1}| = (\pm 1) \cdot \frac{\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N}|}{|\vec{N}|}.$$

Знаходзім

$$\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \vec{N} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) =$$

$$= ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = -(d + ax_0 + by_0 + cz_0),$$

паколькі каардынаты пункта M_1 задавальняюць ураўненню плоскасці. Далей: $|\vec{N}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. А паколькі шуканая адлегласць роўная даўжыні вектара $\overrightarrow{M_0M_1}$, то патрэбнае сцверджанне абгрунтавана.

Прыклад 5. Знойдзем адлегласць ад пункта $A(2; -1; -3)$ да плоскасці, якая зададзена ўраўненнем $x + 2y + 2z - 9 = 0$.

Рашэнне. Выкарыстаўшы тэарэму 4, атрымліваем:

$$l = \frac{|2 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot (-3) - 9|}{\sqrt{1 + 2^2 + 2^2}} = 5.$$

Адказ: 5.

?

1. Як выражаецца скалярны здабытак вектараў?

2. Якія ўласцівасці мае скалярнае множанне вектараў?

3. Як знайсці скалярны здабытак вектараў, выкарыстаўшы іх дэкартавы каардынаты?

4. Для рашэння якіх задач зручна выкарыстоўваць скалярнае множанне вектараў?

5. Якой умове задавальняюць каардынаты любога пункта пэўнай плоскасці?

6. Якім ураўненнем задаецца плоскасць, што праходзіць праз дадзены пункт прасторы перпендыкулярна ўказанаму вектару?

7. Як можна знайсці ўраўненне плоскасці, што праходзіць праз тры дадзеныя пункты прасторы?

8. Што называецца адлегласцю ад пункта да плоскасці?

9. Як знайсці адлегласць ад пункта з вядомымі каардынатамі да плоскасці, зададзенай сваім ураўненнем?

437. Знайдзіце скалярны здабытак вектараў:

а) $\vec{a}(4;\ -1;\ -2)$ і $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$;
б) $\vec{c}(3;\ 0;\ -1)$ і $\vec{d}(2;\ 3;\ 1)$;
в) $\vec{m}(2;\ 1;\ 2)$ і $\vec{n}(-1;\ 2;\ 0)$;
г) $\vec{p}(-3;\ -1;\ 2)$ і $\vec{q}(3;\ 1;\ -2)$.

438. Знайдзіце даўжыню вектара:

а) $\vec{a}(4;\ -1;\ -2)$;
б) $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$;
в) $\vec{c}(3;\ 0;\ -1)$;
г) $\vec{d}(2;\ 3;\ 1)$;
д) $\vec{m}(2;\ 1;\ 2)$;
е) $\vec{n}(-1;\ 2;\ 0)$;
ж) $\vec{p}(-3;\ -1;\ 2)$;
з) $\vec{q}(3;\ 1;\ -2)$.

439. Знайдзіце вугал паміж вектарамі:

а) $\vec{a}(4;\ -1;\ -2)$ і $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$;
б) $\vec{c}(3;\ 0;\ -1)$ і $\vec{d}(2;\ 3;\ 1)$;
в) $\vec{m}(2;\ 1;\ 2)$ і $\vec{n}(-1;\ 2;\ 0)$;
г) $\vec{p}(-3;\ -1;\ 2)$ і $\vec{q}(3;\ 1;\ -2)$.

440. Ёсць вектары $\vec{a}(4;\ -1;\ -2)$, $\vec{b}(0;\ 3;\ -1)$ і $\vec{c}(3;\ 0;\ -1)$. Параўнайце значэнні:

а) $\left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$;
б) $\left|\vec{a}\right| - \left|\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;
в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$ і $2\left|\vec{c}\right|$;
г) $\left|\vec{c}+\vec{b}\right| + \left|\vec{c}-\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{c}\right| + \left|\vec{b}\right|$.

441. Вызначце, які вугал — востры, прамы або тупы — утварае з каардынатнымі восямі вектар:
а) $\vec{a} = 5\vec{j} - 3\vec{k}$; б) $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j}$; в) $\vec{c} = -3\vec{k}$.

442. Знайдзіце перыметр і большы вугал прасторавага трохвугольніка ABC, калі:
а) $A(3;\ 9;\ -5)$, $B(10;\ 2;\ -5)$, $C(3;\ 2;\ 2)$;
б) $A(-1;\ 5;\ -5)$, $B(-1;\ 5;\ -3)$, $C(0;\ 4;\ -3)$;
в) $A(6;\ 2;\ -4)$, $B(4;\ 4;\ -6)$, $C(4;\ 0;\ -2)$;
г) $A(7;\ -4;\ 3)$, $B(-3;\ 2;\ 5)$, $C(2;\ 0;\ -5)$.

443. Дакажыце, што плошчу прасторавага трохвугольніка можна знайсці па формуле $S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right)}$. Як выкарыстаць гэты факт для таго, каб знайсці адлегласць ад пункта C да прамой AB?

444. Вяршыні A, B і C трохвугольнай піраміды $ABCD$ ляжаць на каардынатных восях, а вяршыня D мае каардынаты $(3;\ 2;\ 1)$. Знайдзіце каардынаты вяршынь A, B і C, улічыўшы, што ўсе плоскія вуглы піраміды пры вяршыні D прамыя.

445. Вызначце, пры якіх значэннях a трохвугольнік ABC з'яўляецца раўнабедраным, улічыўшы, што:
а) $A(3;\ 2;\ -1)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ 0;\ 1)$;
б) $A(2;\ 1;\ a)$, $B(3;\ a;\ 5)$, $C(-1;\ a;\ 3)$.

446. Вызначце, пры якіх значэннях a чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца трапецыяй, улічыўшы, што:
а) $A(4;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(a;\ 4;\ 0)$, $D\ (4;\ 4;\ -1)$;
б) $A(2;\ 3;\ a)$, $B(3;\ a;\ 5)$, $C(1;\ a;\ -2)$, $D\ (-2;\ 1;\ -5)$.

447. Знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD, улічыўшы, што:
а) $A(-2;\ 3;\ 4)$, $B(-1;\ 4;\ 2)$, $C(-3;\ 6;\ 2)$, $D(-3;\ 7;\ 1)$;
б) $A(-1;\ 5;\ 8)$, $B(-2;\ 6;\ 8)$, $C(-11;\ 7;\ -5)$, $D(-9;\ 7;\ -7)$;
в) $A(0;\ 1;\ 2)$, $B(2;\ 0;\ 1)$, $C(-4;\ -2;\ 0)$, $D(0;\ -4;\ -2)$;
г) $A(15;\ -8;\ 7)$, $B(15;\ -7;\ 6)$, $C(12;\ -7;\ -11)$, $D(10;\ -9;\ -13)$.

448. У паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ канты AB, AD і AA_1 роўныя адпаведна 10, 16 і 21, $\angle BAD = \angle A_1AB = 60°$, $\angle DAA_1 = 90°$. Знайдзіце:
а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{C_1D_1}$; е) A_1B;
б) $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{AD_1}$; ж) A_1C;
в) $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{A_1C}$; з) AC_1;
г) $\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{B_1C}$; і) BD_1;
д) BD; к) B_1D.

449. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ бакавыя канты роўныя, $\angle ASB = 60°$, $\angle ASC = 30°$, $\angle BSC = 45°$. Знайдзіце вугал паміж вектарамі:
а) $\overrightarrow{SC}$ і $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{SB}$; в) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AS}$.

450. Дакажыце, што для любых чатырох пунктаў A, B, C, D прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

451. Вяршыні A, D і A_1 правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ маюць каардынаты (1; 0; 0), (−1; 0; 0) і (1; 0; 2) адпаведна. Улічыўшы, што ардыната пункта B дадатная, знайдзіце:

а) каардынаты пунктаў B, C, E_1, F_1;
б) ураўненне плоскасці ADA_1;
в) ураўненне плоскасці ABA_1;
г) ураўненне плоскасці ACE_1;
д) ураўненне плоскасці ACD_1;
е) ураўненне плоскасці ACF_1;
ж) адлегласць ад B да плоскасці ADA_1;
з) адлегласць ад C да плоскасці ABA_1;
і) адлегласць ад B_1 да плоскасці ADA_1;
к) адлегласць ад B_1 да плоскасці ACE_1;
л) адлегласць ад B_1 да плоскасці ACD_1;
м) адлегласць ад E_1 да плоскасці ACF_1.

§ 14. Прымяненне вектараў і каардынат

А) У шэрагу задач умова змяшчае звесткі пра паралельнасць пэўных прамых або пункты перасячэння, адносіны даўжынь паралельных адрэзкаў. Для рашэння такіх задач можа быць карысным прымяненне вектараў, як гэта было пры рашэнні прыкладу 4 з параграфа 12. Пры рашэнні такіх задач дастаткова выкарыстоўваць дзеянні складання вектараў і множання вектара на лік. Разгледзім яшчэ адзін прыклад.

Прыклад 1. Няхай $A_1B_1C_1D_1$ і $A_2B_2C_2D_2$ — паралелаграмы ў прасторы, K, L, M, N — сярэдзіны адрэзкаў A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 адпаведна. Дакажам, што сярэдзіны адрэзкаў KM і LN супадаюць.

Р а ш э н н е. Выберам у прасторы пункт O. Тады становішча кожнага пункта цалкам характарызуецца адпаведным вектарам. З умовы вынікае, што $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ і $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$. Пункты K, L, M, N вызначаюцца вектарамі $\overrightarrow{OK}$, $\overrightarrow{OL}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$: $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}\right)$, $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}\right)$, $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OC_2}\right)$, $\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OD_1}+\overrightarrow{OD_2}\right)$.

Каб даказаць, што сярэдзіны адрэзкаў KM і LN супадаюць, дакажам, што $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. Знаходзім:

$$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{OL}-\overrightarrow{OK}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OA_2}\right),$$

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OD_1} - \overrightarrow{OD_2}\right).$$

А паколькі

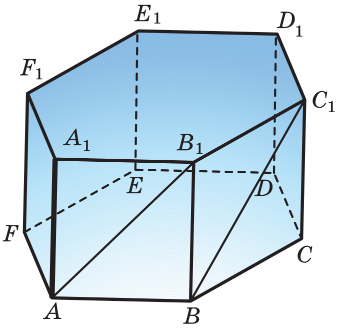
$$\overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OD_1} \text{ і } \overrightarrow{OB_2} - \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2} = \overrightarrow{OC_2} - \overrightarrow{OD_2},$$

то выразы ў дзвюх апошніх дужках прымаюць аднолькавыя значэнні. Патрэбнае сцверджанне даказана.

Б) Пры рашэнні іншых задач мэтазгодна карыстацца скалярным множаннем вектараў. Такімі з'яўляюцца задачы, у якіх неабходна выкарыстоўваць або вызначаць пэўныя адлегласці ці вуглы.

Прыклад 2. Знойдзем вугал паміж скрыжаванымі дыяганалямі суседніх бакавых граняў правільнай шасцівугольнай прызмы, у якой бакавыя грані — квадраты.

Рашэнне. Няхай трэба знайсці вугал паміж прамымі AB_1 і BC_1 (рыс. 370). Шуканы вугал можа супадаць з вуглом паміж вектарамі, паралельнымі дадзеным прамым, або дапаўняць яго да 180°. Таму косінус шуканага вугла супадае з модулем косінуса вугла паміж вектарамі $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$: $\cos\alpha = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1}\right|}{\left|\overrightarrow{AB_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC_1}\right|}$. Выразім вектары $\overrightarrow{AB_1}$ і $\overrightarrow{BC_1}$ праз некампланарныя вектары



Рыс. 370

$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$: $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$. Прымем даўжыню канта прызмы за a і знойдзем скалярны здабытак вектараў:

$$\overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right) = \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BB_1} =$$

$$= a^2 \cos 90° + a^2 \cos 0° - a^2 \cos 120° - a^2 \cos 90° = 1{,}5\, a^2.$$

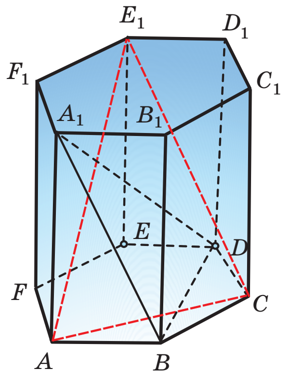
А паколькі $\left|\overrightarrow{AB_1}\right| = AB_1 = BC_1 = \left|\overrightarrow{BC_1}\right| = a\sqrt{2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{3}{4} \text{ і } \alpha = \arccos\frac{3}{4}.$$

Адказ: $\arccos\dfrac{3}{4}$.

Скалярны здабытак вектараў можна выкарыстаць і для знаходжання вугла паміж плоскасцямі. Як пры вызначэнні вугла паміж прамымі, так і пры вызначэнні вугла α паміж плоскасцямі можна выкарыстаць вектары $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$, толькі перпендыкулярныя разгляданым плоскасцям:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}\right|}{\left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right|}.$$



Рыс. 371

Прыклад 3. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты маюць даўжыню 1 (рыс. 371). Знойдзем вугал α паміж плоскасцямі ACE_1 і A_1BD.

Рашэнне. Для атрымання адказу трэба вызначыць вектары $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$, перпендыкулярныя плоскасцям ACE_1 і A_1BD адпаведна. Яны павінны адпавядаць умовам $\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{AE_1} = 0$ і $\overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{N_2} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 0$.

Выкарыстаем прамавугольную дэкартаву сістэму каардынат, пачатак якой знаходзіцца ў цэнтры O асновы $ABCDEF$, і пункты A, A_1 і B маюць каардынаты (1; 0; 0), (1; 0; 1) і $\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ адпаведна. Тады пункты C, D і E_1 будуць мець каардынаты $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, (–1; 0; 0) і $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$ адпаведна.

Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE_1}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{DA_1}$ па каардынатах іх канцавых пунктаў:

$$\overrightarrow{AC}\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ \overrightarrow{AE_1}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right),\ \overrightarrow{BD}\left(-\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),\ \overrightarrow{DA_1}(2;\ 0;\ 1).$$

Паколькі $\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{AE_1} = 0$, то каардынаты $(a_1;\ b_1;\ c_1)$ вектара $\overrightarrow{N_1}$ праўдзяць умовы

$$a_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b_1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + c_1 \cdot 0 = 0 \ \text{ і } \ a_1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b_1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_1 \cdot 1 = 0.$$

Гэтым умовам задавальняюць лікі $a_1 = 1$, $b_1 = \sqrt{3}$, $c_1 = 3$. Таму ў якасці вектара, перпендыкулярнага плоскасці ACE_1, можна ўзяць вектар $\overrightarrow{N_1}(1;\ \sqrt{3};\ 3)$.

Для вызначэння вектара $\overrightarrow{N_2}$ дзейнічаць будзем аналагічна. Каардынаты $(a_2;\ b_2;\ c_2)$ вектара $\overrightarrow{N_2}$, перпендыкулярнага плоскасці A_1BD, праўдзяць умовы $a_2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + b_2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + c_2 \cdot 0 = 0$ і $2a_2 + 0b_2 + c_2 = 0$, якім задавальняюць лікі $a_2 = -1$, $b_2 = \sqrt{3}$, $c_2 = 2$. Таму $\overrightarrow{N_2}(-1;\ \sqrt{3};\ 2)$.

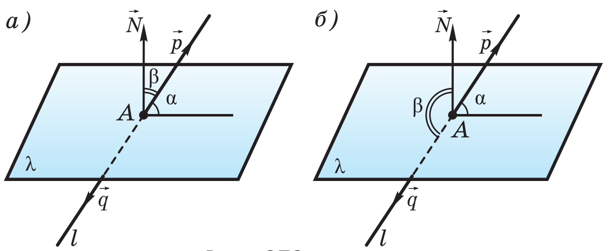
Выкарыстаем роўнасць $\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = \left|\overrightarrow{N_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{N_2}\right| \cdot \cos\alpha$. Паколькі вугал α паміж вектарамі $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$ або супадае з вуглом φ паміж плоскасцямі ACE_1 і A_1BD, або дапаўняе яго да 180°, то $\cos\varphi = |\cos\alpha| = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{|N_1| \cdot |N_2|}$. Знаходзім:

$$\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2} = 1 \cdot (-1) + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 3 \cdot 2 = 8,\ \left|\overrightarrow{N_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_1}} = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{13},$$

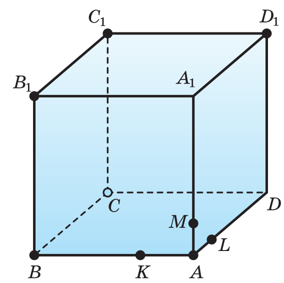
$$\left|\overrightarrow{N_2}\right| = \sqrt{\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{N_2}} = \sqrt{(-1)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2},\ \cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

Адказ: $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{26}}$.

Для знаходжання вугла паміж прамой і плоскасцю таксама можна выкарыстаць вектары, адзін з якіх паралельны прамой, а другі перпендыкулярны плоскасці. Вугал β паміж гэтымі вектарамі звязаны з вуглом α паміж прамой і плоскасцю роўнасцю $\sin\alpha = |\cos\beta|$ (рыс. 372).



Рыс. 372



Рыс. 373

Прыклад 4. На кантах AB, AD і AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ адзначаны пункты K, L і M так, што $AK : KB = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 3$, $AM : MA_1 = 1 : 4$ (рыс. 373). Знойдзем вугал α паміж прамой AC_1 і плоскасцю KLM.

Рашэнне. Прымем пункт A за пачатак сістэмы каардынат, каардынатныя восі накіруем па кантах куба, узяўшы канты за адзінкавыя адрэзкі. Тады вызначацца каардынаты патрэбных пунктаў: $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 1;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 1)$, $C_1(1;\ 1;\ 1)$, $K\left(\frac{1}{3};\ 0;\ 0\right)$, $L\left(0;\ \frac{1}{4};\ 0\right)$ і $M\left(0;\ 0;\ \frac{1}{5}\right)$.

Па тэарэме **3** з параграфа **13** ураўненне плоскасці KLM мае выгляд $ax + by + cz + d = 0$, а паколькі каардынаты пунктаў K, L і M задавальняюць ураўненню $3x + 4y + 5z - 1 = 0$, то гэта ўраўненне і ёсць ураўненне плоскасці KLM, а вектар $\overrightarrow{N}\,(3;\ 4;\ 5)$ гэтай плоскасці перпендыкулярны. Прамой AC_1 паралельны вектар $\overrightarrow{AC_1}\,(1;\ 1;\ 1)$. Знаходзім:

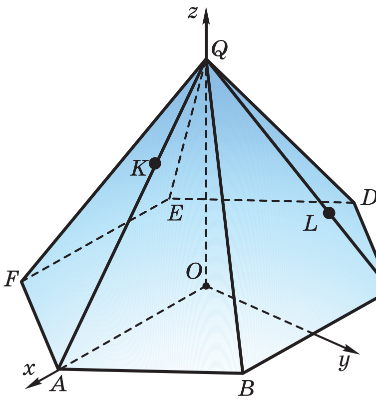
$$\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{AC_1} = 3\cdot1 + 4\cdot1 + 5\cdot1 = 12,\ \left|\overrightarrow{N}\right| = \sqrt{\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{N}} = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$\left|\overrightarrow{AC_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3},\ \sin\alpha = \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}\ \text{і}\ \alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Адказ: $\arcsin\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$.

В) У папярэднім параграфе абмяркоўвалася выкарыстанне каардынат для вылічэння адлегласці ад пункта да прамой. Разгледзім рашэнне яшчэ дзвюх задач на знаходжанне адлегласцей: ад пункта да прамой і адлегласці паміж скрыжаванымі прамымі.

Прыклад 5. У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $QABCDEF$ усе канты асновы маюць даўжыню 3, яны ўдвая карацейшыя за бакавыя канты. На кантах QA і QC адзначаны пункты K і L так, што $QK : KA = 1 : 2$, $QL : LC = 2 : 1$. Знойдзем адлегласць d ад пункта E да прамой KL.



Рыс. 374

Р а ш э н н е. Няхай O — цэнтр асновы $ABCDEF$. Паколькі $OA = OB = AB = 3$, $AQ = 6$ і $OQ \perp OA$, то з прамавугольнага трохвугольніка AOQ знаходзім:

$$OQ = \sqrt{AQ^2 - AO^2} = 3\sqrt{3}.$$

Выкарыстаем прамавугольную дэкартаву сістэму каардынат, пачатак якой знаходзіцца ў цэнтры O асновы $ABCDEF$, восі абсцыс і аплікат праходзяць праз пункты A і Q адпаведна і пункт B мае неадмоўныя каардынаты (рыс. 374). Пункты A, Q і B маюць каардынаты $(3;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 3\sqrt{3})$ і $\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ адпаведна. Тады пункты E, K і L будуць мець каардынаты $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $\left(1; 0; 2\sqrt{3}\right)$ і $\left(-1; \sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$ адпаведна. Знойдзем каардынаты вектараў $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{KE}$ па каардынатах іх канцавых пунктаў:

$$\overrightarrow{KL}\left(-2; \sqrt{3}; -\sqrt{3}\right),\ \overrightarrow{KE}\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}; -2\sqrt{3}\right).$$

Шуканая адлегласць ёсць даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта E на прамую KL і роўная вышыні ў трохвугольніку KLE, праведзенай з пункта E. Для яе знаходжання можна выкарыстаць формулу $d = \frac{2S_{KLE}}{KL}$. Паколькі $2S_{KLE} = KL \cdot KE \cdot \sin LKE$, $KL = \left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KL}}$,

$KE = \left|\overrightarrow{KE}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KE} \cdot \overrightarrow{KE}}$ і $\sin LKE = \sqrt{1 - \cos^2 LKE} = \sqrt{1 - \left(\frac{\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE}}{\left|\overrightarrow{KL}\right| \cdot \left|\overrightarrow{KE}\right|}\right)^2}$, то

$$2S_{KLE} = \sqrt{\overrightarrow{KL}^2 \cdot \overrightarrow{KE}^2 - \left(\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE}\right)^2}.$$

Цяпер знаходзім: $\overrightarrow{KL}^2 = (-2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 = 10,$

$$\overrightarrow{KE}^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-2\sqrt{3}\right)^2 = 25,$$

$$\overrightarrow{KL} \cdot \overrightarrow{KE} = (-2)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2\sqrt{3}\right) = \frac{13}{2},$$

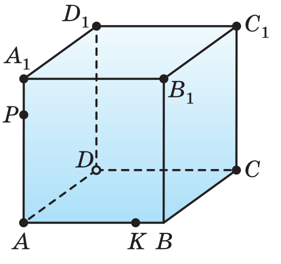
$$2S_{KLE} = \sqrt{10\cdot 25 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{831}}{2},\ d = \frac{2S_{KLE}}{KL} = \frac{\sqrt{831}}{2\cdot\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{8310}}{20}.$$

Адказ: $\frac{\sqrt{8310}}{20}$.

Прыклад 6. Вымярэнні AB, BC і AA_1 прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўныя 5, 4 і 4 адпаведна. Пункты K і P на кантах AB і AA_1 выбраны так, што $AK : KB = 4 : 1$, $AP : PA_1 = 3 : 1$ (рыс. 375). Знойдзем адлегласць d паміж прамымі BP і KD_1.

Рашэнне. Адлегласць паміж скрыжаванымі прамымі BP і KD_1 можна знайсці як адлегласць ад якога-небудзь пункта прамой KD_1 да плоскасці β, што праходзіць праз BP паралельна KD_1.

Прымем пункт A за пачатак сістэмы каардынат, каардынатныя восі накіруем па кантах паралелепіпеда так, каб пункты A, B і D мелі каардынаты (0; 0; 0), (0; 5; 0), (4; 0; 0) адпаведна. Тады $D_1(4; 0; 4)$, $K(0; 4; 0)$, $P(0; 0; 3)$. Каб запісаць ураўненне плоскасці β, знойдзем каардынаты вектара $\overrightarrow{N}$, перпендыкулярнага як вектару $\overrightarrow{BP}$, так і вектару $\overrightarrow{KD_1}$. Паколькі $\overrightarrow{BP}(0; 5; -3)$, $\overrightarrow{KD_1}(4; -4; 4)$, то каардынаты $(a; b; c)$ вектара $\overrightarrow{N}$ павінны праўдзіць роўнасці $5b - 3c = 0$ і $4a - 4b + 4c = 0$. Можна ўзяць $\overrightarrow{N}(-2; 3; 5)$.



Рыс. 375

Цяпер запішам ураўненне плоскасці β, выкарыстаўшы каардынаты пункта P: $-2(x - 0) + 3(y - 0) + 5(z - 3) = 0$. Для знаходжання адлегласці d выкарыстаем тэарэму 4 з параграфа 13:

$$d = \frac{\left|-2\cdot 0 + 3\cdot 4 + 5\cdot 0 - 15\right|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{38}}.$$

Адказ: $\frac{3}{\sqrt{38}}$.

?

1. Патлумачце, пры рашэнні якіх задач можна выкарыстоўваць дзеянні складання вектараў і множання вектара на лік.
2. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж дзвюма прамымі.
3. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж дзвюма плоскасцямі.
4. Патлумачце, як можна знаходзіць вугал паміж прамой і плоскасцю.

5. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць ад пункта да прамой.

6. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць паміж дзвюма паралельнымі прамымі.

7. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць ад пункта да плоскасці.

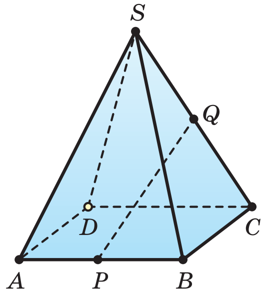
8. Патлумачце, як можна знаходзіць адлегласць паміж дзвюма скрыжаванымі прамымі.

452. У трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ медыяны асноў перасякаюцца ў пунктах M і M_1. Вызначце, у якой адносіне адрэзак MM_1 раздзяляецца плоскасцю ABC_1.

453. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ медыяны асновы перасякаюцца ў пункце M, пункт Q на канце SC такі, што $SQ : QC = k$. Вызначце, у якой адносіне адрэзак SM раздзяляецца плоскасцю ABQ, улічыўшы, што:

а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = 0{,}5$.

454. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць паралелаграм $ABCD$, пункты P і Q — сярэдзіны кантаў AB і SC адпаведна (рыс. 376). Вызначце, у якой адносіне адрэзак PQ раздзяляецца плоскасцю SBD.



Рыс. 376

455. Плоскасць праходзіць праз дыяганаль BF асновы правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ паралельна дыяганалі AD_1. Знайдзіце адносіну, у якой гэта плоскасць раздзяляе бакавыя канты прызмы.

456. У паралелепіпедзе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прамых BA_1 і CB_1 адзначаны пункты M і P так, што прамая MP паралельная AC_1. Знайдзіце адносіну $MP : AC_1$.

457. Ёсць паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На прамых BA_1 і CB_1 адзначаны пункты M і P так, што $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BA_1}$ і $\overrightarrow{CP} = k \cdot \overrightarrow{CB_1}$. Дакажыце, што прамая MP паралельная адной з граняў паралелепіпеда.

458. Пункты M і K — сярэдзіны старон AB і CD пластаравага чатырохвугольніка $ABCD$. Дакажыце, што $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

459. На кантах AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ выбраны пункты P і Q так, што $AP : PB = CQ : QD = 2$. Дакажыце, што прамыя AC, BD і PQ паралельныя адной плоскасці.

460. На кантах AB і CD трохвугольнай піраміды $ABCD$ выбраны пункты P і Q так, што $AP : PB = CQ : QD = k$. Выразіце вектар $\overrightarrow{PQ}$ праз вектары $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$.

461. Дакажыце, што тры прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны супрацьлеглых кантаў трохвугольнай піраміды, перасякаюцца ў адным пункце.

462. Для пунктаў A, B, C, D і M прасторы выконваецца роўнасць $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$. Дакажыце, што тры прамыя, якія праходзяць праз сярэдзіны адрэзкаў AB і CD, AC і BD, AD і BC, праходзяць праз пункт M.

463. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ медыяны асновы ABC перасякаюцца ў пункце M, на кантах SA, SB, SC выбраны пункты A_1, B_1, C_1. Плоскасць $A_1B_1C_1$ перасякае адрэзак SM у пункце M_1. Дакажыце, што $\frac{SA}{SA_1}+\frac{SB}{SB_1}+\frac{SC}{SC_1}=3\cdot\frac{SM}{SM_1}$.

464. Пункты M і K — сярэдзіны старон AB і CD прасторавага чатырохвугольніка $ABCD$. Плоскасць, якая праходзіць праз пункты M і K, перасякае адрэзкі BC і AD у пунктах N і L адпаведна. Дакажыце, што:

а) $BN : ND = AL : LD$;

б) адрэзак NL раздзяляецца прамой MK папалам.

465. У прасторы зададзены пункты A, B, C, D, пункты K, L, M, N выбраны так, што $\overrightarrow{AK}:\overrightarrow{KB}=a$, $\overrightarrow{BL}:\overrightarrow{LC}=b$, $\overrightarrow{CM}:\overrightarrow{MD}=c$, $\overrightarrow{DN}:\overrightarrow{NA}=d$. Дакажыце, што пункты K, L, M, N ляжаць у адной плоскасці тады і толькі тады, калі $abcd = 1$.

466. Прамая l перасякае плоскасці граняў ABC, ABD, ACD і BCD трохвугольнай піраміды $ABCD$ у пунктах D_1, C_1, B_1 і A_1 адпаведна. Дакажыце, што сярэдзіны адрэзкаў AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 ляжаць у адной плоскасці.

467. Праз сярэдзіну вышыні правільнай трохвугольнай піраміды праходзіць плоскасць, паралельная бакавой грані. У якой адносіне яна раздзяляе іншыя канты?

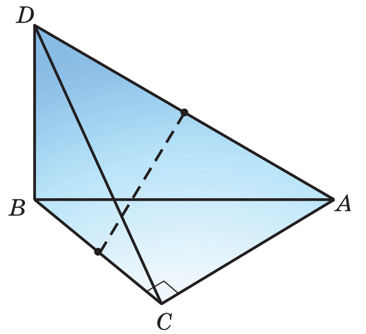
468. У аснове прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік з прамым вуглом C. Пункт M — сярэдзіна канта AB, $AM = AA_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) A_1C і MB_1; б) AC_1 і MB_1.

469. Праз сярэдзіну K канта AD трохвугольнай піраміды $ABCD$ праведзена плоскасць, паралельная кантам AB і CD. Яна перасякае кант BC у пункце M. Ведаючы, што $AB = 8$, $CD = 6$, $KM = 5$, знайдзіце вугал паміж прамымі AB і CD.

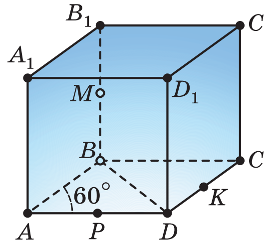
470. У правільнай трохвугольнай прызме бакавы кант удвая меншы за кант асновы. Знайдзіце вугал паміж скрыжаванымі дыяганалямі суседніх граняў.

471. У аснове трохвугольнай піраміды $ABCD$ ляжыць раўнабедраны трохвугольнік ABC з прамым вуглом C. Вядома, што $AC = BD$ і кант BD перпендыкулярны плоскасці асновы (рыс. 377). Знайдзіце вугал паміж прамой BD і прамой, што праходзіць праз сярэдзіны кантаў AD і BC.



Рыс. 377

472. У правільнай трохвугольнай прызме бакавы кант удвая большы за кант асновы. Знайдзіце вугал паміж скрыжаванымі дыяганалямі суседніх граняў.



Рыс. 378

473. Пункт M — сярэдзіна канта SA піраміды $SABCD$, у аснове якой ляжыць квадрат $ABCD$. Кант SB перпендыкулярны плоскасці асновы, $SB : BC = \sqrt{11}$. Знайдзіце вугал паміж прамымі CM і AD.

474. Пункты M, K і P на кантах AA_1, BC і C_1D_1 правільнай чатырохвугольнай прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ выбраны так, што $AM = MA_1 = AD$, $BK = KC$, $C_1P = PD_1$. Знайдзіце косінус вугла паміж прамымі:

а) BM і C_1K; в) CM і PK;
б) AP і MC_1; г) D_1K і MC_1.

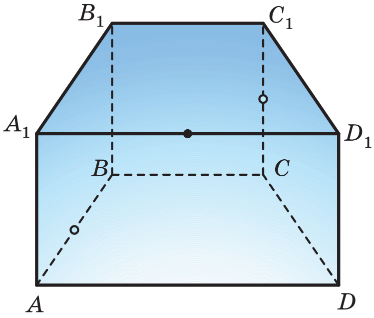
475. Дыяганалі асновы прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перасякаюцца пад вуглом $60°$, яго вышыня AA_1 роўная меншаму канту BC асновы $ABCD$. Пункты M, P і K — сярэдзіны кантаў AA_1, C_1D_1 і BC адпаведна. Знайдзіце косінус вугла паміж прамымі:

а) A_1K і MC_1; в) CP і MK;
б) DM і A_1K; г) BP і MC_1.

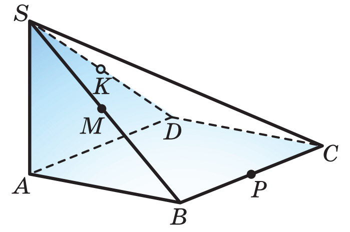
476. У аснове прамой прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць ромб $ABCD$ з вуглом A ў $60°$, меншая дыяганаль якога роўная бакавому канту. Пункты K, M, і P — сярэдзіны кантаў CD, BB_1 і AD адпаведна (рыс. 378). Знайдзіце косінус вугла паміж прамымі:

а) AC_1 і MK; в) MP і A_1C;
б) PC_1 і A_1K; г) DM і AK.

477. Раўнабедраная трапецыя $ABCD$, у якой $AB = BC = CD = 0{,}5AD$, з'яўляецца асновай прамой прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Улічыўшы, што



Рыс. 379



Рыс. 380

пункты M, P і K — сярэдзіны кантаў AB, CC_1 і A_1D_1 адпаведна і $BC = CC_1$ (рыс. 379), знайдзіце косінус вугла паміж прамымі:

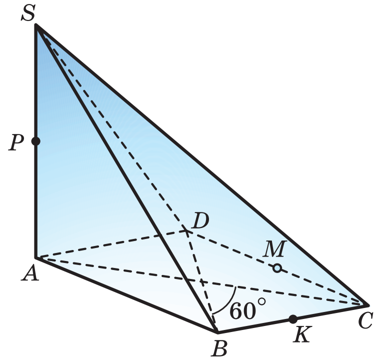
а) CK і MP; б) PK і MD; в) AP і BK; г) DP і MK.

478. Бакавы кант SA піраміды $SABCD$ перпендыкулярны яе аснове і роўны старане квадрата $ABCD$. Пункты M, P і K — сярэдзіны кантаў SB, BC і SD адпаведна (рыс. 380).
Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) PM і BK; в) SP і CK;
б) CM і KP; г) DP і BK.

479. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць прамавугольнік, дыяганалі якога перасякаюцца пад вуглом $60°$, вышыня SA піраміды роўная большаму канту AB асновы $ABCD$. Пункты P, K і M — сярэдзіны кантаў SA, BC і CD адпаведна (рыс. 381). Знайдзіце вугал паміж прамымі:

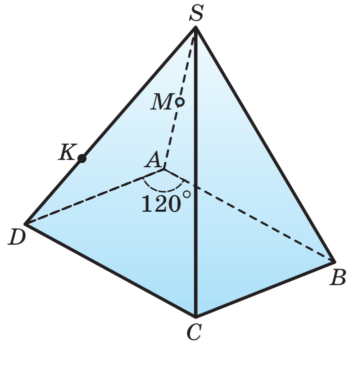
а) AB і KP; в) CP і AD;
б) PM і SK; г) MK і BP.



Рыс. 381

480. У аснове піраміды $SABCD$ ляжыць ромб з вуглом C у $120°$, кант SC перпендыкулярны плоскасці асновы, $SC = CD$. Пункт M — сярэдзіна канта SA, пункт K на канце SD дзеліць яго ў адносіне $2 : 1$, калі лічыць ад вяршыні S (рыс. 382). Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) MD і CK; в) KB і MC;
б) CM і SK; г) CP і AD.



Рыс. 382

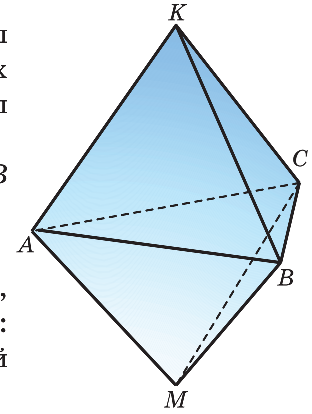
481. У аснове прамой прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць раўнабедраная трапецыя з асновамі AD і BC, $AD = 2BC = 2AB = AA_1$. Знайдзіце вугал паміж прамымі:

а) AB і DB_1; б) CD_1 і DB_1.

482. Дзве правільныя трохвугольныя піраміды $KABC$ і $MABC$ ляжаць па розныя бакі ад іх агульнай асновы ABC. Усе плоскія вуглы пры вяршынях K і M прамыя (рыс. 383).

а) Дакажыце, што вугал паміж плоскасцямі AKB і AMB роўны вуглу паміж прамымі CK і CM.

б) Знайдзіце вугал паміж прамымі AK і BM.



Рыс. 383

483. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ вуглы BSC, ASC і ASB роўныя α, β і γ адпаведна. Выразіце:

а) косінус вугла паміж прамой SA і бісектрысай вугла BSC;

б) косінус вугла паміж бісектрысамі вуглоў BSC і ASC.

484. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты роўныя a. Знайдзіце вугал паміж прамой BC_1 (рыс. 384) і прамой:

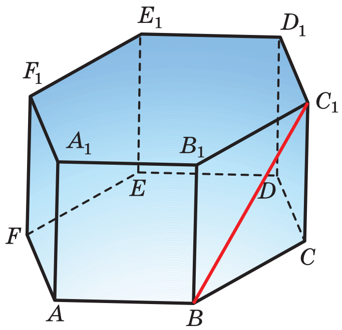
а) E_1C; в) A_1F; д) BF_1;
б) F_1E; г) A_1C; е) A_1D.

485. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце вугал паміж прамой AE_1 (рыс. 385) і прамой:

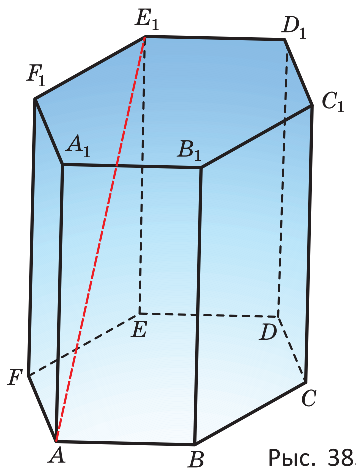
а) B_1D; в) A_1C; д) F_1C;
б) A_1D_1; г) A_1D; е) DB_1.

486. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ усе канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць паміж прамой BC_1 (рыс. 386) і прамой:

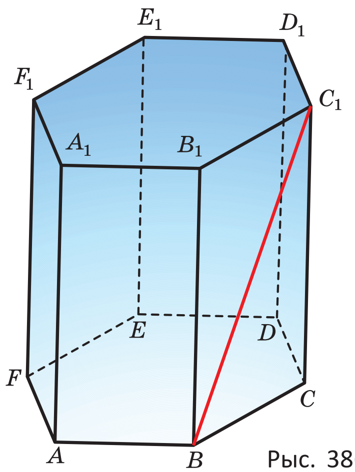
а) B_1E; в) B_1D; д) A_1E;
б) F_1C; г) A_1C; е) F_1D.



Рыс. 384



Рыс. 385



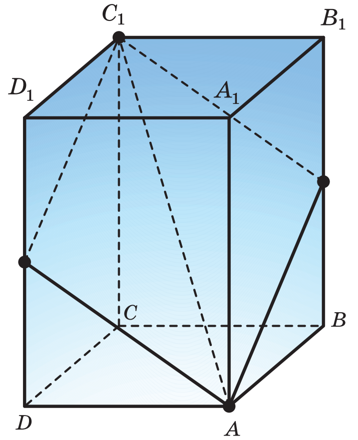
Рыс. 386

487. У правільнай шасцівугольнай прызме ўсе канты асновы роўныя 1, бакавыя канты — 2. Знайдзіце адлегласць паміж прамой AE_1 (гл. рыс. 385) і прамой:

а) B_1D; в) A_1C; д) F_1C;
б) A_1D_1; г) A_1D; е) F_1B.

488. У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ кант асновы складае $\frac{2}{3}$ бакавога канта. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі ABC і A_1BC_1.

489. Праз дыяганаль AC_1 правільнай чатырохвугольнай прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ праходзіць плоскасць α, паралельная прамой BD. Ведаючы, што $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{2}$ (рыс. 387), знайдзіце вугал паміж плоскасцю α і плоскасцю ABC.



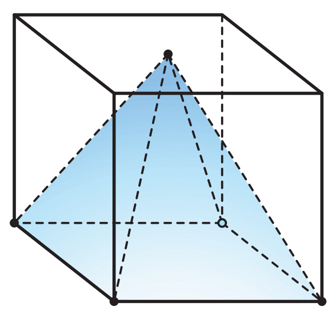
Рыс. 387

490. Усе канты піраміды $ABCD$ роўныя, K і M — сярэдзіны кантаў BD і CD адпаведна. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) AKC і ABD;
б) ABC і ABD;
в) ABC і AKM.

491. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ усе канты роўныя, M — сярэдзіна бакавога канта SA. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) ABS і CDS; г) ABS і ADS;
б) ABC і ADS; д) ABC і BCM;
в) ABC і BDM; е) ABS і BDM.



Рыс. 388

492. Аснова піраміды супадае з адной гранню куба, а яе вяршыня — з цэнтрам супрацьлеглай грані (рыс. 388). Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) супрацьлеглых бакавых граняў піраміды;
б) асновы і бакавой грані піраміды;
в) суседніх бакавых граняў піраміды.

493. У правільнай чатырохвугольнай пірамідзе $SABCD$ на сярэдзіне канта SA адзначаны пункт M. Ведаючы, што трохвугольнік SBD з'яўляецца правільным, знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) ABS і CDS; в) SAB і BDM;
б) ABC і BDM; г) SBC і BDM.

494. У правільнай чатырохвугольнай прызме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кант асновы роўны 2, бакавы кант роўны 3, пункт K на канце AA_1 адзначаны так, што $AK : KA_1 = 1 : 2$. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) ABC і BKC_1; б) AA_1C і BKC_1; в) ABC і BKD_1.

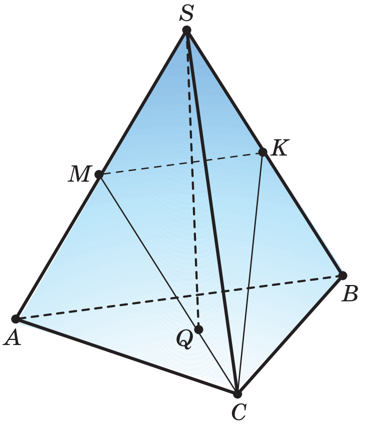
495. У правільнай шасцівугольнай прызме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ дыяганаль AC асновы ўтрая большая за бакавы кант. Знайдзіце вугал паміж плоскасцямі:

а) ACA_1 і B_1CE_1; б) ABC і B_1CE_1; в) ADE_1 і A_1FD.

496. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ пункт M — сярэдзіна канта SA, пункт K — сярэдзіна канта SB, Q — пункт перасячэння медыян асновы ABC.

а) Знайдзіце адносіну, у якой плоскасць MKC раздзяляе адрэзак SQ (рыс. 389).

б) Прыняўшы, што піраміда правільная і $AB : SA = 2 : 3$, знайдзіце вугал паміж плоскасцямі MKC і ABC.



Рыс. 389

497. У кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайдзіце вугал паміж:

а) прамой AA_1 і плоскасцю BC_1D;
б) прамой AC_1 і плоскасцю BDD_1;
в) прамой AB і плоскасцю BC_1A_1;
г) прамой AA_1 і плоскасцю BC_1D.

498. У правільнай трохвугольнай прызме $ABCA_1B_1C_1$ пункт M — сярэдзіна канта BC, $AA_1 : AB = 1 : \sqrt{2}$. Знайдзіце вугал паміж:

а) прамой MC_1 і плоскасцю ABB_1;
б) прамой AB і плоскасцю A_1MC_1.

499. У правільнай чатырохвугольнай прызме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AD, AB і A_1B_1 адпаведна. Калі вядома, што $AA_1 : AB = \sqrt{6} : 1$, знайдзіце вугал паміж:

а) прамой DD_1 і плоскасцю KPM;
б) прамой AC_1 і плоскасцю KPM.

500. У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ пункт M — сярэдзіна канта SA, $MA = AB$. Знайдзіце вугал паміж:

а) прамой BM і плоскасцю SDM;
б) прамой AC і плоскасцю BDM.

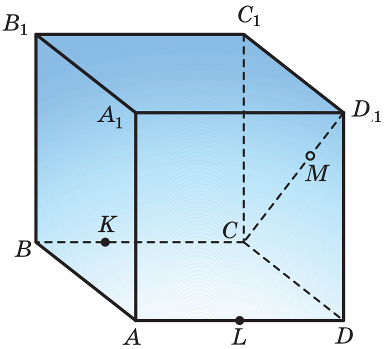
501. Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ роўныя, пункт M — сярэдзіна канта BB_1. Знайдзіце вугал паміж:

а) прамой AA_1 і плоскасцю BCE_1;
б) прамой BC_1 і плоскасцю AFF_1;

в) прамой BD_1 і плоскасцю ABB_1;
г) прамой BE_1 і плоскасцю ABB_1;
д) прамой AM і плоскасцю AE_1D;
е) прамой DM і плоскасцю CEF_1;
ж) прамой EM і плоскасцю CDF_1;
з) прамой DM і плоскасцю AFC_1.

502. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя, пункт K — сярэдзіна канта SD. Знайдзіце вугал паміж:
а) прамой AK і плоскасцю ABC;
б) прамой BK і плоскасцю BSC;
в) прамой BK і плоскасцю ASD;
г) прамой SA і плоскасцю SCD.

503. На кантах BC, AD і дыяганалі грані CD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ адзначаны пункты K, L і M так, што $BK : KC = 1 : 2$, $AL : LD = 1 : 1$, $CM : MD_1 = 2 : 1$. Кант куба роўны 3 (рыс. 390). Знайдзіце адлегласць d ад пункта:
а) A_1 да прамой KM;
б) M да прамой A_1K;
в) L да прамой BM;
г) K да прамой AM;
д) L да прамой AM;
е) K да прамой LM.



Рыс. 390

504. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AD, AB і A_1B_1 адпаведна. Знайдзіце адлегласць d ад пункта:

а) A да прамой PC_1;
б) A да прамой KB_1;
в) C да прамой KM;
г) D да прамой MP;
д) M да прамой D_1P;
е) K да прамой B_1P;
ж) P да прамой MD_1;
з) K да прамой A_1C.

505. Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ роўныя a, пункт M — сярэдзіна канта AA_1. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) A да прамой BC_1;
б) A_1 да прамой BF_1;
в) D_1 да прамой AE_1;
г) D да прамой AE_1;
д) M да прамой BE_1;
е) M да прамой BF_1;
ж) M да прамой FD_1;
з) M да прамой F_1C.

506. Усе канты правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя a, пункты K і M — сярэдзіны кантаў CD і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) A да прамой BM; в) K да прамой BM;
б) A да прамой CM; г) A да прамой MK.

507. У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ пункт M — сярэдзіна канта SA, $MA = AB = a$. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) M да прамой BC; д) F да прамой BM;
б) M да прамой BD; е) F да прамой CM;
в) M да прамой CD; ж) E да прамой BM;
г) C да прамой ME; з) E да прамой CM.

508. Усе канты асновы правільнай чатырохвугольнай піраміды $SABCD$ роўныя a, бакавыя канты роўныя $2a$, пункты K і M — сярэдзіны кантаў BC і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) A да плоскасці SCD; в) K да плоскасці BMA;
б) A да плоскасці BCM; г) C да плоскасці AMK.

509. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ усе плоскія вуглы пры вяршыні S прамыя, канты SA, SB і SC роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце:

а) вышыню піраміды, праведзеную з вяршыні S;
б) даўжыню адрэзка SK, дзе K — пункт плоскасці ABC, роўнаадлеглы ад трох іншых граняў піраміды.

510. У трохвугольнай пірамідзе $SABC$ усе плоскія вуглы пры вяршыні S прамыя, канты SA, SB і SC роўныя a, b і c адпаведна. Знайдзіце:

а) радыус апісанага каля піраміды шара;
б) радыус умежанага ў піраміду шара.

511. У правільнай шасцівугольнай пірамідзе $SABCDEF$ пункты M і K — сярэдзіны кантаў SA і SC адпаведна, $MA = AB = a$. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) M да плоскасці BEK; д) M да плоскасці BDK;
б) M да плоскасці ACK; е) A да плоскасці BKF;
в) E да плоскасці BMK; ж) F да плоскасці BMK;
г) B да плоскасці KMD; з) M да плоскасці ABK.

512. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AD, AB і A_1B_1 адпаведна. Знайдзіце адлегласць d ад пункта:

а) A да прамой PC_1; д) M да прамой D_1P;
б) A да прамой KB_1; е) K да прамой B_1P;
в) C да прамой KM; ж) P да прамой MD_1;
г) D да прамой MP; з) K да прамой A_1C.

513. Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ роўныя a, пункт M — сярэдзіна канта AA_1. Знайдзіце адлегласць ад пункта:

а) A да плоскасці BCE_1;
б) A_1 да плоскасці BCF_1;
в) D_1 да плоскасці ACE_1;
г) F да плоскасці ACE_1;
д) M да плоскасці BCE_1;
е) M да плоскасці BCF_1;
ж) M да плоскасці ACE_1;
з) M да плоскасці AFC_1.

514. У пірамідзе $ABCD$ усе канты роўныя a, пункты M, K і P — сярэдзіны кантаў AB, AC і BD адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AC і BD;
б) MP і AC;
в) AB і KP;
г) BC і MD;
д) AK і CM;
е) AP і CM.

515. У правільнай пірамідзе $SABCD$ усе канты роўныя a, пункты K і M — сярэдзіны кантаў AB і SD адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AC і SB;
б) BC і SA;
в) AD і KM;
г) SB і MC;
д) MK і CB;
е) AM і CK.

516. У аснове прамой чатырохвугольнай прызмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ляжыць ромб, $\angle BCD = 60°$, $AB = 2$, $AA_1 = AC$, пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AD, AB і A_1B_1 адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AC і MB_1;
б) BC і PC_1;
в) KM і CD;
г) KP і MC;
д) MD_1 і C_1K;
е) C_1P і DM.

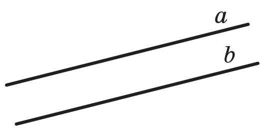
517. Усе канты правільнай шасцівугольнай прызмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ роўныя a, пункты K, P, M — сярэдзіны кантаў AF, DE і BB_1 адпаведна. Знайдзіце адлегласць паміж прамымі:

а) AC і MP;
б) BC і PC_1;
в) KM і CD;
г) KP і MC;
д) MD_1 і KP;
е) C_1P і DM.

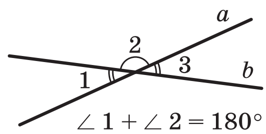
ДАВЕДАЧНЫ МАТЭРЫЯЛ

Дзве прамыя

Дзве прамыя a і b могуць быць паралельнымі (рыс. 382) або перасякальнымі (рыс. 383).



Рыс. 382



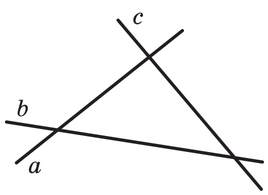
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 = \angle 3$

Рыс. 383

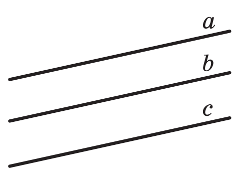
Перасякальныя прамыя раздзяляюць плоскасць на чатыры вуглы, пары якіх маюць спецыяльныя назвы. Вуглы 1 і 2, якія маюць агульную старану, называюць *сумежнымі*, а вуглы 1 і 3, стораны кожнага з якіх з'яўляюцца працягамі старон другога вугла, — *вертыкальнымі*. Сумежныя вуглы разам складаюць 180°, а вертыкальныя вуглы роўныя адзін аднаму.

Тры прамыя

Сярод трох прамых a, b, c можа не быць паралельных прамых (рыс. 384) або такія прамыя могуць быць. Калі паралельныя прамыя a і b ёсць, то трэцяя прамая c можа быць паралельнай ім (рыс. 385) або перасякаць іх (рыс. 386).

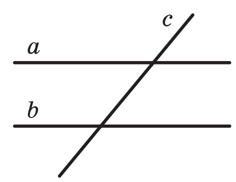


Рыс. 384



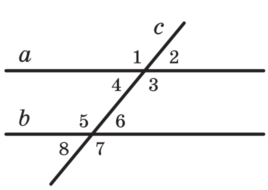
Калі $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.
Калі $a \parallel b$ і $a \parallel c$, то $b \parallel c$.

Рыс. 385

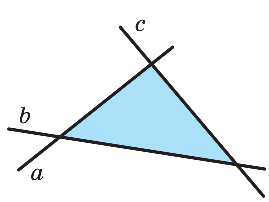


Рыс. 386

Калі дзве прамыя a і b перасечаны трэцяй прамой, то ўтвараюцца 8 вуглоў (рыс. 387). Вуглы 1 і 5, 2 і 6, 3 і 7, 4 і 8 называюцца *адпаведнымі*, вуглы 3 і 5, 4 і 6 — *унутранымі накрыжлеглымі*, вуглы 3 і 6, 4 і 5 — *унутранымі аднабаковымі*.



Рыс. 387



Рыс. 388

Уласцівасці паралельных прамых: калі прамыя a і b паралельныя, то пры перасячэнні іх трэцяй прамой адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180°.

Прыметы паралельных прамых: прамыя a і b паралельныя, калі пры перасячэнні іх трэцяй прамой адпаведныя вуглы роўныя, унутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, а ўнутраныя аднабаковыя разам складаюць 180°.

Тры папарна перасякальныя прамыя абмяжоўваюць на плоскасці трохвугольнік (рыс. 388).

Трохвугольнік

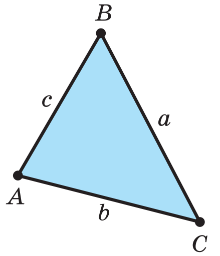
Уласцівасці трохвугольніка (рыс. 389):

- сума ўнутраных вуглоў роўная 180°:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°;$$

- кожная старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон і большая за іх рознасць:

$$b - c < a < b + c;$$
$$a - c < b < a + c;$$
$$a - b < c < a + b;$$



Рыс. 389

- большаму вуглу адпавядае большая супрацьлеглая старана: калі

$$\angle A > \angle C, \text{ то } a > c;$$

- большай старане адпавядае большы супрацьлеглы вугал:

$$\text{калі } a > c, \text{ то } \angle A > \angle C;$$

- *тэарэма косінусаў*: квадрат стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон без падвоенага здабытку гэтых старон і косінуса вугла паміж імі:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

- *тэарэма сінусаў*: стораны прапарцыянальныя сінусам супрацьлеглых вуглоў;

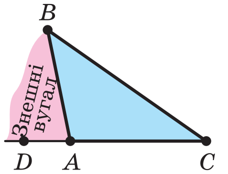
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Акрамя старон і вуглоў трохвугольнік мае іншыя элементы.

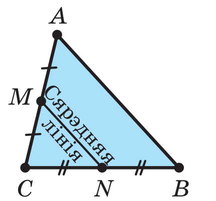
Знешні вугал трохвугольніка — вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом (рыс. 390).

Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух яго ўнутраных вуглоў, не сумежных з ім:

$$\angle BAD = \angle B + \angle C.$$



Рыс. 390

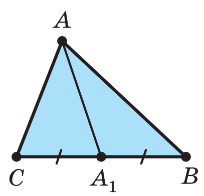


Рыс. 391

Сярэдняя лінія трохвугольніка — адрэзак, што злучае сярэдзіны дзвюх яго старон (рыс. 391).

Сярэдняя лінія трохвугольніка паралельная трэцяй старане (аснове) і роўная яе палавіне:

$$MN \parallel AB,\ MN = \frac{1}{2}AB.$$

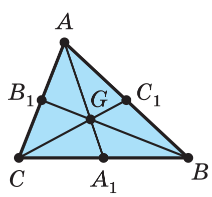


Рыс. 392

Медыяна трохвугольніка — адрэзак, што злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай супрацьлеглай стараны (рыс. 392).

Медыяны трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, які адсякае ад кожнай з іх трэцюю долю, калі лічыць ад стараны (рыс. 393):

$$A_1G = \frac{1}{3}\ AA_1,\ B_1G = \frac{1}{3}BB_1,\ C_1G = \frac{1}{3}\ CC_1.$$

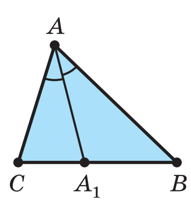


Рыс. 393

Бісектрыса трохвугольніка — адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, заключаны паміж яго вяршыняй і супрацьлеглай стараной (рыс. 394).

Бісектрыса трохвугольніка дзеліць супрацьлеглую старану на часткі, прапарцыянальныя прылеглым старанам:

$$\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}.$$



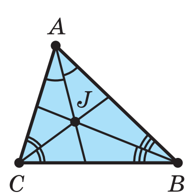
Рыс. 394

Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (рыс. 395).

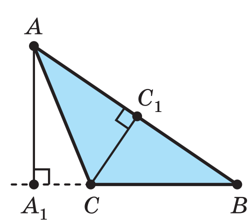
Вышыня трохвугольніка — перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні трохвугольніка на прамую, што праходзіць праз супрацьлеглую яго старану (рыс. 396).

Прамыя, што праходзяць праз вышыні трохвугольніка, перасякаюцца ў адным пункце (рыс. 397).

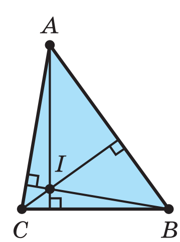
Плошча трохвугольніка роўная палавіне здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні, або здабытку



Рыс. 395

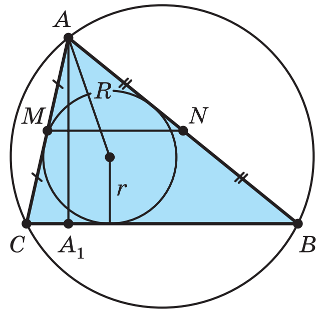


Рыс. 396



Рыс. 397

вышыні трохвугольніка і перпендыкулярнай ёй сярэдняй лініі, або палавіне здабытку дзвюх яго старон і сінуса вугла паміж імі, або квадратнаму кораню са здабытку паўперыметра і трох рознасцей паўперыметра з кожнай стараной, або здабытку паўперыметра і радыуса ўмежанай акружнасці, або здабытку трох старон трохвугольніка, падзеленаму на пачацвяроны радыус апісанай акружнасці (рыс. 398):



Рыс. 398

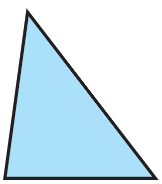
$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA);$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot AA_1 = AA_1 \cdot MN = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC =$$

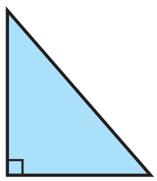
$$= \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} = pr = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{4R}.$$

Прамавугольны трохвугольнік

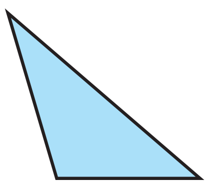
Два вуглы трохвугольніка абавязкова вострыя, а трэці — большы — яго вугал можа быць і вострым (рыс. 399), і прамым (рыс. 400), і тупым (рыс. 401). У адпаведнасці з гэтым трохвугольнікі падзяляюць на *востравугольныя*, *прамавугольныя*, *тупавугольныя*.



Рыс. 399



Рыс. 400



Рыс. 401

Уласцівасці прамавугольнага трохвугольніка (рыс. 402).

• Вострыя вуглы разам складаюць 90°:

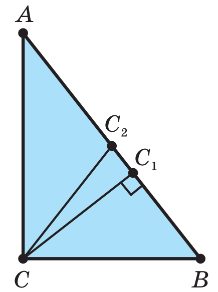
$$\angle A + \angle B = 90°;$$

• *тэарэма Піфагора*: квадрат гіпатэнузы роўны суме квадратаў катэтаў:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2;$$

• калі катэт ляжыць насупраць вугла ў 30°, то ён роўны палавіне гіпатэнузы;

• калі катэт роўны палавіне гіпатэнузы, то ён ляжыць насупраць вугла ў 30°;



Рыс. 402

• медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўная палавіне гэтай гіпатэнузы і з'яўляецца радыусам апісанай акружнасці:

$$CC_2 = AC_2 = BC_2;$$

• вышыня прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, з'яўляецца сярэднім геаметрычным адрэзкаў, на якія яна раздзяляе гіпатэнузу, а катэт ёсць сярэдняе геаметрычнае гіпатэнузы і праекцыі гэтага катэта на гіпатэнузу:

$$CC_1 = \sqrt{AC_1 \cdot BC_1},$$

$$AC = \sqrt{AB \cdot AC_1},$$

$$BC = \sqrt{AB \cdot BC_1};$$

• сінус вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да гіпатэнузы; косінус вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да гіпатэнузы; тангенс вострага вугла роўны адносіне супрацьлеглага катэта да прылеглага; катангенс вострага вугла роўны адносіне прылеглага катэта да супрацьлеглага:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \cos A = \frac{AC}{AB};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}.$$

Прыметы прамавугольнага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца прамавугольным, калі:

• сума двух якіх-небудзь яго вуглоў роўная 90°;

• квадрат большай яго стараны роўны суме квадратаў дзвюх іншых старон;

• адна з яго медыян роўная палавіне стараны, да якой праведзена.

Раўнабедраны трохвугольнік

Калі трохвугольнік мае дзве роўныя стараны, яго называюць *раўнабедраным* (рыс. 403). Раўнабедраны трохвугольнік з трыма роўнымі старанамі называюць *роўнастароннім* (рыс. 404).

Уласцівасці раўнабедранага трохвугольніка (рыс. 405):

• вуглы пры аснове роўныя:

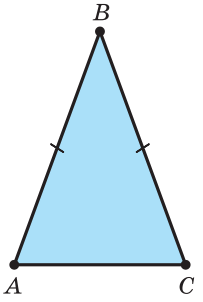
$$\angle A = \angle C;$$

• медыяна, бісектрыса, вышыня, праведзеныя да асновы, супадаюць:

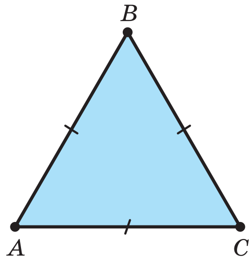
калі BB_1 — медыяна, то BB_1 — бісектрыса і вышыня;

калі BB_1 — бісектрыса, то BB_1 — медыяна і вышыня;

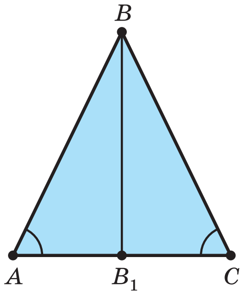
калі BB_1 — вышыня, то BB_1 — бісектрыса і медыяна.



Рыс. 403



Рыс. 404



Рыс. 405

Прыметы раўнабедранага трохвугольніка. Трохвугольнік з'яўляецца раўнабедраным, калі:

• дзве яго стараны роўныя;

• два яго вуглы роўныя;

• медыяна і вышыня, або медыяна і бісектрыса, або вышыня і бісектрыса, праведзеныя з адной вяршыні, супадаюць.

Роўнасць фігур

Роўныя фігуры — фігуры, якія супадаюць пры накладанні.

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі яны маюць роўныя:

• вугал і прылеглыя да яго стораны;

• старану і прылеглыя да яе вуглы;

• тры стараны.

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў. Прамавугольныя трохвугольнікі з'яўляюцца роўнымі, калі ў іх адпаведна роўныя:

• катэты;

• катэт і прылеглы да яго востры вугал;

• гіпатэнуза і востры вугал;

• гіпатэнуза і катэт.

Падобнасць фігур

Тэарэма Фалеса. Калі на адной старане вугла адкласці роўныя адрэзкі і праз іх канцы правесці паралельныя прамыя, якія перасякаюць другую старану вугла, то гэтыя прамыя на другой старане высякаюць таксама роўныя адрэзкі.

Падобныя трохвугольнікі — трохвугольнікі, вуглы якіх папарна роўныя, а адпаведныя стараны прапарцыянальныя.

Прыметы падобнасці трохвугольнікаў. Трохвугольнікі з’яўляюцца падобнымі, калі ў іх:

- ёсць па роўным вугле, а прылеглыя да іх стораны прапарцыянальныя;
- ёсць па два роўныя вуглы;
- усе тры стараны прапарцыянальныя.

Адносіна любых адпаведных лінейных элементаў падобных трохвугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна перыметраў падобных многавугольнікаў роўная каэфіцыенту падобнасці. Адносіна плошчаў падобных многавугольнікаў роўная квадрату каэфіцыента падобнасці. Адносіна аб’ёмаў падобных фігур-цел роўная кубу каэфіцыента падобнасці.

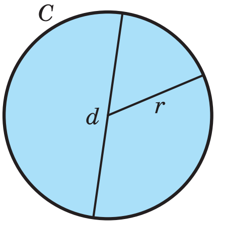
Акружнасць і круг

Адносіна даўжыні C акружнасці да яе дыяметра d ёсць адна і тая для любой акружнасці (рыс. 406). Гэта адносіна выражае лік, які абазначаецца π.

$$\pi = \frac{C}{d} = 3{,}141592\ldots$$

Даўжыні C акружнасці, плошча S адпаведнага круга і іх радыус r звязаны формуламі:

$$C = 2\pi r;\ S = \pi r^2;\ S = \frac{C}{2}r.$$



Рыс. 406

Акружнасць і вугал

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры круга, называецца *цэнтральным вуглом*.

Вугал, вяршыня якога належыць акружнасці, а стораны маюць з акружнасцю агульныя пункты, называецца *ўмежаным (упісаным) вуглом* (рыс. 407).

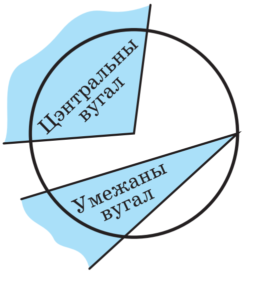
Умежаны вугал вымяраецца палавінай дугі, на якую ён абапіраецца.

Умежаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, з’яўляецца прамым.

Умежаныя вуглы, што абапіраюцца на адну дугу, роўныя.

Вугал з вяршыняй унутры круга вымяраецца паўсумай дуг, адна з якіх заключана паміж старанамі дадзенага вугла, а другая — паміж старанамі вугла, вертыкальнага дадзенаму.

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца па-за кругам, а стораны перасякаюць акружнасць, вымяраецца паўрознасцю дуг, якія гэты вугал высякае з акружнасці.



Рыс. 407

Акружнасць і прамая

Сякучая — прамая, якая мае з акружнасцю два агульныя пункты.

Датычная — прамая, якая мае з акружнасцю адзін агульны пункт (рыс. 408).

Уласцівасць датычнай: датычная перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў пункт дотыку.

Прымета датычнай. Прамая з'яўляецца датычнай, калі яна праходзіць праз пункт акружнасці і перпендыкулярная да радыуса, праведзенага ў гэты пункт.

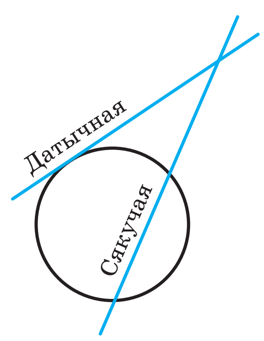
Вугал паміж датычнай і сякучай, праведзенай праз пункт дотыку, вымяраецца палавінай дугі, якую гэты вугал заключае.

Адрэзкі дзвюх датычных, праведзеных праз адзін пункт, заключаныя паміж гэтым пунктам і пунктамі дотыку, роўныя адзін аднаму.

Здабыткі адрэзкаў перасякальных хорд роўныя (і роўныя $r^2 - a^2$, дзе r — радыус круга, a — адлегласць ад цэнтра да пункта перасячэння).

Калі сякучая і датычная праходзяць праз дадзены пункт па-за кругам, то здабытак адрэзкаў сякучай, што злучаюць гэты пункт з пунктамі перасячэння сякучай з акружнасцю, роўны квадрату адрэзка датычнай з канцамі ў дадзеным пункце і пункце дотыку.

Калі сякучая праходзіць праз пункт па-за кругам, то здабытак адрэзкаў, што злучаюць гэты пункт з пунктамі перасячэння сякучай з акружнасцю, ёсць велічыня пастаянная (роўная $a^2 - r^2$, дзе r — радыус круга, a — адлегласць ад цэнтра да выбранага пункта).



Рыс. 408

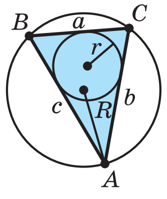
Акружнасць і трохвугольнік

Акружнасць, умежаная ў многавугольнік, — акружнасць, якая датыкаецца да ўсіх старон многавугольніка.

Акружнасць, апісаная каля многавугольніка, — акружнасць, якая праходзіць праз усе вяршыні многавугольніка.

Цэнтр умежанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння бісектрыс трохвугольніка.

Цэнтр апісанай акружнасці супадае з пунктам перасячэння пасярэдніх перпендыкуляраў да старон трохвугольніка (рыс. 409).



Рыс. 409

Радыусы r і R умежанай і апісанай акружнасцей звязаны з іншымі элементамі трохвугольніка формуламі:

$$r = \frac{S}{p}; \; R = \frac{abc}{4S}; \; \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

Чатырохвугольнік

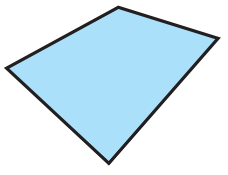
Плоская замкнёная чатырохзвёнавая ломаная вылучае з плоскасці *чатырохвугольнік*. Чатырохвугольнік на рысунку 410 — *выпуклы*, а на рысунку 411 — *нявыпуклы*. Звычайна разглядаюць выпуклыя чатырохвугольнікі.

Уласцівасці чатырохвугольніка:

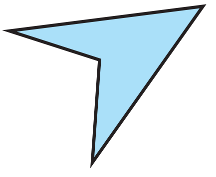
• сума ўнутраных вуглоў роўная 360°;

• сярэдзіны старон чатырохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі паралелаграма (рыс. 412);

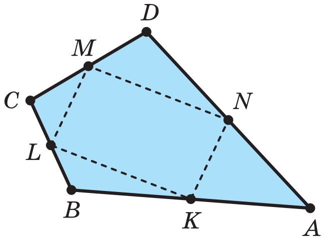
• плошча чатырохвугольніка роўная палавіне здабытку яго дыяганалей і сінуса вугла паміж імі.



Рыс. 410



Рыс. 411



Рыс. 412

Трапецыя

Трапецыя — чатырохвугольнік, у якога дзве стараны паралельныя, а дзве іншыя стараны — непаралельныя (рыс. 413).

Уласцівасці трапецыі (рыс. 414):

• сума вуглоў, прылеглых да бакавой стараны, роўная 180°:

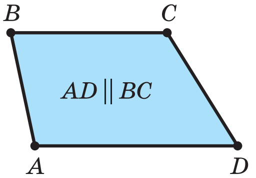
$$\angle A + \angle B = 180°; \angle C + \angle D = 180°;$$

• сярэдняя лінія трапецыі паралельная яе асновам і роўная іх паўсуме:

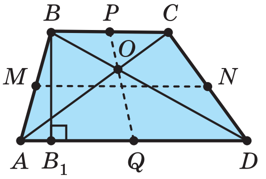
$$MN \parallel AD, MN \parallel BC, MN = \frac{1}{2}(AD + BC);$$

• плошча трапецыі роўная здабытку яе сярэдняй лініі і вышыні:

$$S_{ABCD} = BB_1 \cdot MN;$$



Рыс. 413



Рыс. 414

• з трохвугольнікаў, на якія дыяганалі раздзяляюць трапецыю, трохвугольнікі, прылеглыя да яе асноў, — падобныя, а трохвугольнікі, прылеглыя да бакавых старон, — роўнавялікія:

$$\Delta\ AOD \sim \Delta\ BOC;\ S_{AOB} = S_{DOC}.$$

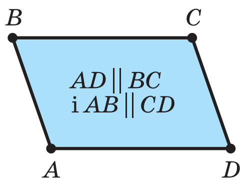
Паралелаграм

Паралелаграм — чатырохвугольнік, у якога дзве пары паралельных старон (рыс. 415).

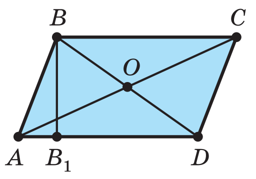
Уласцівасці паралелаграма (рыс. 416):

• сума вуглоў, прылеглых да любой яго стараны, роўная 180°:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \text{ і } \angle B + \angle C = 180^\circ$$
$$\text{і } \angle C + \angle D = 180^\circ \text{ і } \angle D + \angle A = 180^\circ;$$



Рыс. 415



Рыс. 416

• яго супрацьлеглыя стораны паралельныя і роўныя:

$$AD \parallel BC \text{ і } AB \parallel CD;\ AD = BC \text{ і } AB = CD;$$

• яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:

$$\angle A = \angle C \text{ і } \angle B = \angle D;$$

• пункт перасячэння дыяганалей дзеліць іх папалам:

$$AO = CO;\ BO = DO;$$

• пункт перасячэння дыяганалей ёсць цэнтр сіметрыі паралелаграма;

• плошча роўная здабытку стараны і праведзенай да яе вышыні:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BB_1.$$

Прыметы паралелаграма. Чатырохвугольнік з'яўляецца паралелаграмам, калі:

• сумы вуглоў, прылеглых да якіх-небудзь дзвюх сумежных старон, роўныя 180° кожная:

$$\angle A + \angle B = 180^\circ \text{ і } \angle B + \angle C = 180^\circ, \text{ або } \angle B + \angle C = 180^\circ \text{ і}$$
$$\angle C + \angle D = 180^\circ, \text{ або } \angle C + \angle D = 180^\circ \text{ і } \angle D + \angle A = 180^\circ, \text{ або}$$
$$\angle D + \angle A = 180^\circ \text{ і } \angle A + \angle B = 180^\circ;$$

• яго супрацьлеглыя стораны роўныя:

$$AD = BC \text{ і } AB = CD;$$

• ён мае пару супрацьлеглых паралельных і роўных старон:

$$AD \parallel BC \text{ і } AD = BC \text{ або } AB = CD \text{ і } AB \parallel CD;$$

• яго супрацьлеглыя вуглы роўныя:

$$\angle A = \angle C \text{ і } \angle B = \angle D;$$

• яго дыяганалі пунктам перасячэння дзеляцца папалам:

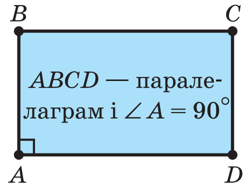
$$AO = CO; \; BO = DO.$$

Прамавугольнік

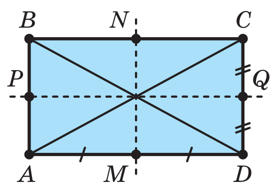
Прамавугольнік — паралелаграм, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 417).

Уласцівасці прамавугольніка (рыс. 418):

• усе яго вуглы роўныя адзін аднаму і прамыя:



Рыс. 417



Рыс. 418

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°;$$

• яго дыяганалі роўныя:

$$AC = BD;$$

• пасярэднія перпендыкуляры да яго старон з'яўляюцца восямі сіметрыі;

• яго плошча роўная здабытку сумежных старон:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD.$$

Прыметы прамавугольніка. Паралелаграм з'яўляецца прамавугольнікам, калі:

• яго дыяганалі роўныя:

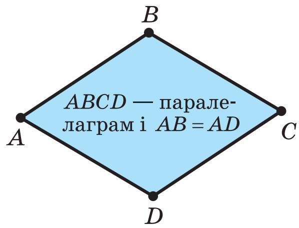
$$AC = BD;$$

• пасярэдні перпендыкуляр да якой-небудзь стараны паралелаграма з'яўляецца яго воссю сіметрыі; MN — вось сіметрыі або PQ — вось сіметрыі.

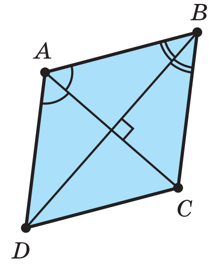
Ромб

Ромб — паралелаграм, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны (рыс. 419).

Уласцівасці ромба (рыс. 420):



Рыс. 419



Рыс. 420

• усе яго стораны роўныя адна адной:

$$AB = BC = CD = DA;$$

• яго дыяганалі перпендыкулярныя:

$$AC \perp BD;$$

• яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:

$$\angle ABD = \angle CBD \text{ і } \angle BCA = \angle DCA;$$

• прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восямі сіметрыі;

• яго плошча роўная палавіне здабытку дыяганалей:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD.$$

Прыметы ромба. Паралелаграм з'яўляецца ромбам, калі:

• ён мае пару роўных сумежных старон:

$$AB = BC \text{ або } BC = CD \text{ або } CD = DA \text{ або } DA = AB;$$

• яго дыяганалі перпендыкулярныя:

$$AC \perp BD;$$

• яго дыяганалі дзеляць вуглы папалам:

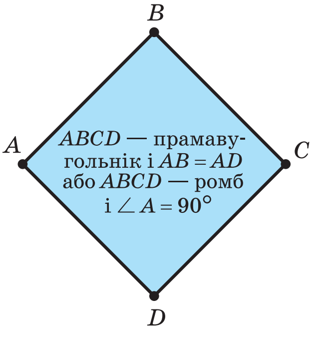
$$\angle ABD = \angle CBD \text{ і } \angle BCA = \angle DCA;$$

• прамыя, якім належаць яго дыяганалі, з'яўляюцца восямі сіметрыі.

Квадрат

Квадрат — прамавугольнік, у якога ёсць роўныя сумежныя стораны, або ромб, у якога ёсць прамы вугал (рыс. 421).

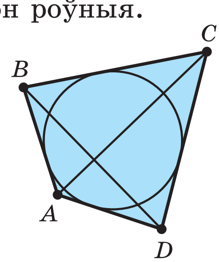
Паколькі квадрат з'яўляецца і прамавугольнікам і ромбам, то ён валодае ўсімі ўласцівасцямі прамавугольніка і ўсімі ўласцівасцямі ромба.



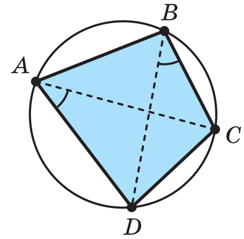
Рыс. 421

Акружнасць і чатырохвугольнік

Уласцівасць апісанага чатырохвугольніка (рыс. 422): сумы супрацьлеглых старон роўныя.



Рыс. 422



Рыс. 423

Прымета апісанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца апісаным каля акружнасці, калі ў яго роўныя сумы супрацьлеглых старон.

Уласцівасць умежанага чатырохвугольніка (рыс. 423):

а) сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°;$$

б) здабытак дыяганалей роўны суме здабыткаў супрацьлеглых старон:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Прыметы ўмежанага чатырохвугольніка. Чатырохвугольнік з'яўляецца ўмежаным у акружнасць, калі:

а) сума супрацьлеглых вуглоў роўная 180°:

$$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°;$$

б) вуглы, кожны з якіх утвораны стараной і дыяганаллю і якія абапіраюцца на адну старану, роўныя:

$$\angle ACB = \angle ADB, \text{ або } \angle BAC = \angle BDC, \text{ або}$$

$$\angle CAD = \angle CBD, \text{ або } \angle ACD = \angle ABD.$$

Абазначэнні геаметрычных фігур, геаметрычных велічынь, дачыненняў паміж імі і аперацый над фігурамі

Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3, ... — геаметрычная фігура;

$\varnothing$ — пустое мноства;

$A, B, C, D, \ldots, X, Y, Z, A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n \ldots Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, A_n \ldots$ — пункты прасторы;

$a, b, c, d, \ldots, x, y, z, a_1, a_2, a_3, \ldots, an \ldots z_1, z_2, z_3, \ldots, a_n \ldots$ — прамыя прасторы;

ω (A, r) — акружнасць з цэнтрам у пункце A і з радыусам r;

(AB) — прамая, што праходзіць праз пункты A і B;

[AB) — прамень з пачаткам у пункце A, што праходзіць праз пункт B;

[AB] — адрэзак з канцамі ў пунктах A і B;

(ABC) — плоскасць, якая праходзіць праз пункты A, B, C;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \chi, \psi, \omega$ — плоскасці прасторы;

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots, \chi, \psi, \omega$ — велічыня плоскага вугла;

$\angle ABC$ — вугал з вяршыняй у пункце B;
$\triangle ABC$ — трохвугольнік ABC;
$\smile AB$ — дуга AB;
$|AB|$ — адлегласць ад пункта A да пункта B; даўжыня адрэзка AB;
$|Aa|$ — адлегласць ад пункта A да прамой a;
$|A\alpha|$ — адлегласць ад пункта A да плоскасці α;
$|ab|$ — адлегласць паміж прамымі a і b;
$|\alpha\beta|$ — адлегласць паміж плоскасцямі α і β;
$^\circ$ — градус;
$'$ — мінута;
$''$ — секунда ($\angle ABC = 45^\circ\ 15'\ 30''$);
∞ — бясконцасць;
P_{ABCD} — перыметр чатырохвугольніка $ABCD$;
p_{ABC} — паўперыметр трохвугольніка ABC;
S_{ABC} — плошча трохвугольніка ABC;
$S_{\text{бак}}$ — плошча бакавой паверхні фігуры;
$S_{\text{поўн}}$ — плошча поўнай паверхні фігуры;
$A = B$ — пункт A супадае з пунктам B;
$a = b$ — прамая a супадае з прамой b;
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ — трохвугольнік ABC роўны трохвугольніку $A_1B_1C_1$;
$|AB| = |AC|$ — адлегласць ад пункта A да пункта B роўная адлегласці ад пункта A да пункта C;
$\alpha \cap \beta = a$ — плоскасці α і β перасякаюцца па прамой a;
$a \cap b = \varnothing$ — прамыя a і b не перасякаюцца;
$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — трохвугольнік ABC падобны трохвугольніку $A_1B_1C_1$;
$a \parallel b$ — прамая a паралельная прамой b;
$a \nparallel b$ — прамая a не паралельная прамой b;
$\alpha \parallel b$ — плоскасць α паралельная прамой b;
$\alpha \parallel \beta$ — плоскасць α паралельная плоскасці β;
$a \perp b$ — прамая a перпендыкулярная прамой b;
$a \not\perp b$ — прамая a не перпендыкулярная прамой b;
$\alpha \perp b$ — плоскасць α перпендыкулярная прамой b;
$\alpha \perp \beta$ — плоскасць α перпендыкулярная плоскасці β;
$a \dot{-} b$ — прамая a скрыжаваная з прамой b;
$C \in b$ — пункт C належыць прамой b;
$C \notin b$ — пункт C не належыць прамой b;
$C \in \alpha$ — пункт C належыць плоскасці α;
$a \subset \alpha$ — прамая a ляжыць у плоскасці α;
$a \not\subset \alpha$ — прамая a не ляжыць у плоскасці α;
$\triangle ABC \subset \alpha$ — трохвугольнік ABC ляжыць у плоскасці α;
$\text{Пр}_\alpha AB$ — праекцыя прамой AB на плоскасць α;
$\Phi_1 \cap \Phi_2$ — перасячэнне (агульная частка) фігур Φ_1 і Φ_2;
$\Phi_1 \cup \Phi_2$ — аб'яднанне фігур Φ_1 і Φ_2.

Адказы

Раздзел 1

6. 198 см^2; $18(11+\sqrt{3})$ см^2. **7.** а) 150; $12{,}5(12+\sqrt{3})$; б) 1200; 1400; в) 3456; $108(32+9\sqrt{3})$ **8.** $7{,}5(10+\sqrt{3})$ см^2; **9.** 416 м^2; 656 м^2. **10.** 1320 см^2. **11.** а) 13 см; б) $195\sqrt{3}$ см^2; в) $270\sqrt{3}$ см^2. **12.** а) $3\sqrt{34}$ см; б) 540 см^2; в) 864 см^2. **13.** $37{,}5\sqrt{3}$ см^2. **14.** а) 13 см; 12 см; б) 360 см^2; в) $30(12+5\sqrt{3})$ см^2. **15.** а) $2\sqrt{217}$ см; $16\sqrt{3}$ см; б) $1248\sqrt{3}$ см^2; в) $2400\sqrt{3}$ см^2. **16.** а) $2\sqrt{58}$ см; $2\sqrt{65}$ см; б) 296 см^2; в) 392 см^2. **17.** а) $\sqrt{142-45\sqrt{3}}$ см; $\sqrt{142+45\sqrt{3}}$ см; б) 192 см^2; в) 282 см^2. **18.** а) 5 м; $\sqrt{89}$ м; б) $8(5+\sqrt{34})$ м^2; в) $8(11+\sqrt{34})$ м^2. **19.** а) $8\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{6}$ см; $8\sqrt{6}$ см; б) $192(1+\sqrt{2})$ см^2; в) $192(2+\sqrt{2})$ см^2. **20.** $2{,}4\sqrt{34}$ см, $3\sqrt{17}$ см. **23.** 1 або 3. **51.** $\sqrt{10}$ см. **52.** 960 см^2. **53.** 4 см. **57.** 72 дм^2. **58.** $576(1+\sqrt{3})$ см^2. **59.** 11 мм і 60 мм. **60.** 4640 см^2 або 8448 см^2. **61.** 4 см. **64.** в) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ м^2. **65.** $\frac{a}{9}(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$. **66.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **67.** $\frac{a}{2}(2\sqrt{3}+1)$, $\frac{a^2\sqrt{11}}{16}$. **69.** $l\sqrt{2a^2-\frac{l^2}{4}}$. **73.** 72 см^2. **74.** $\frac{k\sqrt{k^2+l^2}}{4}$. **75.** $\frac{a}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{3a\sqrt{2}}{8}$. **76.** $20\sqrt{3}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм, $10\sqrt{21}$ мм. **83.** $\frac{S\sqrt{7}}{2(\sqrt{3}+6)}$. **84.** $1{,}25a^2\sqrt{3}$. **85.** 10 мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм, $\frac{20\sqrt{6}}{3}$ мм. **86.** $2S(\sqrt{6}+2\sqrt{2})$. **90.** $2R^2\sqrt{3}$. **91.** $3l^2$. **92.** $2\sqrt{3}$ м^2. **93.** $\frac{1}{2a\sqrt{2}}\sqrt{a^4+4S^2}$. **94.** $2a^2\left(2\sqrt{\frac{\cos\gamma}{1-\cos\gamma}}+1\right)$. **95.** $\frac{3c}{8}\sqrt{8h^2+c^2}$. **96.** $\frac{4}{3}(\sqrt{13}+\sqrt{10})$ м. **97.** 480 см^2. **98.** $2\sqrt{2(4Q^2-a^4)}$.

Раздзел 2

103. б) 200 см. **104.** $3+2\sqrt{2}$ м. **105.** 40 м або 8 м. **106.** 12 см. **107.** 36 см. **108.** 24 см. **109.** а) 7 см; б) 30 см. **110.** 50 см. **111.** 40 мм. **113.** б) 12 см. **114.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **115.** $\frac{9m^2\sqrt{3}}{8}$. **121.** а) 40°; б) 45°; в) 90°.

122. а) 58°; б) 47°. **123.** а) 90°; б) 64°. **126.** У 5 разоў. **132.** б) 1600 см^2. **133.** $\frac{\sqrt{S}}{4}$. **134.** б) 5 см. **135.** 3. **136.** $\frac{1}{3}m$. **137.** $4S$. **146.** 96 см. **147.** $8\frac{1}{3}$ см. **148.** 10 см. **149.** 16 см. **150.** 24 см; 36 см. **151.** 25 см. **152.** 1620 см^2. **153.** $\frac{\sqrt{S\sqrt{15}}}{4}$. **160.** а) 18 см; 15 см; б) 54 см; 72 см. **162.** б) 4 : 9. **163.** в) 6 см^2. **172.** б) 4 см. **173.** 8 см^2. **181.** $\frac{q}{16}$. **182.** 64 см^2. **183.** б) 140 см. **184.** 46 см. **185.** 109 см. **186.** 6 S. **187.** 72 см. **188.** $\frac{4}{3}S$. **189.** $\frac{1}{9}S$; $\frac{4}{9}S$. **190.** 1 : 3. **191.** 0,16 q. **192.** $\frac{9m}{64}\sqrt{4n^2-m^2}$. **193.** 32 см^2. **210.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **211.** 38 см.

Раздзел 3

217. 40 см. **218.** 7,8 м. **219.** 18 см. **220.** $4\sqrt{65}$ см або $4\sqrt{17}$ см; 32 см; 20 см. **221.** $\sqrt{d^2+\frac{a^2}{2}}$. **222.** 6,5 см. **223.** а) 13 см; б) 30 см; в) $\sqrt{q^2-p^2+r^2}$; г) $\sqrt{l^2-k^2+2m^2}$. **224.** 12 см. **225.** а) 2,4; б) $\frac{\sqrt{455}}{12}$; в) 0. **226.** 36 см. **227.** 15 см. **231.** 400 $(2+\sqrt{5})$ мм^2. **232.** 296 см^2. **233.** $36\sqrt{5}$. **239.** а) 1250; б) $2500\sqrt{2}$; в) 2500; г) 5000. **240.** $9\sqrt{2}$ см^2. **241.** 15 см. **242.** 23 см. **243.** 60 см, 36 см. **244.** 20 см, 24 см. **245.** 12 см. **247.** а) 4; 1; б) 4; 1; в) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2+\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $2+\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$. **249.** а) $\frac{d}{\cos\beta}$, d tg β; б) $m\cos\beta$, $m\sin\beta$. **250.** а) 2 см; б) $4\sqrt{2}$ см. **251.** $\sqrt{2}$ м. **252.** а) 1; б) $\sqrt{1+2\cos\beta}$. **253.** 6 см, 15 см. **254.** а) 41 см, 55 см; б) 40 см, 80 см. **255.** 3 см; 7,5 см. **256.** 270 см^2. **261.** а) a; б) a; в) a; г) a; д) a; е) a. **262.** 60 см. **263.** 120 см. **264.** 4 см, $4\sqrt{10}$ см. **265.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; б) $a\sqrt{3}$; в) $\frac{2a\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; д) $a\sqrt{3}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{5}}$. **266.** а) a; б) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{a}{\sqrt{6}}$. **267.** $12{,}5\sqrt{337}$ см^2. **268.** 56. **269.** 10 см, 6 см. **270.** $\frac{mp}{p+q}$ або $\frac{mq}{p+q}$. **271.** а) $\frac{2\sqrt{21}}{7}$; б) $\frac{\sqrt{94}}{8}$; в) $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **272.** $\frac{abc}{\sqrt{a^2\left(b^2+c^2\right)+4b^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{b^2\left(a^2+c^2\right)+4a^2c^2}}$, $\frac{abc}{\sqrt{c^2\left(a^2+b^2\right)+4a^2b^2}}$.

273. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **274.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. **275.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
276. $\frac{a}{4b}\sqrt{4b^2-a^2}$. **278.** 12,5 см, 25 см. **280.** а) 17 дм; б) $\sqrt{176{,}5}$ дм.
281. б) 51 дм; в) $\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+h^2}$. **282.** а) 20; б) $5\sqrt{3}$. **283.** 2,5 см, $\frac{\sqrt{41}}{2}$ см, $\frac{\sqrt{61}}{2}$ см, $2{,}5\sqrt{17}$ см. **284.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$; $\frac{a\sqrt{39}}{8}$. **285.** 40 см, 16 см. **286.** $\sqrt{2y^2-x^2}$.
287. $16\left(3+\sqrt{17}\right)$. **288.** 18 м і 12 м. **290.** 6 см. **291.** а) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{m}{2}$; в) $\frac{m\sqrt{3}}{2}$.
292. 30°. **294.** $\frac{2h^2\sqrt{7}}{3}$. **295.** а) $d\sqrt{2}$; б) $d\sqrt{6}$. **296.** а) $d\sqrt{7}$; б) $2d$. **297.** $3d$.
298. 45°. **299.** $5\sqrt{5}$ мм. **300.** а) $\arccos\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; б) $\arccos\frac{|a^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; в) $\arccos\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **301.** а) 90°; б) 90°; в) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; г) $\arccos\frac{5\sqrt{2}}{8}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; е) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$. **306.** $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **307.** 45°. **316.** 10 см. **317.** 27 см.
318. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **319.** $2l^2$. **320.** а) $\frac{c\sqrt{3}}{4}$; б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$. **321.** 3,36 см. **322.** а) $8\sqrt{3}$ см; б) $112\sqrt{3}$ см^2. **323.** 4 м. **324.** 90°, 45°, 60°. **325.** 60°. **326.** 60°. **327.** $\sqrt{217}$ см.
328. $2a$. **329.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **330.** 25 см. **331.** а) 42 см; б) 16; в) $2x$. **332.** 60°. **333.** 120°.
334. $\arccos\frac{1}{3}$. **336.** $\arccos\frac{1}{3}$. **337.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{3\left(4b^2-a^2\right)}}$; $\arccos\frac{2b^2-a^2}{4b^2-a^2}$.
338. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **339.** $\arccos\frac{a}{\sqrt{4b^2-a^2}}$; $\arccos\frac{a^2}{a^2-4b^2}$.
343. а) $5\sqrt{6}$; б) $5\sqrt{2}$. **344.** $\frac{a}{2}$. **345.** 27 дм^2. **352.** $\sqrt{m^2\sin^2\beta+n^2}$. **354.** а) 90°.
355. а) 60°; б) 90°; в) 60°; г) 60°; д) 60°; е) 30°. **360.** а) 0; б) $a\sqrt{3}$; в) a; г) $2a$; д) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. **361.** 13 см. **364.** $10\sqrt{2}$.

Раздзел 4

366. а) (0; 0; 0), (a; 0; 0), (0; a; 0), (a; a; 0), (0; 0; a), (a; 0; a), (0; a; a), (a; a; a); в) (0; 0; 0), (a; 0; 0), (0; a; 0), (a; a; 0), (0; 0; $-a$), (a; 0; $-a$), (0; a; $-a$), (a; a; $-a$). **368.** а) (−2; 0; 0), (a; 0; 0); г) (−2; 4; 0), (a; b; 0). **369.** а) $D(3;\ 1;\ 10)$; б) $D(5;\ 5;\ -6)$; в) $D(1;\ -3;\ -4)$. **374.** а) (−2; 1; −3), ($-a$; $-b$; c); б) (−4; 7; −7), ($-a-4$; $-b+6$; $c-4$); в) (2; 1; −3), (a; $-b$; $-c$); е) (2; −1; −3), (a; b; c). **375.** а) $\sqrt{26}$; б) 13; в) $4\sqrt{5}$; г) $\sqrt{65}$; д) 5; е) 4; ж) 1; з) 3. **376.** а) (1,5; 0; 0); б) (0; 0; 0,75). **377.** а) (0; 0; 0); б) любы пункт восі аплікат. **378.** а) $\left(-4\pm\sqrt{30}; 0; 0\right)$; б) $\left(0; 1\pm\sqrt{22}; 0\right)$; в) $\left(0; 0; \dfrac{5\pm4\sqrt{10}}{3}\right)$.
379. а) $\arccos\dfrac{4}{13}$; б) $\arccos\dfrac{3}{13}$; в) $\arccos\dfrac{12}{13}$; г) $\arcsin\dfrac{12}{13}$; д) $\arcsin\dfrac{3}{13}$; е) $\arcsin\dfrac{4}{13}$. **380.** а) $\arccos\dfrac{3}{5}$; б) $\arccos\dfrac{4}{5}$; в) 90°; г) 0°; д) $\arcsin\dfrac{4}{5}$; е) $\arcsin\dfrac{3}{5}$. **381.** а) $x=2$; б) $y=3$; в) $z=-2$; г) $x-y+1=0$. **398.** а) $k=-1$; б) $k=-0{,}5$; в) $k=-2$. **400.** а) $4\vec{b}$; б) $-4\vec{p}-2\vec{r}$. **401.** а) Пры $k=1$; б) пры $k\neq1$. **413.** $\overrightarrow{DK}=0{,}4\cdot\overrightarrow{DA}+0{,}3\cdot\overrightarrow{DB}+0{,}3\cdot\overrightarrow{DC}$. **422.** (6; −1; −7), або (−2; −5; 5), або (6; −1; 7). **423.** а) (−2; −2; 2), (4; −2; 2), (2; −4; 4); б) (−2; 2; −3), (1; −2; 1), (0; 0; −2). **425.** $C(1;\ -1;\ 8)$, $B_1(2;\ 4;\ 8)$. **426.** а) $D(0;\ 1;\ -1)$, $A_1(0;\ 2;\ 2)$, $C_1(2;\ 0;\ 5)$, $D_1(-1;\ 0;\ 2)$; б) $A_1(0;\ 5;\ 1)$, $C_1(6;\ 3;\ 7)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 4)$. **428.** а) Пры $x=-2$, $y=1$; б) ні пры якіх; в) пры $y=2x$. **429.** а) Не; б) так. **430.** а) $B(2;\ 2;\ 0)$; б) $A(1{,}5;\ -0{,}5;\ 0)$. **431.** а) Так; б) не. **432.** $m=13$. **433.** а) (2; 1; 3); б) (−1; 8; 0); в) (5; −8; −3); г) (−3; 2; 3). **436.** а) $\left(-a; -a\sqrt{3}; -a\right)$; б) $\left(-a; a\sqrt{3}; -a\right)$; в) $\left(-\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$; г) $\left(-2a; 0; a\right)$; д) $\left(-\dfrac{3a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; е) $\left(-\dfrac{3a}{2}; -\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -a\right)$. **437.** а) −1; б) 5; в) 0; г) −14. **438.** а) $\sqrt{21}$; б) $\sqrt{10}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{14}$; д) 3; е) $\sqrt{5}$; ж) $\sqrt{14}$; з) $\sqrt{14}$. **439.** а) $\arccos\dfrac{-1}{\sqrt{210}}$; б) $\arccos\dfrac{\sqrt{35}}{14}$; в) 90°; г) $\arccos\dfrac{-1}{\sqrt{70}}$. **442.** а) $21\sqrt{2}$;

60°; б) $\sqrt{6}+2+\sqrt{2}$; 90°; в) $4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; $\arccos\frac{-1}{3}$; г) $\sqrt{140}+\sqrt{129}+\sqrt{105}$; $\arccos\frac{47}{3\sqrt{1505}}$. **444.** $A\left(\frac{7}{3};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{7}{2};0\right)$; $C(0;\ 0;\ 7)$. **445.** а) -5; $1\pm2\sqrt{2}$; б) 2; $\frac{6\pm\sqrt{22}}{3}$; $\frac{4\pm3\sqrt{2}}{2}$. **446.** а) Пры $a=3$; б) пры $a=4$. **447.** а) $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$; б) 60°; в) 0°; г) 45°. **448.** а) 100; б) 697; в) 75; г) -245; д) 16; е) $\sqrt{331}$; ж) $\sqrt{747}$; з) $\sqrt{1167}$; і) $\sqrt{427}$; к) $\sqrt{847}$. **449.** а) $\arccos\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$. **451.** а) $B\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $E_1\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$, $F_1\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};2\right)$; б) $y=0$; в) $y=\sqrt{3}-\sqrt{3}x$; г) $2x+2\sqrt{3}y+3z-2=0$; д) $x+\sqrt{3}y+z-1=0$; е) $2x+2\sqrt{3}y+3z-2=0$; ж) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; з) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; і) 0; к) 1,4; л) $0{,}6\sqrt{5}$; м) 0,4. **452.** 1 : 2. **453.** а) 3 : 1; б) 6 : 1; в) 3 : 2. **454.** 1 : 1. **455.** 2 : 1. **456.** 1 : 2. **460.** $\frac{1}{k+1}\overrightarrow{AC}+\frac{k}{k+1}\overrightarrow{BD}$. **467.** 1 : 5. **468.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$. **469.** 90°. **470.** $\arccos\frac{1}{5}$. **471.** 45°. **472.** $\arccos\frac{7}{5}$. **473.** 60°. **474.** а) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{6}}{9}$; г) $\frac{\sqrt{7}}{7}$. **475.** а) $\frac{16}{17}$; б) $\frac{3}{\sqrt{34}}$; в) $\frac{4\sqrt{2}}{7}$; г) $\frac{4}{\sqrt{187}}$. **476.** а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{13}{14}$; в) $\frac{1}{8}$; г) $\frac{1}{\sqrt{35}}$. **477.** а) $\frac{\sqrt{74}}{37}$; б) $\frac{\sqrt{65}}{26}$; в) $\frac{1}{\sqrt{26}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{20}$. **478.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\arccos\frac{7\sqrt{6}}{18}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{30}}{6}$. **479.** а) 30°; б) $\arccos\frac{\sqrt{130}}{65}$; в) $\arccos\frac{2}{\sqrt{19}}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}$. **480.** а) 90°; б) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$; в) $\arccos\frac{2\sqrt{14}}{35}$; г) $\arccos\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **481.** а) 90°; б) $\arccos\frac{-\sqrt{35}}{70}$. **482.** б) $\arccos\frac{2}{3}$. **483.** а) $\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2(\cos\alpha+1)}$; б) $\frac{1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{4(\cos\alpha+1)(\cos\beta+1)}$. **484.** а) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; б) 90°;

в) $\arccos\frac{1}{4}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{8}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; е) $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$. **485.** а) $60°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\arccos\frac{1}{8}$; г) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$; е) $60°$. **486.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{30}}{10}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{93}}{31}$; д) $\frac{4\sqrt{93}}{31}$; е) $\frac{\sqrt{93}}{31}$. **487.** а) 1; б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; в) $\frac{\sqrt{21}}{7}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{3\sqrt{57}}{19}$; е) $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **488.** $60°$. **489.** $45°$. **490.** а) $\arccos\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\arccos\frac{5}{\sqrt{33}}$. **491.** а) $\arccos\frac{2}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $45°$; г) $\arccos\frac{1}{3}$; д) $\arccos\frac{\sqrt{11}}{4}$; е) $90°$. **492.** а) $\arccos\frac{3}{5}$; б) $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\arccos\frac{1}{5}$. **493.** а) $\arccos\frac{21}{23}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$; в) $90°$; г) $\arccos\frac{5}{\sqrt{69}}$. **494.** а) $\arccos\frac{\sqrt{14}}{7}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{7}}$; в) $\arccos\frac{2}{3}$. **495.** а) $90°$; б) $\arccos\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\arccos\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$. **496.** а) 3 : 2; б) $\arccos\frac{5}{4\sqrt{3}}$. **497.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$; г) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$. **498.** а) $\arccos\frac{\sqrt{6}}{4}$; б) $\arccos\frac{\sqrt{33}}{11}$. **499.** а) $0°$; б) $60°$. **500.** а) $45°$; б) $\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$. **501.** а) $60°$; б) $\arcsin\frac{2}{3}$; в) $60°$; г) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$; д) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{35}}$; е) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{13}}$; ж) $\arcsin\frac{3}{2\sqrt{51}}$; з) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{13}}$. **502.** а) $\arccos\sqrt{\frac{5}{6}}$; б) $\arcsin\frac{1}{\sqrt{6}}$; в) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{15}}$; г) $\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. **503.** а) $\frac{\sqrt{438}}{3}$; б) $\frac{8\sqrt{38}}{19}$; в) $\frac{9}{\sqrt{17}}$; г) $\frac{\sqrt{91}}{7}$; д) $\frac{3\sqrt{42}}{7}$; е) $\frac{2\sqrt{1798}}{29}$. **504.** а) $\frac{\sqrt{7}}{3}$; б) 1; в) $\sqrt{\frac{323}{54}}$; г) 2; д) $\sqrt{3}$; е) $\frac{\sqrt{1339}}{26}$; ж) $2\sqrt{3}$; з) $\frac{\sqrt{1342}}{22}$. **505.** а) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; б) 0,5; в) 0,5; г) $\frac{\sqrt{7}}{2}$; д) $0{,}8\sqrt{5}$; е) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) 0,5; з) $0{,}8\sqrt{5}$. **506.** а) $\frac{a\sqrt{55}}{10}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{95}}{20}$; г) $\frac{a\sqrt{11}}{4}$. **507.** а) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{7}}{4}$; в) $\frac{a\sqrt{39}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{210}}{10}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; е) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$; ж) $\frac{a\sqrt{10}}{2}$; з) $\frac{a\sqrt{210}}{5}$.

508. а) $a\sqrt{\frac{14}{15}}$; б) $a\sqrt{\frac{14}{23}}$; в) $a\sqrt{\frac{7}{46}}$; г) $a\sqrt{\frac{14}{25}}$. **509.** а) $\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$; б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc}$. **510.** а) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; б) $\frac{abc\sqrt{3}}{ab+ac+bc+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}}$.

511. а) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; б) $\frac{3a\sqrt{21}}{28}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{8}$; г) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$; д) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$; е) $\frac{3a}{\sqrt{7}}$; ж) $\frac{4a}{\sqrt{7}}$; з) $\frac{5a\sqrt{159}}{53}$. **512.** а) $\sqrt{3}$; б) 2; в) $4\sqrt{3}$; г) $\frac{\sqrt{58}}{2}$; д) $\frac{11\sqrt{39}}{13}$; е) $0{,}8\sqrt{15}$; ж) $\frac{\sqrt{663}}{13}$; з) $\frac{2\sqrt{6783}}{19}$. **513.** а) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; б) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; в) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; г) $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$; д) 0; е) 0; ж) $\frac{a\sqrt{13}}{26}$; з) $\frac{a\sqrt{3}}{8}$. **514.** а) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{13a\sqrt{6}}{72}$; в) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$; г) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; д) 0; е) $\frac{a\sqrt{70}}{35}$. **515.** а) $\frac{a}{2}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; г) $\frac{a}{2}$; д) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$; е) $\frac{3a\sqrt{22}}{22}$. **516.** а) $2\sqrt{3}$; б) $\frac{6\sqrt{17}}{17}$; в) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$; г) $\frac{6\sqrt{3}}{5}$; д) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. **517.** а) $\frac{5a\sqrt{53}}{106}$; б) $\frac{3a\sqrt{55}}{110}$; в) $\frac{3a\sqrt{21}}{14}$; г) $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$; д) $\frac{5a\sqrt{3}}{8}$; е) $\frac{a\sqrt{23}}{92}$.

Змест

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча вучня	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака вучню за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Латоцін Леанід Аляксандравіч
Чабатарэўскі Барыс Дзмітрыевіч
Гарбунова Ірына Уладзіміраўна

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 10 класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Рэдактары *А. У. Бельская, Л. В. Саламаха*
Мастакі *К. У. Максімава, К. Ю. Сарока*
Мастацкія рэдактары *І. М. Кузьмянкова, К. У. Максімава*
Тэхнічны рэдактар *І. М. Кузьмянкова*
Камп'ютарны набор *А. У. Бельскай, І. М. Кузьмянковай*
Камп'ютарная вёрстка *І. М. Кузьмянковай*
Карэктар *А. У. Бельская*

Падпісана да друку 14.02.2020. Фармат 70×100 $^1/_{16}$.
Папера афсетная. Друк афсетны.
Ум. друк. арк. 16,25. Ул.-выд. арк. 13,0. Тыраж 11 265 экз. Заказ .

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства
«Выдавецтва "Адукацыя і выхаванне"».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў
№ 1/19 ад 02.08.2013.

Вул. Будзённага, 21, 220070, г. Мінск.
Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца,
вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, г. Мінск.