В. У. Казакоў

ГЕАМЕТРЫЯ

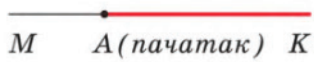
7

Прамая і яе часткі. Акружнасць. Вугал

Прамая

Праз два пункты

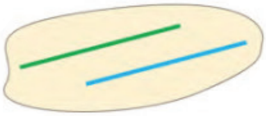
Прамень



Адрэзак

$AM + MB = AB$

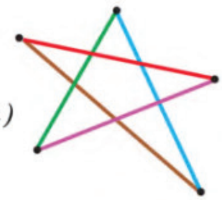
Паралельныя прамыя



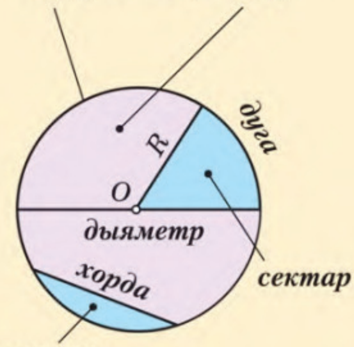
Ломаная

простая (няпростая)

замкнёная (незамкнёная)

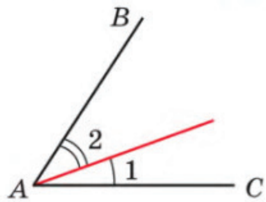


Акружнасць і круг

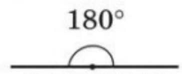


Вугал

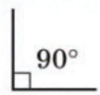
Бісектрыса вугла — прамень...



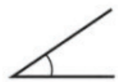
$\angle 1 + \angle 2 = \angle BAC$



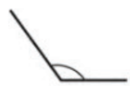
разгорнуты



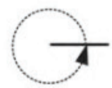
прамы



востры

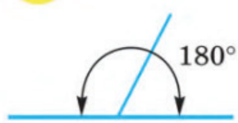


тупы



поўны

T_1 **Сумежныя**

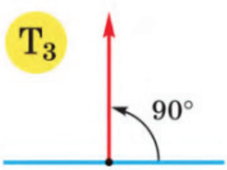


T_2 **Вертыкальныя**

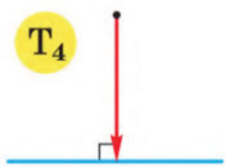
$$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$$
$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$$
$$\angle 1 = \angle 2$$

Перпендыкулярныя прамыя

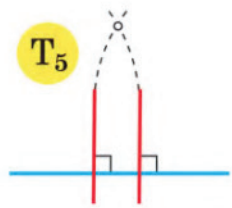
T_3



T_4



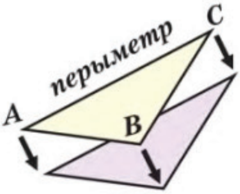
T_5



База ведаў па главе I

1. Аксіёма прамой.
2. Прамень. Дадатковыя прамені.
3. Адрэзак і яго ўласцівасці.
4. Ломаная і яе віды.
5. Паралельныя прамыя.
6. Акружнасць, круг, іх элементы.
7. Вугал і яго ўласцівасці.
8. Бісектрыса вугла.
9. Разгорнуты вугал. Градус. Віды вуглоў.
10. Аксіёма. Тэарэма.
11. Уласцівасць сумежных вуглоў.
12. Уласцівасць вертыкальных вуглоў.
13. Перпендыкулярныя прамыя. Перпендыкуляр да прамой.
14. Тэарэма аб узведзеным перпендыкуляры.
15. Тэарэма аб апушчаным перпендыкуляры.
16. Тэарэма аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў



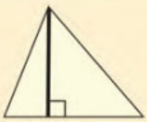
У роўных трохвугольніках супраць роўных старон ляжаць роўныя вуглы, і наадварот...

1 ПРЫМЕТА
(па дзвюх старанах
і вугле паміж імі)

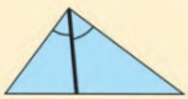
2 ПРЫМЕТА
(па старане
і двух прылеглых
да яе вуглах)

3 ПРЫМЕТА
(па трох старанах)

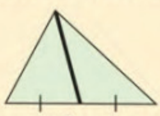
Раўнабедраны трохвугольнік



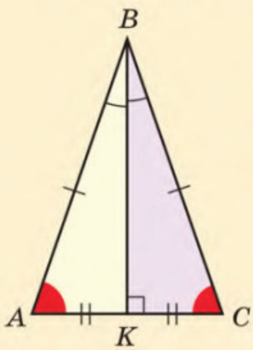
вышыня



бісектрыса



медыяна



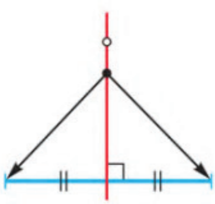
ПРЫМЕТЫ

Калі два вуглы роўныя...
Калі вышыня з'яўляецца медыянай...
Калі вышыня з'яўляецца бісектрысай...
Калі медыяна з'яўляецца бісектрысай...

УЛАСЦІВАСЦІ

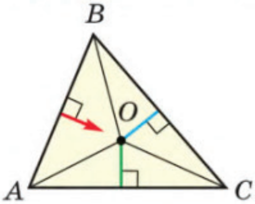
Вуглы пры аснове роўныя.
Бісектрыса... з'яўляецца вышынёй і медыянай.

Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка



Геаметрычнае
Месца
Пунктаў

Любы пункт сярэдзіннага...
Калі пункт роўнааддалены...



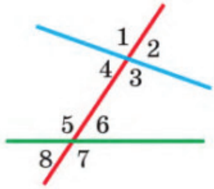
1-ы грунтоўны пункт

1) O роўнааддалены ад A і C
2) O роўнааддалены ад B і C
3) Значыць, O роўнааддалены ад A і B
4) O ляжыць на трэцім сярэдзінным перпендыкуляры

База ведаў па главе II

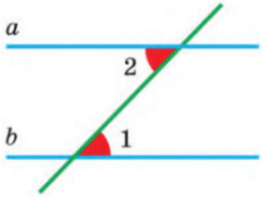
1. Трохвугольнік і яго перыметр.
2. Роўныя трохвугольнікі і ўласцівасць роўных трохвугольнікаў.
3. 1-я прымета роўнасці трохвугольнікаў.
4. 2-я прымета роўнасці трохвугольнікаў.
5. 3-я прымета роўнасці трохвугольнікаў.
6. Медыяна, бісектрыса, вышыня трохвугольніка.
7. Раўнабедраны трохвугольнік.
8. Уласцівасць вуглоў раўнабедранага трохвугольніка.
9. Уласцівасць бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка.
10. Прыметы раўнабедранага трохвугольніка.
11. Роўнастаронні трохвугольнік.
12. Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка.
13. Тэарэма аб сярэдзінным перпендыкуляры.
14. ГМП.
15. Перасячэнне сярэдзінных перпендыкуляраў да старон трохвугольніка ў адным пункце (1-ы грунтоўны пункт).

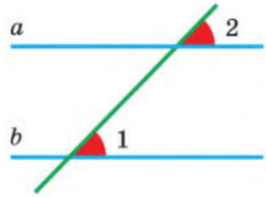
Паралельныя прамыя

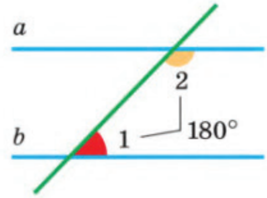


накрыжлеглыя
адпаведныя
аднастароннія

Прыметы паралельнасці прамых

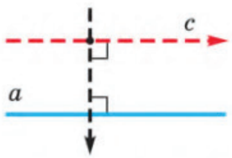




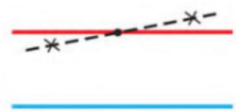


Калі накрыжлеглыя вуглы роўныя,
або адпаведныя вуглы роўныя,
або сума аднастаронніх вуглоў роўна 180°, *то* $a \parallel b$.

Аксіёма паралельнасці прамых



I. ***...можна правесці прамую, паралельную дадзенай.***

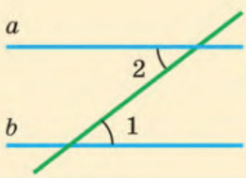


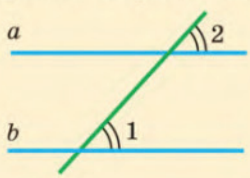
II. ***Толькі адну!***

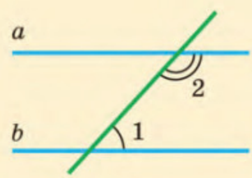
III. ***Дзве прамыя, паралельныя трэцяй...***

Уласцівасці вуглоў пры паралельных прамых

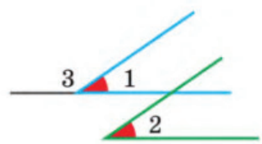
Калі прамыя паралельныя, то...

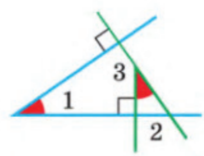






IV. ***Прамая, перпендыкулярная адной з дзвюх паралельных прамых...***



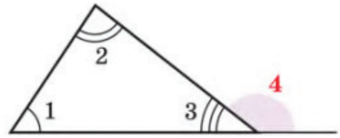


V. ***...або роўныя, або ў суме складаюць 180°.***

База ведаў па главе III

1. Дзве прамыя, сякучая і віды вуглоў пры іх.
2. Прыметы паралельнасці прамых.
3. Тэарэма аб існаванні паралельнай прамой (I).
4. Аксіёма паралельных прамых (II).
5. Тэарэма аб дзвюх прамых, паралельных да трэцяй (III).
6. Уласцівасці вуглоў пры паралельных прамых і сякучай.
7. Тэарэма аб прамой, перпендыкулярнай адной з дзвюх паралельных прамых (IV).
8. Тэарэма аб вуглах з адпаведна паралельнымі старанамі (V).
9. Тэарэма аб вуглах з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі (V).

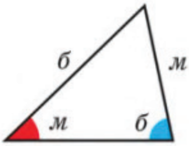
Сума вуглоў трохвугольніка



Знешні вугал трохвугольніка

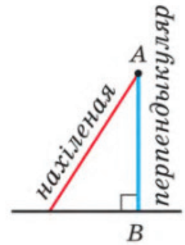
$\angle 4 = 180° - \angle 3 =$
$= \angle 1 + \angle 2$

Супраць большай стараны ляжыць большы вугал.
Супраць большага вугла ляжыць большая старана.



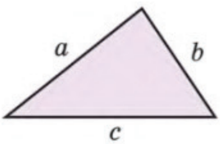
Вынікі

Катэт меньшы за гіпатэнузу.
Перпендыкуляр меньшы за нахіленую.



AB — адлегласць ад пункта да прамой

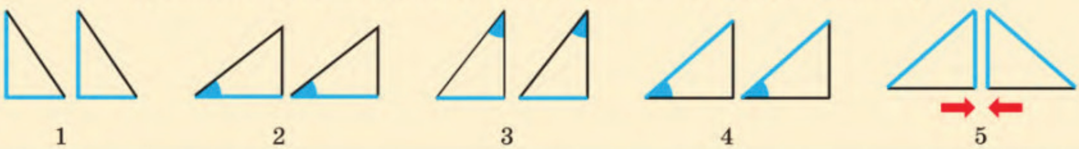
Няроўнасць трохвугольніка

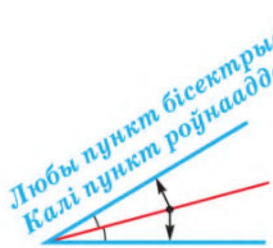


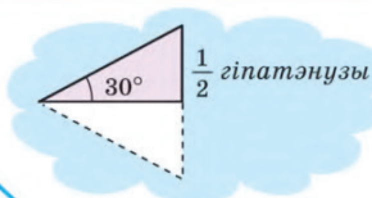
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

Любая старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон.

Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў







Бісектрысы... у адным пункце.

База ведаў па главе IV

1. Тэарэма аб суме вуглоў трохвугольніка.
2. Уласцівасць вуглоў роўнастаронняга і прамавугольнага трохвугольнікаў.
3. Тэарэма аб знешнім вугле трохвугольніка.
4. Тэарэма аб суадносінах паміж старанамі і вугламі трохвугольніка.
5. Вынікі: а) аб катэце і гіпатэнузе; б) аб нахіленай і перпендыкуляры.
6. Адлегласць ад пункта да прамой.
7. Няроўнасць трохвугольніка.
8. Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
9. Тэарэма аб бісектрысе вугла.
10. Перасячэнне бісектрыс трохвугольніка ў адным пункце (2-і грунтоўны пункт).
11. Тэарэма аб катэце, які ляжыць супраць вугла ў 30°.
12. Тэарэма аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі.

В. У. Казакоў

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 7 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Мінск «Народная асвета» 2022

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721
К14

Пераклад з рускай *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзент
кафедра геаметрыі, тапалогіі і методыкі выкладання матэматыкі
Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта
(кандыдат фізіка-матэматычных навук дацэнт *Г. А. Кукрак*)

У афармленні вокладкі выкарыстаны фрагмент фрэскі
Рафаэля Санці «Афінская школа»

Казакоў, В. У.

К14 Геаметрыя : вучэбны дапаможнік для 7-га класа ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі з беларускай мовай навучання / В. У. Казакоў ; пер. з рускай Н. М. Алганавай. — 2-е выд., выпр. і дап. — Мінск : Народная асвета, 2022. — 183 с. : іл.

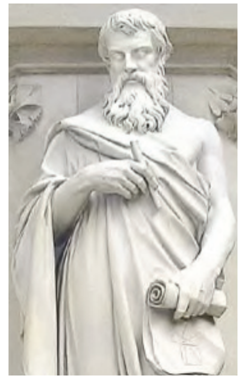
ISBN 978-985-03-3798-6.

Першае выданне вучэбнага дапаможніка выйшла ў 2017 г.

УДК 514(075.3=161.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-985-03-3798-6

УВОДЗІНЫ



Статуя Эўкліда ў Музеі натуральнай гісторыі Оксфардскага ўніверсітэта (Англія)

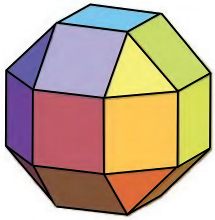
Геаметрыя ўзнікла ў глыбокай старажытнасці і лічыцца адной з першых навук. З'яўленне геаметрычных ведаў звязана з практычнай дзейнасцю людзей. У перакладзе са старажытнагрэчаскай слова «геаметрыя» азначае «вымярэнне зямлі». Некаторыя геаметрычныя факты сустракаюцца ўжо ў вавілонскіх клінапісных таблічках і егіпецкіх папірусах (3-е тысячагоддзе да н. э.). Старажытныя грэкі надавалі вялікую ўвагу вывучэнню геаметрыі. Імёны такіх вучоных, як Эўклід, Архімед, Піфагор назаўсёды ўвайшлі ў гісторыю чалавечага мыслення. На акадэміі старажытнагрэчаскага філосафа Платона быў выбіты надпіс: «*Ды не ўвойдзе сюды той, хто не ведае геаметрыі*». Адукаваны чалавек абавязаны быў ведаць геаметрыю.

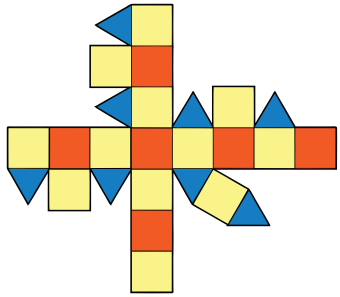
На вокладцы вучэбнага дапаможніка выкарыстаны фрагмент карціны вялікага італьянскага мастака эпохі Адраджэння Рафаэля Санці «Афінская школа» (акадэмія Платона), дзе паказаны Эўклід і яго вучні, якія рашаюць геаметрычную задачу.

Сёння, як і ў часы Эўкліда, геаметрыя — запатрабаваная навука. Ва ўніверсітэтах усяго свету вывучаюць начартальную, аналітычную і камп'ютарную геаметрыю. Геаметрыя шырока выкарыстоўваецца ў інжынернай справе, архітэктуры, жывапісе, у вытворчасці і ў іншых сферах дзейнасці чалавека.

Вывучэнне геаметрыі развівае ўменне чалавека разважаць лагічна, абгрунтоўваць свой пункт гледжання.

А зараз пра тое, што вывучае геаметрыя. Свет вакол нас складаецца з прадметаў, якія характарызуюцца некаторымі ўласцівасцямі: колерам, шчыльнасцю, складам рэчыва і г. д. З усіх уласцівасцей матэматыкаў цікавіць толькі форма, памеры і размяшчэнне прадметаў адносна адзін аднаго. Таму прадметы ў геаметрыі называюцца фігурамі, а сама геаметрыя займаецца вывучэннем уласцівасцей гэтых фігур.



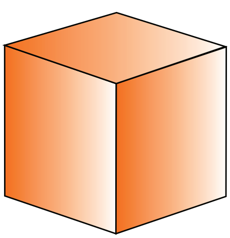


Геаметрычныя фігуры — гэта ідэалізаваныя мадэлі навакольных прадметаў. На рысунку вы бачыце будынак Нацыянальнай бібліятэкі Беларусі, яго геаметрычную мадэль, а далей — разгортку паверхні гэтай фігуры, што складаецца з трохвугольнікаў і квадратаў.

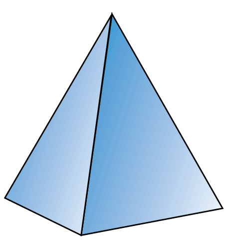
Геаметрычныя фігуры могуць быць плоскімі і характарызавацца, напрыклад, шырынёй і даўжынёй, як прамавугольнік. А могуць быць прасторавымі і характарызавацца яшчэ і вышынёй, як паралелепіпед. Частку прасторы, абмежаваную з усіх бакоў, называюць *геаметрычным целам*.

Геаметрычныя целы маюць *паверхню* — гэта мяжа (абалонка) цела. Так, паверхня куба складаецца з шасці квадратаў, паверхняй шара з'яўляецца сфера. Некаторыя паверхні з'яўляюцца плоскімі, як шыба, іншыя — крывымі, як паверхня кубка. Пры перасячэнні дзвюх паверхняў утвараюцца *лініі*. Вы бачыце гэтыя лініі на кантах куба і піраміды.

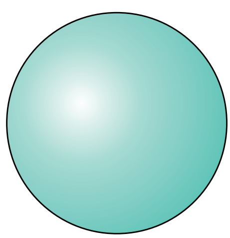
Калі шар перасячы плоскасцю, то на яго паверхні атрымаецца замкнёная крывая лінія — акружнасць. На глобусе гэта, напрыклад, лінія экватара. Пры перасячэнні дзвюх ліній атрымліваюцца *пункты*. У куба або піраміды — гэта вяршыні, дзе сыходзяцца канты.



Куб



Піраміда

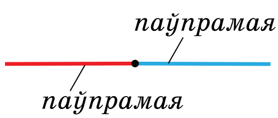


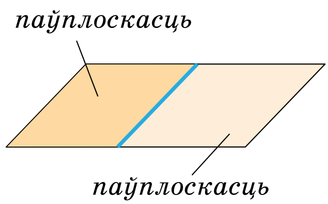
Шар

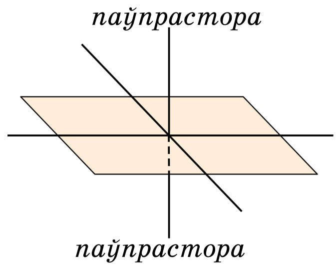
Геаметрычныя фігуры, такія як *пункт*, *прамая* і *плоскасць*, — гэта ўяўныя, ці так званыя *абстрактныя паняцці*. Рэальны пункт, адзначаны на паперы, заўсёды мае памеры, няхай і малыя. А вось матэматычны пункт памераў не мае, гэта ўяўная фігура. Матэматычная прамая не мае таўшчыні і бясконцая ў абодва бакі. Плоскасць таксама не мае таўшчыні і бясконцая ва ўсе бакі. Прамая лінія атрымліваецца пры перасячэнні дзвюх плоскасцей. Прамую нельга выявіць на аркушы паперы цалкам. Можна паказаць толькі некаторую яе частку ў выглядзе адрэзка.

Лічыцца, што прамая, плоскасць, любая лінія, паверхня, геаметрычнае цела складаюцца з пунктаў. І наогул, усякую *геаметрычную фігуру* мы ўяўляем сабе складзенай з пунктаў.

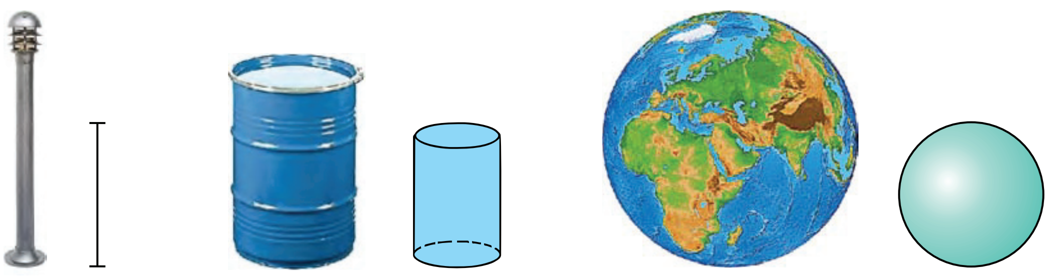
Калі на прамой адзначыць пункт, то ён разаб'е прамую на дзве паўпрамыя (на два прамені). Калі на плоскасці правесці прамую, то яна разаб'е плоскасць на дзве паўплоскасці. Плоскасць, размешчаная ў прасторы, разбівае яе на дзве паўпрасторы.







Для даследавання рэальных аб'ектаў разглядаюць іх матэматычныя мадэлі. Так, мадэллю слупа можа быць адрэзак. Мадэллю бочкі можа быць цыліндр, а мадэллю зямнога шара — геаметрычны шар.



А цяпер некалькі слоў пра тое, як арганізаваны вучэбны дапаможнік. Матэрыял у ім падзелены на 5 глаў. Кожная глава складаецца з параграфаў. У параграфе сфармуляваны і даказаны ўласцівасці геаметрычных фігур. У канцы параграфа дадзены *заданні*, якія ўключаюць у сябе:

а) ключавыя задачы параграфа з рашэннямі;

б) задачы для самастойнага рашэння, дзе знакам (*) адзначаны задачы павышанай складанасці.

Іншыя заданні да параграфа прызначаны для раскрыцця творчых здольнасцей навучэнцаў. У гэтых заданнях неабходна перакласці якую-небудзь праблему на мову матэматыкі і рашыць яе (рубрыка «Мадэляванне»), прымяніць геаметрычныя веды ў практычнай дзейнасці (рубрыка «Рэальная геаметрыя»), азнаёміцца з геаметрычным матэрыялам, які будзе вывучацца пазней (рубрыка «Геаметрыя 3D).

У кожнай главе ёсць творчыя заданні для работы з Інтэрнэтам, якія дазваляць значна пашырыць матэматычны кругагляд сямікласнікаў. Прывядзём прыклад такога задання.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высвятліце, ці жылі ў адзін перыяд два вялікія старажытнагрэчаскія вучоныя: **Эўклід** і **Архімед**. Чым знакаміты кожны з іх? У якіх гарадах яны жылі і якім краінам належаць гэтыя гарады сёння?

На форзацах у пачатку і ў канцы вучэбнага дапаможніка прыводзіцца вучэбны матэрыял у кароткай форме.

Мы спадзяемся, што навучэнцам будзе цікава вывучаць геаметрыю ў 7-м класе, і жадаем поспеху ў спасціжэнні адной з самых прыгожых навук!

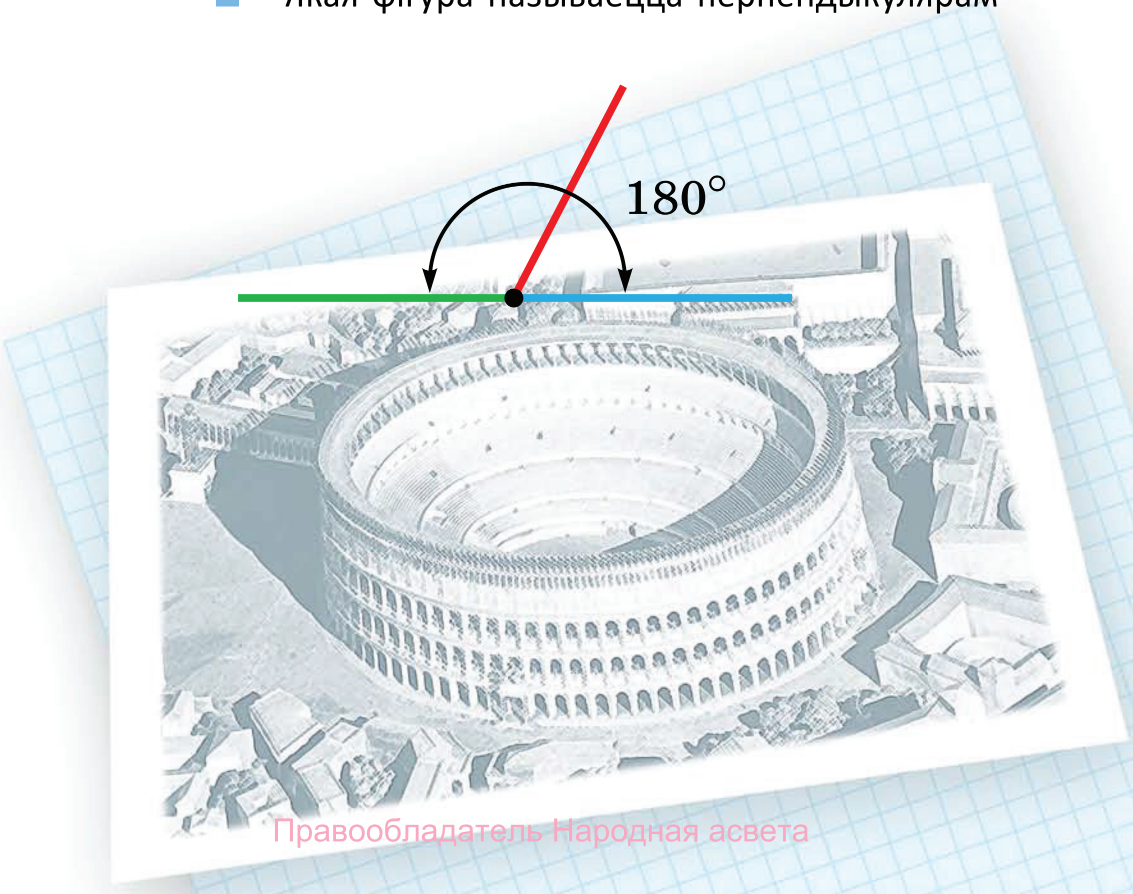
Дадатковыя матэрыялы да вучэбнага дапаможніка «Геаметрыя, 7» можна знайсці на сайце: https://eior.by (Адзіны інфармацыйна-адукацыйны рэсурс), выбраўшы ў меню «Геаметрыя, 7 клас».

Глава I

Пачатковыя паняцці геаметрыі

У гэтай главе вы даведаецеся:

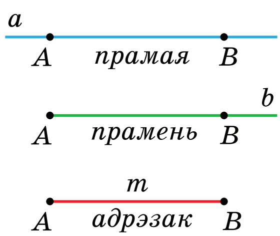
- Чым займаецца геаметрыя
- Чым адрозніваюцца круг і акружнасць
- Якія вуглы называюцца сумежнымі
- Якая фігура называецца перпендыкулярам



§ 1. Паўтарэнне геаметрычнага матэрыялу 5—6 класаў

Вам ужо вядомы такія геаметрычныя фігуры, як прамая, прамень, адрэзак, акружнасць, вугал, а таксама паралельныя і перпендыкулярныя прамыя. Успомнім раней атрыманыя звесткі аб гэтых фігурах.

1.1. Прамая, прамень, адрэзак



Рыс. 1

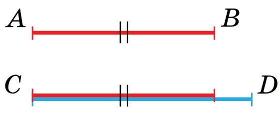
Прамую можна ўявіць як туга нацягнутую нітку, бясконцую ў абодва бакі. Прамая выяўляецца адрэзкам, які можа быць прадоўжаны ў абодва бакі.

Прамень і **адрэзак** — гэта часткі прамой. Прамень можна ўявіць як прамень ад лазернай указкі, а адрэзак — як аловак. Прамень складаецца з пункта прамой (*пачатак праменя*) і ўсіх яе пунктаў, што ляжаць па адзін бок ад дадзенага пункта. Адрэзак складаецца з двух пунктаў прамой (*канцоў адрэзка*) і ўсіх яе пунктаў, што ляжаць паміж двума дадзенымі пунктамі.

На рысунку 1 паказаны прамая AB (або BA, або a), прамень AB (або b), адрэзак AB (або BA, або m). Пры абазначэнні праменя дзвюма літарамі на першым месцы ставіцца пачатак праменя.

1.2. Вымярэнне адрэзкаў

Для параўнання адрэзкаў іх можна накласці адзін на адзін. Калі адрэзкі супадуць сваімі канцамі, то яны роўныя, калі не — то адрэзак, які ляжыць унутры іншага адрэзка, будзе меншым. На рысунку 2 адрэзак AB меншы за адрэзак CD, г. зн. $AB < CD$. Роўныя адрэзкі на чарцяжы часам абазначаюць роўнай колькасцю рысачак на іх.



Рыс. 2

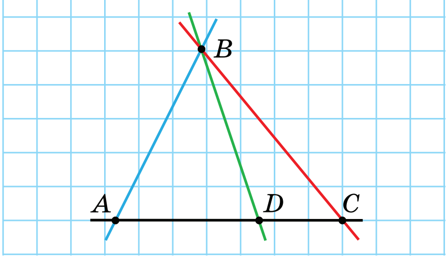
Адрэзкі можна параўнаць, вымераўшы іх даўжыні. Адрэзак вымяраецца пры дапамозе іншых адрэзкаў, якія прыняты за адзінку даўжыні: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км і г. д.

Калі на адрэзку AB укладваецца 3 адрэзкі па 1 дм, 5 адрэзкаў па 1 см і 2 адрэзкі па 1 мм, то даўжыня адрэзка AB роўна 3 дм 5 см 2 мм.

Пры рашэнні геаметрычных задач даўжыні ўсіх адрэзкаў звычайна запісваюць у адных адзінках: $AB = 352$ мм або $AB = 3{,}52$ дм. Калі ва ўмове размернасць не названа, то маецца на ўвазе, што даўжыні адрэзкаў дадзены ў адных адзінках.

Заданне 1

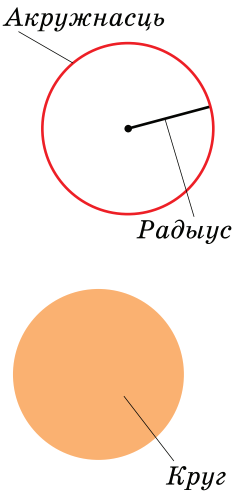
Назавіце 4 прамыя, 6 адрэзкаў і 10 праменяў, паказаных на рысунку.



Часта замест слоў «даўжыня адрэзка роўна 12 см» кажуць «адрэзак роўны 12 см», замест «знайдзіце даўжыню адрэзка» — «знайдзіце адрэзак».

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

1.3. Акружнасць і круг



Рыс. 3

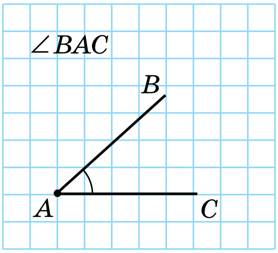
Акружнасць — гэта замкнёная лінія на плоскасці, усе пункты якой знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад аднаго пункта — цэнтра акружнасці.

Круг — гэта ўнутраная частка плоскасці, абмежаваная акружнасцю.

Памеры акружнасці і круга вызначаюцца іх *радыусам* — адрэзкам, які злучае цэнтр з пунктам на акружнасці (рыс. 3).

У матэматыцы «акружнасць» і «круг» — два розныя, хоць і звязаныя паміж сабой, паняцці. Акружнасць, напрыклад, з'яўляецца мадэллю абруча, а круг — мадэллю вечка люка.

1.4. Вугал

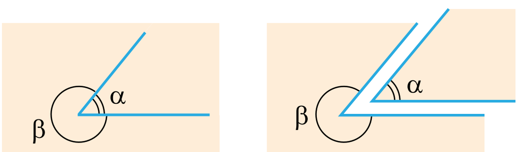


Рыс. 4

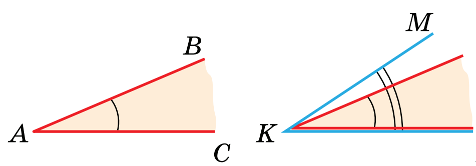
Калі з пункта правесці два прамені, то атрымаецца **вугал**. Гэтыя прамені называюцца *старанамі* вугла, а іх агульны пункт — яго *вяршыняй*. Пры абазначэнні вугла трыма вялікімі літарамі вяршыня вугла запісваецца ў сярэдзіне.

На рысунку 4 прамені AB і AC — стораны вугла BAC (або CAB), пункт A — вяршыня вугла. Калі зразумела з рысунка, пра які вугал ідзе гаворка, то яго абазначаюць адной літарай пры вяршыні вугла: $\angle A$. Часта вуглы абазначаюць лікамі, пастаўленымі ўнутры вугла каля яго вяршыні, або малымі літарамі грэчаскага алфавіта: α (альфа), β (бэта), γ (гама), φ (фі). Часам роўныя вуглы на чарцяжы абазначаюць роўнай колькасцю дуг.

Вугал, паказаны на плоскасці, дзеліць яе на дзве часткі, кожная з якіх называецца *плоскім* вуглом. На рысунку 5 гэта вуглы α і β. Далей мы будзем разглядаць плоскія вуглы. Слова «плоскі» пры называнні вуглоў ужываць не будзем.



Рыс. 5

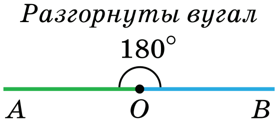


Рыс. 6

Параўнаць вуглы можна накладаннем, сумясціўшы старану аднаго вугла са старанОй другога. Калі вуглы супадуць, то яны роўныя; калі не, то вугал, які ляжыць унутры іншага вугла, лічыцца меншым. На рысунку 6 $\angle BAC$ меншы за $\angle MKN$.

1.5. Вымярэнне вуглоў

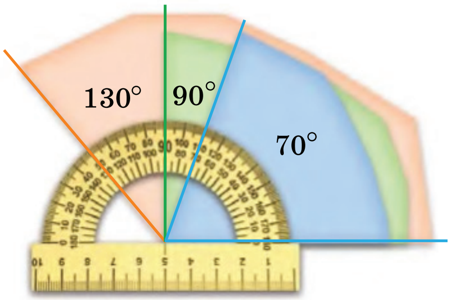
Разгорнуты вугал



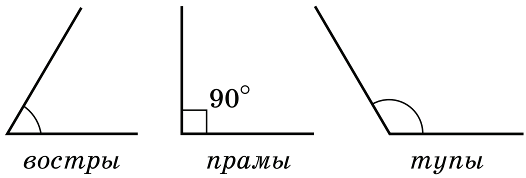
Рыс. 7

Калі стораны вугла павярнуць вакол яго вяршыні так, каб яны ўтварылі прамую, то атрымаецца **разгорнуты** вугал (рыс. 7).

Вуглы можна параўнаць, вымераўшы іх велічыню. Вуглы вымяраюцца ў градусах. Велічыню разгорнутага вугла прымаюць за 180°.



Рыс. 8



Рыс. 9

Тады 1° — гэта $\frac{1}{180}$ частка разгорнутага вугла, якая атрымаецца, калі з яго вяршыні правесці прамені, што дзеляць разгорнуты вугал на 180 роўных частак. Вуглы вымяраюць пры дапамозе транспарціра (рыс. 8). Транспарцір таксама дазваляе будаваць вугал дадзенай градуснай меры.

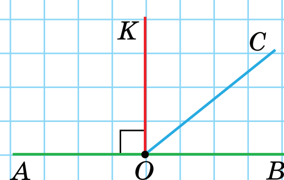
Віды вуглоў: вугал, меншы за 90°, называецца *вострым*; роўны 90°, — *прамым*; большы за 90°, але меншы за 180°, — *тупым* вуглом (рыс. 9).

Невядомы вугал пры рашэнні задач часам абазначаюць x або $x°$. Літарамі α, β, γ, ... абазначаюць і вугал, і яго градусную меру.

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

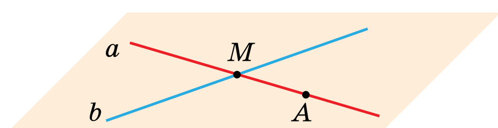
Назавіце ўсе вуглы на рысунку і вызначыце іх від.



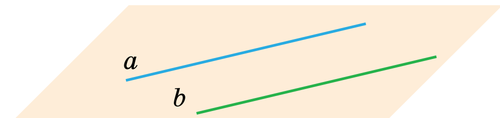
1.6. Паралельныя і перпендыкулярныя прамыя

На рысунку 10 прамыя a і b маюць агульны пункт M. Гавораць, што прамыя a і b перасякаюцца ў пункце M.

Пункт A належыць прамой a, але не належыць прамой b. Гэта можна запісаць так: $A \in a$, $A \notin b$, $a \cap b = M$, дзе «$\in$» — знак прыналежнасці пункта прамой, «$\cap$» — знак перасячэння геаметрычных фігур.

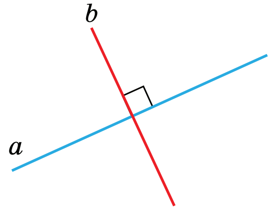


Рыс. 10



Паралельныя прамыя

Рыс. 11



Перпендыкулярныя прамыя

Рыс. 12

На плоскасці дзве прамыя могуць або перасякацца, або не перасякацца. Тыя прамыя на плоскасці, што не перасякаюцца, называюцца **паралельнымі**. Калі прамыя a і b паралельныя (рыс. 11), то пішуць $a \parallel b$.

Дзве прамыя, якія пры перасячэнні ўтвараюць прамы вугал, называюцца **перпендыкулярнымі**. Калі прамыя a і b перпендыкулярныя (рыс. 12), то пішуць $a \perp b$.

ВАЖНА!

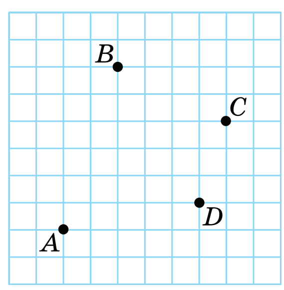
Прамыя, якія супадаюць, будзем лічыць адной прамой. Таму, калі сказана «дадзены дзве прамыя», гэта азначае, што дадзены дзве *розныя* прамыя, якія не супадаюць. Гэта датычыцца таксама пунктаў, праменяў, адрэзкаў і іншых фігур.

Ёсць два спосабы практычнага параўнання адрэзкаў, а таксама даўжынь вуглоў: 1) накладанне; 2) параўнанне вынікаў вымярэння. Абодва спосабы з’яўляюцца прыблізнымі.

У геаметрыі адрэзкі і вуглы могуць быць роўнымі, калі гэта дадзена па ўмове або вынікае з умовы на падставе лагічных разважанняў.

Заданні да § 1

Перанясіце ў сшытак пункты A, B, C і D, захаваўшы іх размяшчэнне (рыс. 13), і выканайце заданні 1—6.



Рыс. 13

1. Вызначыце, ці перасякаюцца:

а) адрэзкі BC і AD;
б) адрэзкі AC і BD;
в) прамыя BC і AD;
г) прамені CB і AD.

2. Адзначце пункт K, у якім перасякаюцца прамені BC і AD. Пры дапамозе транспарціра вызначыце велічыню вугла AKB.
3. Пабудуйце вугал BCF, роўны $60°$, і вугал DAM, роўны $120°$.
4. Правядзіце пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка прамую BH, перпендыкулярную да прамой AD.
5. Пабудуйце цыркулем акружнасць з цэнтрам у пункце D, радыус якой роўны адрэзку DA. Вызначыце, якія з пунктаў A, B, C, D, K ляжаць на акружнасці, якія — унутры акружнасці, а якія — па-за акружнасцю.
6. Правядзіце адрэзак AB і падлічыце агульную колькасць адрэзкаў з канцамі ў пунктах A, B, C, D і K.

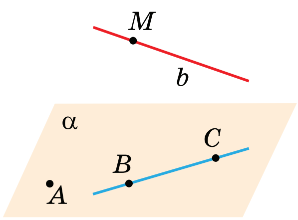
Заўвага. У главах 1—4 усе пабудовы выконваюцца пры дапамозе чарцёжных інструментаў: лінейкі, чарцёжнага трохвугольніка, транспарціра, цыркуля. Гарызантальныя (вертыкальныя) лініі разметкі ў школьным сшытку паралельныя, гарызантальная і вертыкальная лініі перпендыкулярныя. Памеры адной клеткі $0{,}5 \times 0{,}5$ см.

§ 2. Прадмет геаметрыі

2.1. Асноўныя фігуры

Асноўныя геаметрычныя фігуры — *пункт, прамая* і *плоскасць*. Гэта абстрактныя матэматычныя паняцці, якія прымаюцца без азначэння. Пункт абазначаецца вялікай літарай лацінскага алфавіта, прамая — дзвюма вялікімі або адной малой літарай лацінскага алфавіта. Плоскасць абазначаецца трыма вялікімі літарамі лацінскага або адной малой літарай грэчаскага алфавіта.

На рысунку 14 паказаны пункты A, B, C і M, прамыя BC і b, плоскасць α (альфа). Пункт A і прамая BC належаць плоскасці α, пункт M належыць прамой b.



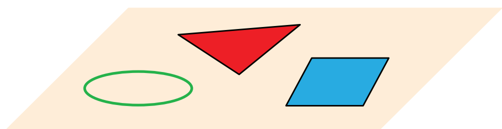
Рыс. 14

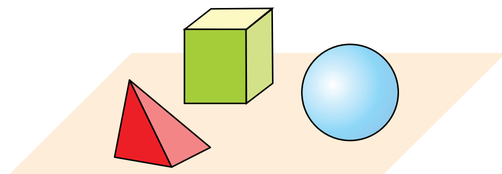
2.2. Планіметрыя і стэрэаметрыя

Школьны курс геаметрыі падзяляюць на планіметрыю і стэрэаметрыю.

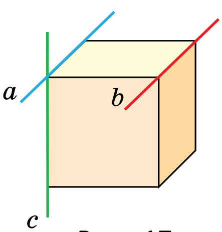
У *планіметрыі* вывучаюцца ўласцівасці плоскіх геаметрычных фігур, г. зн. тых, якія ўсімі сваімі пунктамі могуць быць размешчаны ў адной плоскасці. Гэта трохвугольнік, квадрат, акружнасць і іншыя фігуры (рыс. 15).

У *стэрэаметрыі* разглядаюцца ўласцівасці прасторавых геаметрычных фігур, якія не могуць цалкам размяшчацца ў адной плоскасці (рыс. 16). Такіх, напрыклад, як куб, прамавугольны паралелепіпед, піраміда, шар.


Рыс. 15


Рыс. 16

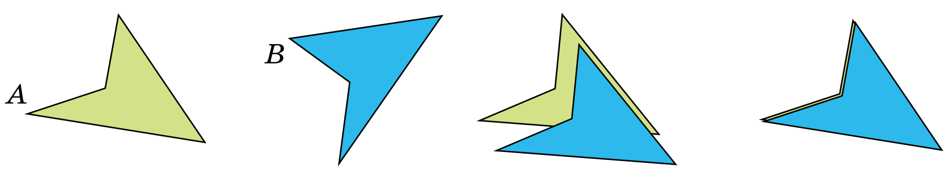
У стэрэаметрыі таксама разглядаюцца ўласцівасці пунктаў, прамых і плоскасцей у прасторы. Напрыклад, дзве прамыя на плоскасці або перасякаюцца, або не перасякаюцца, г. зн. паралельныя. У прасторы ж існуе яшчэ адзін выпадак узаемнага размяшчэння дзвюх прамых — гэта *скрыжаваныя* прамыя. Яны і не паралельныя, і не перасякаюцца.



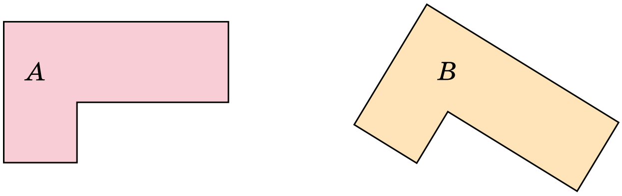
Рыс. 17

На рысунку 17 паказаны прамыя a, b і c, якія праходзяць праз канты куба. Прамыя a і b паралельныя. Прамыя a і c перасякаюцца. Прамыя b і c скрыжоўваюцца.

Геаметрычныя фігуры называюцца *роўнымі*, калі іх можна сумясціць накладаннем. Паколькі фігуры A і B, паказаныя на рысунку 18, сумясціліся ўсімі сваімі пунктамі, то гэта роўныя



Рыс. 18



Рыс. 19

фігуры. І калі сказана, што фігуры роўныя, то іх можна цалкам сумясціць адну з адной.

Часам для сумяшчэння роўных фігур, размешчаных на плоскасці, адну з іх даводзіцца перавярнуць. Напрыклад, як фігуру *C* на рысунку 19 для сумяшчэння з роўнымі ёй фігурамі *A* і *B*.

2.3. Азначэнні, аксіёмы, тэарэмы

Усе геаметрычныя фігуры, акрамя пункта, прамой і плоскасці, маюць *азначэнні*. У азначэнні даюцца адметныя характарыстыкі дадзенай фігуры або ўзаемнага размяшчэння фігур. Азначэнне, як правіла, змяшчае або слова ***называецца***, або слова ***гэта***. Напрыклад:

Азначэнне. *Адрэзкам называецца частка прамой, абмежаваная двума пунктамі.*

Азначэнне. *Роўнастаронні трохвугольнік — гэта трохвугольнік, у якога ўсе стораны роўныя.*

Уласцівасці фігур фармулююцца ў выглядзе аксіём і тэарэм.

Аксіёмамі называюцца сцверджанні аб асноўных уласцівасцях найпрасцейшых фігур, якія прымаюцца без доказу і не выклікаюць сумненняў у сваёй праўдзівасці.

Тэарэмамі называюцца правільныя сцверджанні, справядлівасць якіх вызначаецца шляхам лагічных разважанняў, якія называюцца **доказам**. Доказ кожнай тэарэмы абапіраецца на аксіёмы і раней доказаныя тэарэмы.

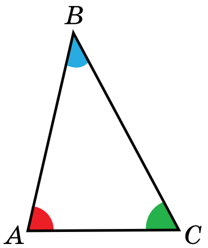
Напрыклад:

Аксіёма. *Праз любыя два пункты плоскасці можна правесці прамую, і прытым толькі адну* (рыс. 20).

Аксіёма

Рыс. 20

Тэарэма



$\angle A + \angle B + \angle C =$
$= 180°$

Рыс. 21

Тэарэма. *Сума вуглоў трохвугольніка роўна* 180° (рыс. 21).

> ***Аксіёма*** — гэта сцверджанне, якое прымаецца без доказу.

> ***Тэарэма*** — гэта сцверджанне, якое патрабуе доказу.

Акрамя азначэнняў, аксіём і тэарэм, у геаметрыі ёсць *задачы*. Вылучаюць тры асноўныя тыпы задач:

а) задачы на доказ;
б) задачы на вылічэнне;
в) задачы на пабудову.

Задачы *на доказ* падобныя да тэарэм. Тэарэмы апісваюць уласцівасці фігур, якія сустракаюцца найбольш часта.

У задачах *на вылічэнне* трэба па некаторых вядомых лікавых даных знайсці даўжыню адрэзка, велічыню вугла, перыметр, плошчу фігуры, аб’ём геаметрычнага цела і г. д.

У задачах *на пабудову* неабходна знайсці спосаб пабудовы якой-небудзь геаметрычнай фігуры пры дапамозе названых ва ўмове чарцёжных інструментаў.

Такім чынам, геаметрыя вывучае ўласцівасці фігур на плоскасці і ў прасторы. Уласцівасці фігур апісваюцца ў выглядзе аксіём і тэарэм. Пры рашэнні задач спасылаюцца на азначэнні, аксіёмы і тэарэмы.

Такую геаметрыю стварылі старажытнагрэчаскія вучоныя Фале́с, Архіме́д, Піфагор і інш. Эўклід (III ст. да н. э.) быў першым, хто сістэматызаваў усе матэматычныя веды таго часу і выклаў у вялікай навуковай працы пад назвай «Пачаткі». На працягу доўгага часу геаметрыю вывучалі па «Пачатках» Эўкліда.

<table>
<tr><th colspan="6">Геаметрыя</th></tr>
<tr><td colspan="3">Планіметрыя</td><td colspan="3">Стэрэаметрыя</td></tr>
<tr><td colspan="6">Фігуры</td></tr>
<tr><td colspan="3">Якія не маюць азначэння
(пункт, прамая, плоскасць)</td><td colspan="3">Якія маюць азначэнне
(прамень, адрэзак, вугал, ...)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Уласцівасці</td></tr>
<tr><td colspan="3">Аксіёмы
(без доказу)</td><td colspan="3">Тэарэмы
(доказ)</td></tr>
<tr><td colspan="6">Задачы</td></tr>
<tr><td colspan="2">На доказ</td><td colspan="2">На вылічэнне</td><td colspan="2">На пабудову</td></tr>
</table>

Заданні да § 2

Правяраем веды

1. Хто з вучоных першым выклаў асновы геаметрыі?
2. Якія тры геаметрычныя фігуры прымаюцца без азначэння?
3. Што агульнае маюць аксіёма і тэарэма і чым яны адрозніваюцца?
4. Якія геаметрычныя фігуры называюцца роўнымі?
5. Якія тры тыпы геаметрычных задач вы ведаеце?

Вучымся будаваць чарцёж

1. Пакажыце відарыс прамой a і адзначце на ёй пункты A і B. Як адносна прамой a і адрэзка AB можа быць размешчаны трэці пункт? Адзначце некаторыя магчымыя варыянты.

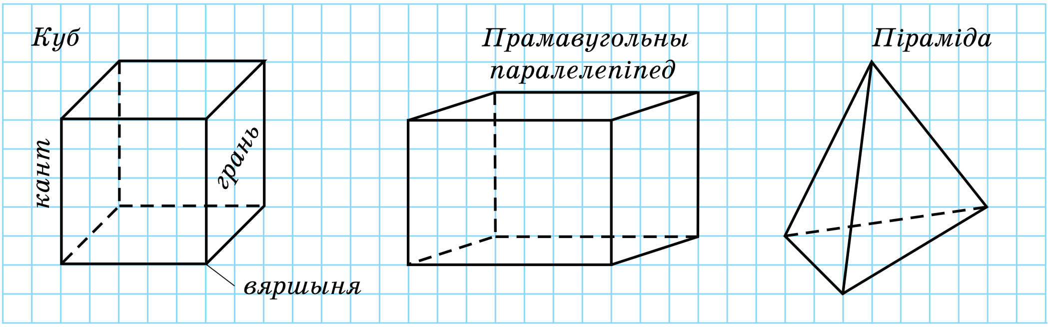
2. На прамой a адзначце пункты A і B. Па-за прамой a па розныя бакі ад яе адзначце пункты C і D так, каб ні пункт A, ні пункт B не належалі прамой CD. Знайдзіце пункт перасячэння прамой CD і прамой a. Абазначце яго літарай P. Колькі ўсяго адрэзкаў атрымалася на вашым рысунку?

3. На прамой b адзначце пункты E, G і H так, каб пункты E і H ляжалі па адзін бок ад пункта G, а пункты H і G — па адзін бок ад пункта E. Які з пунктаў ляжыць паміж двума іншымі?

4. Пакажыце відарысы прамых m і n, якія перасякаюцца ў пункце A. На прамой m адзначце пункт M, на прамой n — пункт N. Правядзіце прамую MN. Колькі ўсяго адрэзкаў атрымалася на рысунку? Якую фігуру ўтвараюць гэтыя адрэзкі? Правядзіце прамую k, якая перасякае тры пабудаваныя прамыя m, n і MN і не праходзіць праз пункты A, M і N. Колькі цяпер адрэзкаў паказана на рысунку? На колькі частак дадзеныя чатыры прамыя разбілі плоскасць?

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

1. Перанясіце ў сшытак прасторавыя фігуры, паказаныя на рысунку 22 (нябачныя канты на чарцяжы паказаны штрыхавымі лініямі). Успомніце, якімі фігурамі з'яўляюцца канты куба, канты прамавугольнага паралелепіпеда, канты трохвугольнай пірамiды. Вызначыце колькасць вяршынь, кантаў і граней для кожнай фігуры.



Рыс. 22

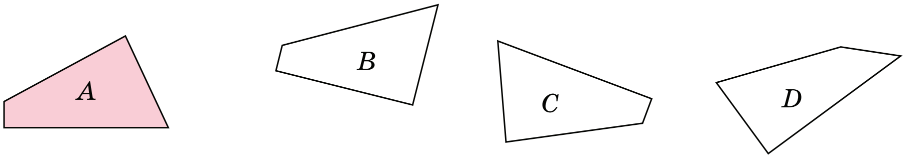
2. Знайдзіце плошчу паверхні (суму плошчаў усіх граней) куба, калі сума даўжынь усіх яго кантаў роўна 60 см, а плошчу квадрата са стараной a знаходзяць па формуле $S = a^2$.

3. Знайдзіце плошчу паверхні прамавугольнага паралелепіпеда, калі яго даўжыня, шырыня і вышыня адпаведна роўны 3 см, 4 см і 5 см, а плошчу прамавугольніка са старанамі a і b знаходзяць па формуле $S = ab$.

Калі выкананне задання 3 выклікала ў вас цяжкасці, атрымайце дадатковую інфармацыю ў **Інтэрнэце**, набраўшы запыт «прамавугольны паралелепіпед».

Гімнастыка розуму

Вызначыце, якая з фігур B, C або D роўна фігуры A (рыс. 23).

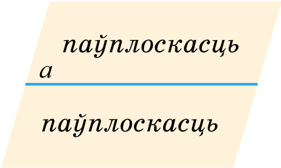


Рыс. 23

§ 3. Прамая. Прамень. Адрэзак. Ломаная

3.1. Прамая

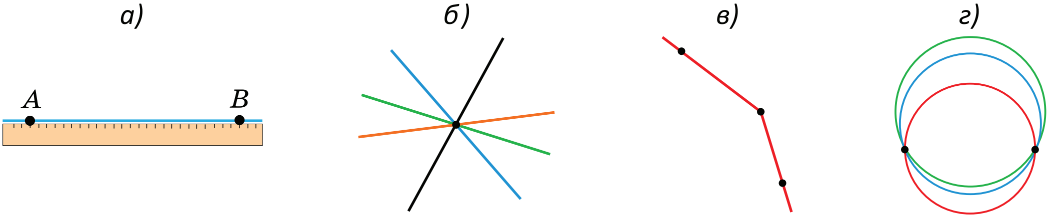
Прамая бясконцая (у абодва бакі) і разбівае плоскасць на дзве *паўплоскасці*, для якіх прамая з'яўляецца *мяжой* (рыс. 24). Мяжа належыць паўплоскасцям. На рысунку 25 пункт C ляжыць на прамой паміж пунктамі A і B, якія ляжаць па розныя бакі ад пункта C. Пункты C і B ляжаць па адзін бок ад пункта A. *З трох пунктаў на прамой адзін і толькі адзін пункт ляжыць паміж двума іншымі.*



Рыс. 24

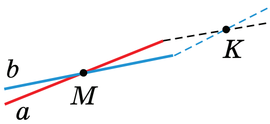
Рыс. 25

Калі на плоскасці адзначыць два пункты A і B, то праз іх заўсёды можна правесці прамую AB (рыс. 26, *а*). Праз адзін пункт можна правесці бясконца многа прамых (рыс. 26, *б*), праз тры пункты не заўсёды можна правесці прамую (рыс. 26, *в*). Праз два пункты можна правесці бясконца многа акружнасцей (рыс. 26, *г*), а прамую — толькі адну!



Рыс. 26

Аксіёма прамой. **Праз любыя два пункты плоскасці можна правесці прамую, і прытым толькі адну.**



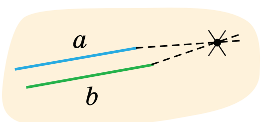
Рыс. 27

З аксіёмы вынікае, што калі дзве прамыя (a і b) маюць агульны пункт (M), то гэта адзіны агульны пункт (рыс. 27).

Калі дапусціць, што існуе яшчэ адзін агульны пункт (K), то тады праз два пункты (M і K) пройдуць дзве прамыя, што па аксіёме прамой немагчыма.

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **перасякальнымі**, калі яны маюць агульны пункт.

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **паралельнымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.

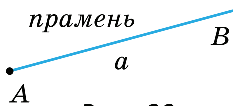


Рыс. 28

Калі прамыя a і b паралельныя, то адрэзкі, якія паказваюць гэтыя прамыя, ніколі не перасякуцца, колькі б іх ні падаўжалі (рыс. 28).

3.2. Прамень

Азначэнне. **Праменем** называецца частка прамой, абмежаваная адным пунктам.

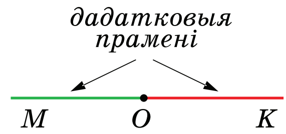


Рыс. 29

Пункт, які абмяжоўвае прамень, належыць праменю і называецца *пачаткам праменя*. Прамень бясконцы (у адзін бок). Ён абазначаецца адной малой літарай або дзвюма вялікімі літарамі лацінскага алфавіта, прычым на першым месцы заўсёды запісваецца пачатак праменя. Другі пункт можа быць не адзначаны на прамені. Ён паказвае напрамак праменя, напрыклад як пункт B на прамені AB (рыс. 29).

Азначэнне. Два прамені называюцца **дадатковымі** (процілеглымі), калі яны маюць агульны пачатак і ляжаць на адной прамой.

На рысунку 30 паказаны дадатковыя прамені OM і OK. Яны дапаўняюць адзін аднаго да прамой. Каб пабудаваць прамень, дадатковы да дадзенага, дастаткова прадоўжыць дадзены прамень за яго пачатак уздоўж прамой, на якой ляжыць дадзены прамень. Любы пункт на прамой разбівае яе на два дадатковыя прамені.



Рыс. 30

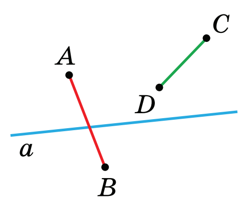
3.3. Адрэзак

Азначэнне. **Адрэзкам** называецца частка прамой, абмежаваная двума пунктамі.

Пункты, якія абмяжоўваюць адрэзак, належаць адрэзку і называюцца канцамі адрэзка, астатнія пункты адрэзка — яго ўнутранымі пунктамі. На рысунку 31 паказаны адрэзак AB з канцамі A і B. Пункт M — унутраны пункт адрэзка AB.

Рыс. 31

Калі канцы адрэзка ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой, то гэты адрэзак перасякае прамую, а калі ляжаць у адной паўплоскасці, то не перасякае. На рысунку 32 канцы адрэзка AB ляжаць у розных паўплоскасцях адносна прамой a, і ён перасякае прамую a. Канцы ж адрэзка CD ляжаць у адной паўплоскасці, і ён не перасякае прамую a.



Рыс. 32

Калі пры накладанні адрэзкаў іх канцы супадуць, то па аксіёме прамой гэтыя адрэзкі супадуць усімі сваімі пунктамі.

Азначэнне. Два адрэзкі называюцца **роўнымі**, калі іх можна сумясціць накладаннем.

Важнай характарыстыкай адрэзка з'яўляецца яго *даўжыня*. Уласцівасці даўжыні адрэзка: кожны адрэзак мае даўжыню, выражаную дадатным лікам; роўным адрэзкам адпавядаюць роўныя даўжыні, большаму адрэзку — большая даўжыня. І наадварот.

Аксіёма вымярэння адрэзкаў. **Калі на адрэзку ўзяць пункт, то ён разаб'е дадзены адрэзак на два адрэзкі, сума даўжынь якіх роўна даўжыні дадзенага адрэзка.**

Аксіёма адкладання адрэзкаў. **На любым прамені ад яго пачатку можна адкласці адрэзак дадзенай даўжыні, і прытым толькі адзін.**

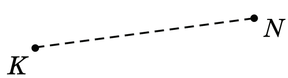
Рыс. 33

На рысунку 33 пункт C ляжыць на адрэзку AB. Па аксіёме вымярэння адрэзкаў вынікае, што $AC + CB = AB$.

Рыс. 34

Сярэдзінай адрэзка называецца пункт, які дзеліць адрэзак на два роўныя адрэзкі. На рысунку 34 пункт M — сярэдзіна адрэзка EF, г. зн. $EM = MF$.

Азначэнне. **Адлегласцю паміж двума пунктамі** называецца даўжыня адрэзка, які злучае гэтыя пункты.



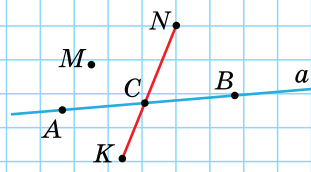
Рыс. 35

На рысунку 35 адлегласць паміж пунктамі K і N роўна даўжыні адрэзка KN.

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

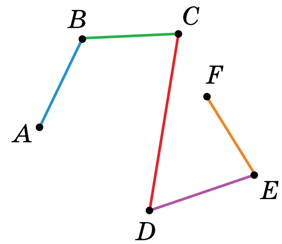
Заданне 1

Назавіце ўсе адрэзкі (паказаныя і тыя, відарысы якіх можна паказаць) з канцамі ў адзначаных на рысунку пунктах. Знайдзіце агульную колькасць гэтых адрэзкаў.



3.4. Ломаная

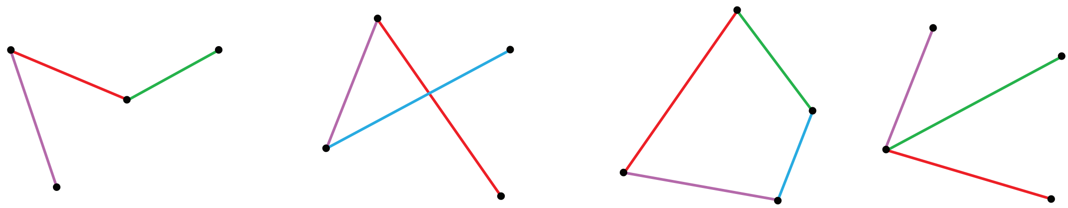
На рысунку 36 адрэзкі AB, BC, CD, DE і EF паслядоўна злучаны сваімі канцамі: адрэзак BC злучаны з адрэзкам AB, адрэзак CD злучаны з адрэзкам BC і гэтак далей. Атрыманая фігура ўяўляе сабой ломаную $ABCDEF$. Паказаныя адрэзкі называюцца *звёнамі* ломанай, а пункты A, B, C, D, E і F — *вяршынямі* ломанай.



Рыс. 36

Азначэнне. **Ломанай** называецца геаметрычная фігура, утвораная адрэзкамі, паслядоўна злучанымі сваімі канцамі, у якой ніякія два суседнія звёны не ляжаць на адной прамой. **Даўжынёй ломанай** называецца сума даўжынь яе звёнаў.

Азначэнне. Ломаная называецца **замкнёнай**, калі пачатак яе першага звяна супадае з канцом апошняга. У адваротным выпадку яна называецца **незамкнёнай**. Ломаная называецца **простай**, калі яна не мае самаперасячэнняў і ніякія два яе звёны, акрамя суседніх, не маюць агульных пунктаў. У адваротным выпадку яна называецца **няпростай** (рыс. 37).

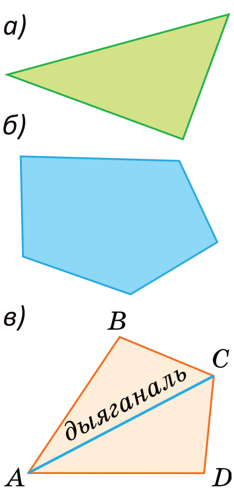


Рыс. 37

Простая замкнёная ломаная на плоскасці называецца *многавугольнікам*. Звёны гэтай ломанай называюцца старанамі гэтага многавугольніка, а вяршыні — вяршынямі многавугольніка. *Перыметрам* многавугольніка называецца сума даўжынь яго старон. Частка плоскасці, абмежаваная многавугольнікам, называецца *плоскім многавугольнікам*.

Далей, разглядаючы плоскія многавугольнікі, слова «плоскі» ўжываць не будзем.

Адрэзак, што злучае вяршыні многавугольніка, якія не належаць адной старане, называецца яго *дыяганаллю*. Калі ў многавугольніка тры стараны, то ў яго тры вяршыні і тры вуглы, і ён называецца трохвугольнікам (рыс. 38, *а*), калі чатыры стараны — чатырохвугольнікам, калі пяць — пяцівугольнікам (рыс. 38, *б*) і гэтак далей.



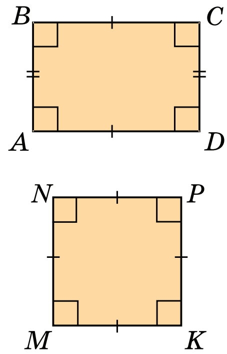
Рыс. 38

На рысунку 38, *в* паказаны чатырохвугольнік $ABCD$ са старанамі AB, BC, CD і AD. У яго чатыры вуглы: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ і дзве дыяганалі: AC і BD. Перыметр гэтага чатырохвугольніка:

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD.$$

Пры ўказанні многавугольніка яго вяршыні запісваюцца *паслядоўна*, пачынаючы з любой вяршыні і ў любым напрамку. Напрыклад, $CBAD$ — гэта той жа чатырохвугольнік $ABCD$.

Самыя вядомыя вам чатырохвугольнікі — гэта прамавугольнік і квадрат. У прамавугольніка ўсе вуглы прамыя, а процілеглыя стораны роўныя. Квадрат — гэта прамавугольнік, у якога ўсе стораны роўныя. На рысунку 39 $ABCD$ — прамавугольнік, $MNPK$ — квадрат. Пазней мы дадзім азначэнне прамавугольніка і квадрата і падрабязна разгледзім іх уласцівасці. А пакуль будзем карыстацца дадзенымі ўяўленнямі.

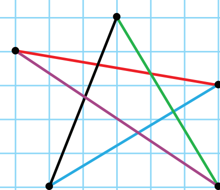


Рыс. 39

А цяпер выканайце **Заданне 2.**

Заданне 2

Якую ломаную ўяўляе сабой «зорачка» з вяршынямі ў адзначаных пунктах?



Заданні да § 3

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *На адрэзку AB, роўным 24 см, адзначаны пункт C. Адрэзак AC на 6 см большы за адрэзак CB. Знайсці даўжыню адрэзка AC.*

Рыс. 40

Р а ш э н н е.

Няхай $CB = x$ см, тады $AC = (x + 6)$ см.

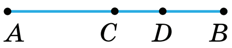
Па аксіёме вымярэння адрэзкаў $AC + CB = AB$ (рыс. 40), г. зн. $(x + 6) + x = 24$, $2x + 6 = 24$, $2x = 24 - 6$, $2x = 18$, $x = \frac{18}{2} = 9$, адкуль

$AC = 9 + 6 = 15$ (см).

А д к а з: 15 см.

Заўвага. У далейшым пры рашэнні задач мы не будзем спасылацца на аксіёму вымярэння адрэзкаў.

Задача 2. *На адрэзку AB адзначаны пункты C і D* (рыс. 41). *Знайсці даўжыню адрэзка CD, калі*: *а*) $AB = 36$ *см*, $AD = 23$ *см*, $BC = 19$ *см*; *б*) $AB = a$, $AD = b$, $BC = c$.



Рыс. 41

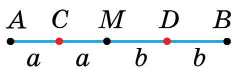
Р а ш э н н е.

а) $DB = AB - AD = 36 - 23 = 13$ (см),
$CD = BC - DB = 19 - 13 = 6$ (см).

б) Калі скласці адрэзкі AD і BC, то атрымаецца адрэзак AB плюс адрэзак CD. Адсюль $CD = AD + BC - AB = b + c - a$.

А д к а з: а) 6 см; б) $b + c - a$.

Задача 3*. *На адрэзку AB, роўным 42 см, адзначаны пункт M. Знайсці адлегласць паміж сярэдзінамі адрэзкаў AM і MB.*



Рыс. 42

Р а ш э н н е.

Няхай C — сярэдзіна адрэзка AM, D — сярэдзіна адрэзка MB. Абазначым $AC = CM = a$, $MD = DB = b$ (рыс. 42).

Тады $AB = 2a + 2b = 2(a + b)$, а $CD = a + b$.

Значыць, $CD = \frac{1}{2}AB = 21$ см.

А д к а з: 21 см.

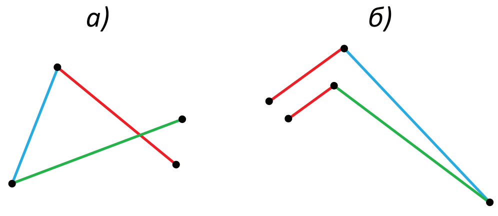
Заўвагі. 1. У дадзенай задачы мы даказалі ў л а с ц і в а с ц ь: «*Калі на адрэзку адзначаны пункт, то адлегласць паміж сярэдзінамі атрыманых адрэзкаў роўна палове дадзенага адрэзка*».

2. Сцверджанні, якія будуць даказаны намі ў ключавых задачах, могуць у далейшым выкарыстоўвацца як вядомыя ўласцівасці.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

1. Адзначце ў сшытку чатыры пункты A, B, C і D, ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Пакажыце відарысы прамых, якія праходзяць праз пары гэтых пунктаў. Запішыце гэтыя прамыя. Пазначце прамені з пачаткам у пункце B.

2. На прамой адзначаны пункты A, B і C так, што $AB = 14$ см, $BC = 32$ см, $AC = 18$ см. Вызначыце, які з пунктаў ляжыць паміж двума іншымі.



Рыс. 43

3. а) На адрэзку AB, роўным 56 см, адзначаны пункт M. Адрэзак AM на 4 см меншы за адрэзак MB. Знайдзіце адрэзак BM.

б) Пункт P ляжыць на адрэзку EF, роўным 24 дм. Адрэзак EP у 3 разы большы за адрэзак PF. Знайдзіце адлегласць ад сярэдзіны адрэзка PF да пункта E.

4. На адрэзку AB адзначаны пункты K і M так, што пункт K ляжыць паміж пунктамі A і M, $3AM = 2MB$, $AK = 2KM$, адрэзак AK на 12 см большы за адрэзак KM. Знайдзіце адлегласць паміж пунктамі A і B.

5. Дадзены тры пункты A, B і C. Высветліце, ці могуць яны ляжаць на адной прамой, калі:

а) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $AC = 8$ см;

б) $AB = 6{,}8$ дм, $BC = 12{,}3$ дм, $AC = 5{,}5$ дм.

6. Як называецца кожная ломаная, паказаная на рысунку 43?

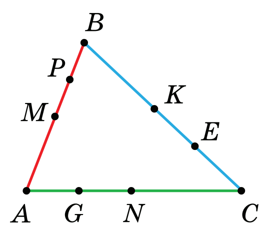
7. Пакажыце відарыс: а) трохзвённай простай незамкнёнай ломанай; б) чатырохзвённай простай замкнёнай ломанай; в) пяцізвённай няпростай незамкнёнай ломанай.

8. Дадзена пяцізвённая незамкнёная ломаная. Кожнае наступнае звяно, пачынаючы з другога, у 2 разы большае за папярэдняе звяно. Даўжыня ломанай роўна 186 см. Знайдзіце даўжыню самага вялікага яе звяна.

9. Дадзена трохзвённая замкнёная ломаная ABC (рыс. 44). Пункты M, K, N — сярэдзіны яе звёнаў AB, BC і AC. Пункты P, E, G — сярэдзіны адрэзкаў MB, KC і AN. Знайдзіце даўжыню ломанай ABC, калі:

а) $PB + EC + GA = 12$ см;

б) $AP + BE + CG = 108$ см.



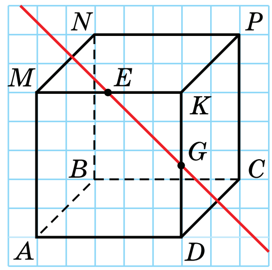
Рыс. 44

10*. На адрэзку AB адзначаны пункты M і K так, што пункт M ляжыць паміж пунктамі A і K. Знайдзіце адлегласць паміж сярэдзінамі адрэзкаў AM і KB, калі:

а) $AB = 32$ см, $MK = 12$ см;
б) $AB = a$, $MK = b$.

11*. На плоскасці адзначана 10 пунктаў, ніякія тры з якіх не ляжаць на адной прамой. Колькі існуе адрэзкаў, што злучаюць пары гэтых пунктаў? Рашыце гэту задачу для 100 пунктаў; для n пунктаў.

12*. На кантах MK і KD куба адзначаны пункты E і G (рыс. 45). З прамых AD, MN, AM, NP, BC і DC выберыце тыя, якія перасякае прамая EG. Запішыце ўсе простыя ломаныя з канцамі ў пунктах A і P, звёны якіх з'яўляюцца кантамі куба.



Рыс. 45

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

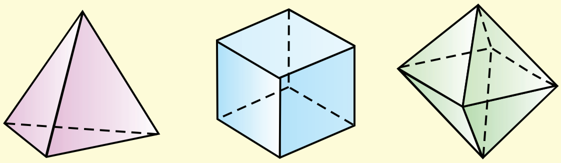
1. Аксіёму прамой.
2. Азначэнне паралельных прамых.
3. Азначэнне праменя, дадатковых праменяў.
4. Азначэнне адрэзка, роўных адрэзкаў; аксіёму вымярэння адрэзкаў.
5. Азначэнне адлегласці паміж пунктамі.
6. Азначэнне ломанай, замкнёнай ломанай, простай ломанай.
7. Азначэнне многавугольніка, перыметра многавугольніка.

Умеем

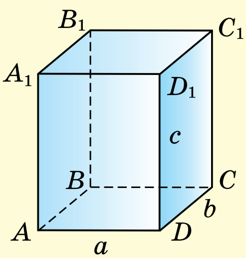
1. Будаваць прамень з пачаткам у дадзеным пункце і прамень, дадатковы да дадзенага.
2. Адкладаць на прамені ад яго пачатку адрэзак дадзенай даўжыні пры дапамозе лінейкі або цыркуля.

Геаметрыя 3D

Геаметрычнае цела, паверхня якога складаецца з канечнай колькасці многавугольнікаў, называецца *мнагаграннікам*. Мнагаграннікам з'яўляецца прамавугольны паралелепіпед, усе шэсць граней якога — прамавугольнікі (рыс. 46). Даўжыні трох яго кантаў, якія маюць агульную вяршыню, называюцца вымярэннямі прамавугольнага паралелепіпеда. Гэта яго даўжыня, шырыня і вышыня. Напрыклад, $AD = a$, $DC = b$ і $DD_1 = c$ — вымярэнні паралелепіпеда. Аб'ём паралелепіпеда знаходзяць па формуле $V = abc$.



мнагаграннікі



Рыс. 46

Задача. *У прамавугольнага паралелепіпеда* (*гл. рыс.* 46) *перыметр грані* AA_1D_1D *роўны* 20 *см, грань* $ABCD$ — *квадрат з перыметрам* 16 *см. Знайдзіце*:

а) *даўжыню прасторавай ломанай* $ABCC_1D_1A_1$;

б) *перыметр і плошчу грані* DD_1C_1C;

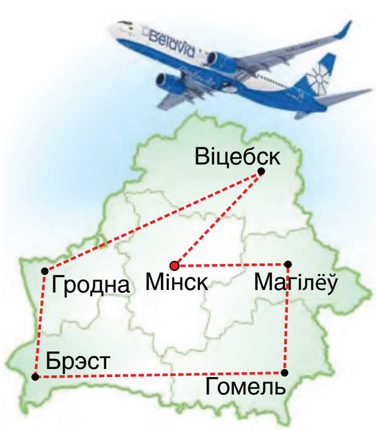
в) *аб'ём паралелепіпеда.*

Мадэляванне

Самалёт кампаніі «Белавія» ажыццявіў палёт па маршруце Мінск — Магілёў — Гомель — Брэст — Гродна — Віцебск — Мінск (рыс. 47).

а) Вызначыце прыкладную даўжыню замкнёнай ломанай гэтага маршруту, выкарыстаўшы карту Беларусі або **Інтэрнэт**.

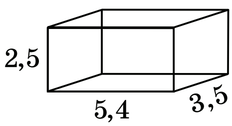
б*) Высветліце, у які з гарадоў трэба вылецець з Мінска, каб, паслядоўна наведаўшы названыя гарады па гадзіннікавай стрэлцы і вярнуўшыся ў Мінск, атрымаць самы кароткі маршрут.



Рыс. 47

Рэальная геаметрыя

Ёсць 12 металічных труб даўжынёй 6 м кожная. Неабходна з гэтых труб зрабіць каркас для гаража ў форме прамавугольнага паралелепіпеда шырынёй 3,5 м, даўжынёй 5,4 м і вышынёй 2,5 м. Трубы разразаюць на адрэзкі патрэбнай даўжыні і мацуюць па вуглах каркаса.

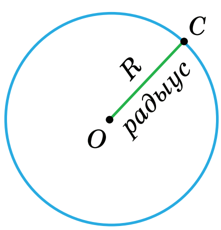


Вызначыце: а) колькі труб пойдзе на каркас гаража пры самым эканомным варыянце разразання; б*) колькі працэнтаў ад выкарыстаных труб пойдзе ў адходы.

§ 4. Акружнасць і круг

Азначэнне. **Акружнасцю** называецца геаметрычная фігура, якая складаецца з усіх пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад дадзенага пункта, які называецца *цэнтрам* акружнасці.

Радыусам акружнасці называецца адрэзак, які злучае цэнтр акружнасці з пунктам на акружнасці (або даўжыня гэтага адрэзка).



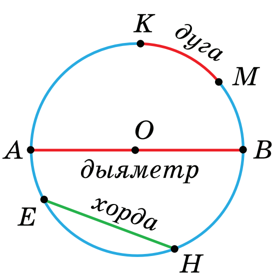
Рыс. 48

Хордай акружнасці называецца адрэзак, які злучае два пункты акружнасці.

Дыяметрам акружнасці называецца хорда, якая праходзіць праз цэнтр акружнасці.

Дугой акружнасці называецца частка акружнасці, абмежаваная двума пунктамі.

На рысунку 48 пункт O — цэнтр, адрэзак OC — радыус акружнасці. Радыус абазначаюць літарай R (або r): $OC = R$. З азначэння акружнасці вынікае, што ўсе радыусы роўныя паміж сабой.



Рыс. 49

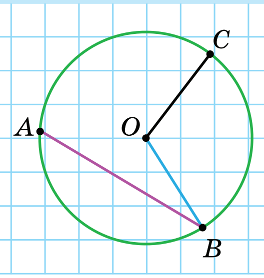
На рысунку 49 паказаны: хорда EH, дуга KM (абазначаецца: $\cup KM$), дыяметр AB. Дыяметр складаецца з двух радыусаў. Таму ўсе дыяметры акружнасці роўныя паміж сабой. Дыяметр AB складаецца з радыусаў OA і OB, адкуль $AB = OA + OB = 2OA$. Дыяметр абазначаюць літарай D (або d). Тады $D = 2R$.

Любыя два пункты акружнасці разбіваюць яе на дзве дугі, якія дапаўняюць адна адну да акружнасці. Гэтыя дугі так і называюцца — *дадатковымі*. Каб адрозніваць такія дугі, іх часам абазначаюць трыма літарамі. На рысунку 49 дугі AKM і AHM — дадатковыя.

А цяпер выканайце **Заданне**.

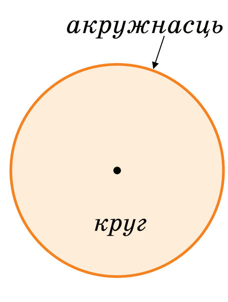
Заданне

Назавіце элементы акружнасці, паказаныя на рысунку. Які элемент акружнасці не паказаны? Колькі ўсяго дуг акружнасці паказана?



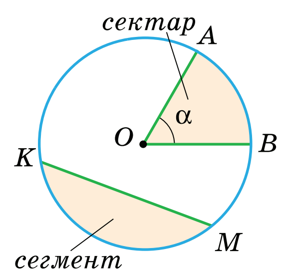
Азначэнне. **Кругам** называецца частка плоскасці, абмежаваная акружнасцю.

Пункты акружнасці таксама належаць кругу (рыс. 50). Таму цэнтр, радыус, хорда і дыяметр у круга тыя ж, што і ў яго акружнасці.



Рыс. 50

Частка круга, якая знаходзіцца паміж двума радыусамі, называецца *сектарам*. Частка круга, якая знаходзіцца паміж дугой акружнасці і хордай, што злучае канцы дугі, называецца *сегментам* (рыс. 51). Два радыусы разбіваюць круг на два сектары, хорда разбівае круг на два сегменты.



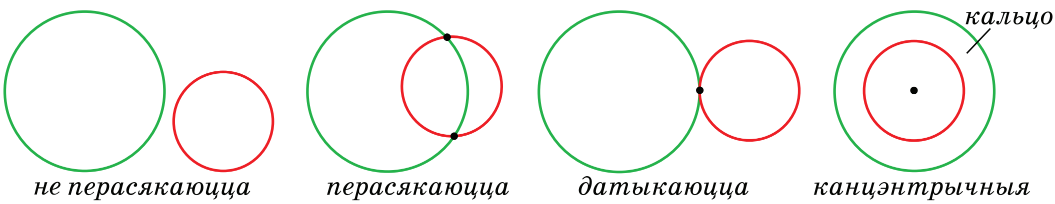
Рыс. 51

Паўакружнасцю называецца дуга акружнасці, канцы якой з’яўляюцца канцамі дыяметра. *Паўкругам* называецца частка круга, абмежаваная паўакружнасцю і дыяметрам, які злучае канцы паўакружнасці. На рысунку 49 дуга AKB — паўакружнасць, сегмент AKB — паўкруг.

Вугал, вяршыня якога знаходзіцца ў цэнтры акружнасці, называецца *цэнтральным* вуглом. На рысунку 51 $\angle AOB = \alpha$ — цэнтральны вугал.

Акружнасці (кругі) роўныя, калі роўныя іх радыусы.

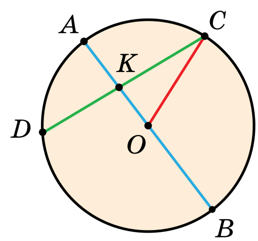
Дзве акружнасці могуць не мець агульных пунктаў, могуць перасякацца ў двух пунктах або датыкацца адна да адной у адным пункце. Акружнасці рознага радыуса з агульным цэнтрам называюцца *канцэнтрычнымі*. Частка плоскасці паміж дзвюма канцэнтрычнымі акружнасцямі называецца *кальцом* (рыс. 52).



Рыс. 52

Заданні да § 4

РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 53

13. На рысунку 53 паказаны акружнасць і круг з цэнтрам у пункце O. Запішыце радыусы, хорды, дыяметр, якія-небудзь тры дугі акружнасці, адзін сектар і адзін сегмент круга.

14. Рашыце наступныя задачы (гл. рыс. 53):
а) Калі $OC = 12{,}5$ см, то чаму роўна даўжыня адрэзка AB?
б) Калі $AB = 118$ см, то чаму роўна адлегласць паміж пунктамі D і O?
в) Калі $AB + OC = 48$ см, то чаму роўна сума $DO + OB$?

15. Дыяметр акружнасці роўны 35 см. Даўжыні хорд MK і MN роўны радыусу, цэнтр O акружнасці ляжыць унутры вугла KMN. Знайдзіце даўжыню замкнёнай ломанай $OKMN$.

16. Дзве акружнасці размешчаны так, што кожная праходзіць праз цэнтр другой акружнасці. Цэнтры акружнасцей і пункты іх перасячэння з’яўляюцца вяршынямі чатырохвугольніка. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка, калі дыяметр адной з акружнасцей роўны 7 см.

17. Хорды AB, BC, CD роўны радыусу акружнасці з цэнтрам у пункце O і дыяметрам AD. Перыметр чатырохвугольніка $ABCD$ роўны 60 см. Знайдзіце дыяметр акружнасці.

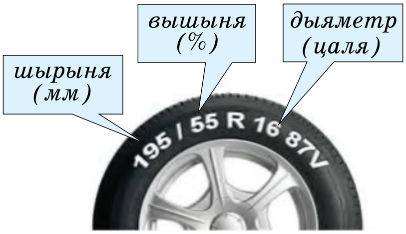
18*. Дыяметр кола веласіпеда роўны 64 см. Даўжыню акружнасці C знаходзяць па формуле $C = 2\pi R$, дзе $\pi = 3{,}1415...$, R — радыус. Веласіпедыст праехаў на веласіпедзе 100 м. Колькі поўных абаротаў зрабіла кожнае кола веласіпеда? Пры рашэнні карыстайцеся калькулятарам.

19*. На адрэзку AB адзначаны пункт C, $AC = 6$ см. Вядома, што адрэзкі AB і CB з’яўляюцца дыяметрамі акружнасцей. Знайдзіце адлегласць паміж цэнтрамі гэтых акружнасцей.

Рэальная геаметрыя

На аўтамабільнай шыне ёсць маркіроўка, якая паказвае яе памеры, напрыклад 195/55 R16 (рыс. 54). Лік 195 абазначае шырыню шыны ў міліметрах. У дадзеным выпадку шырыня шыны роўна 195 мм, або 19,5 см.

Другі лік 55 абазначае вышыню шыны, або вышыню яе профілю, выражаную ў працэнтах ад яе шырыні. У нашым выпадку гэта 55 % ад 195 мм, г. зн. прыкладна 107 мм, або 10,7 см.



Рыс. 54

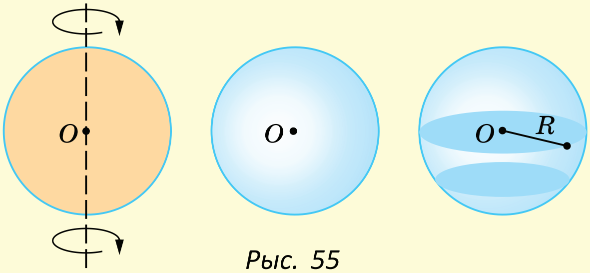
І нарэшце, надпіс R16 абазначае ўнутраны дыяметр шыны, выражаны ў цалях. Паколькі 1 цаля $\approx$ 2,54 см, то для нашай шыны атрымаем 16 · 2,54 см $\approx$ 40,64 см.

Задача. На шыне Artmotion Spike, выраблены на «Белшыне», стаіць маркіроўка 185/60 R15. Вызначыце шырыню шыны, вышыню профілю, унутраны дыяметр і прыкладную агульную вышыню кола, г. зн. яго вонкавы дыяметр у сантыметрах.

Цікава ведаць. Кампанія «Белшына» выпускае шыны для легкавых і грузавых аўтамабіляў. На аўтобусах і тралейбусах Беларусі шыны маюць надпіс BELSHINA. На кар'ерных самазвалах БелАЗ таксама ўстаноўлены шыны гэтай беларускай кампаніі. Вышыня такой шыны дасягае 3 м 75 см. Самазвал БелАЗ серыі 75710 з'яўляецца самым вялікім у свеце і занесены ў Кнігу рэкордаў Гінэса.

Геаметрыя 3D

Калі круг вярцець каля яго дыяметра, атрымаецца геаметрычнае цела, якое вы добра ведаеце, — *шар* (рыс. 55). Ён таксама мае цэнтр, радыус, дыяметр. Паверхня шара называецца *сферай*. *Сфера* — гэта абалонка шара. Адлегласць ад цэнтра шара да любога пункта сферы роўна радыусу шара. Дыяметр шара роўны двум радыусам.



Рыс. 55

Калі правесці плоскасць, якая перасякае шар, то ў сячэнні атрымаецца круг. Калі сякучая плоскасць будзе праходзіць праз цэнтр шара, радыус R атрыманага круга будзе роўны радыусу шара.

Задача. *Сума адлегласцей ад цэнтра шара да трох пунктаў на яго паверхні роўна 24 см. Знайдзіце дыяметр шара.*

§ 5. Вугал. Віды вуглоў

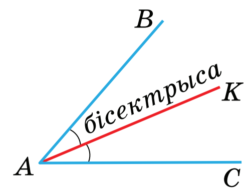
Азначэнні. **Вугал** — гэта геаметрычная фігура, утвораная двума праменямі, што выходзяць з аднаго пункта, і часткай плоскасці, якую яны абмяжоўваюць.

Два вуглы называюцца **роўнымі**, калі іх можна сумясціць накладаннем.

Бісектрысай вугла называецца прамень, які выходзіць з вяршыні вугла і дзеліць яго на два роўныя вуглы.

Азначэнне. **Разгорнутым** называецца вугал, стораны якога з'яўляюцца дадатковымі праменямі.

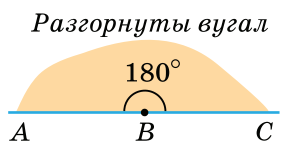
На рысунку 56 прамень AK — бісектрыса вугла BAC і $\angle BAK = \angle CAK$.



Рыс. 56

На рысунку 57 вугал ABC — разгорнуты, прамені BA і BC — дадатковыя. Другая (незафарбаваная) паўплоскасць адносна прамой AC таксама задае разгорнуты вугал ABC.

Вуглы вымяраюцца ў градусах, мінутах, секундах. **Градусам** называецца $\frac{1}{180}$ частка разгорнутага вугла і абазначаецца $1°$; разгорнуты вугал роўны $180°$; $\frac{1}{60}$ частка аднаго градуса называецца **мінутай** і абазначаецца $1'$; $\frac{1}{60}$ частка мінуты называецца **секундай** і абазначаецца $1''$.



Рыс. 57

Вугал, роўны 5 градусаў 20 мінут і 35 секунд, запісваецца так: $5°20'35''$.

Замест «градусная мера вугла роўна 20°» часта гавораць «вугал роўны 20°», замест «знайсці градусную меру вугла» гавораць «знайсці вугал».

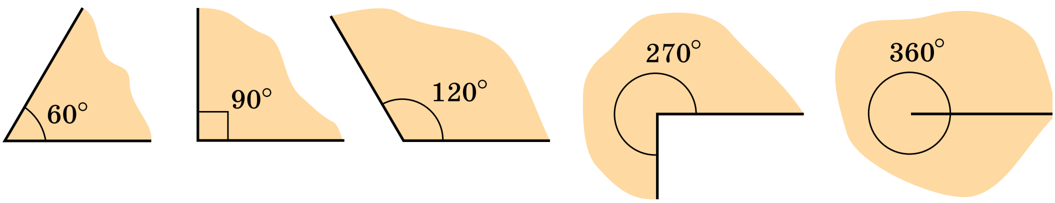
А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Заданне 1

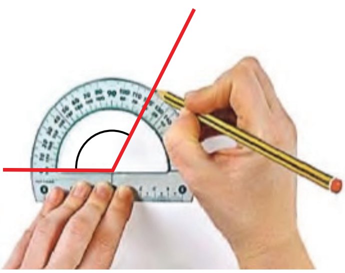
Знайдзіце суму і розніцу вуглоў α і β, калі:
$\alpha = 62°50'30''$,
$\beta = 12°20'40''$.

Азначэнне. Вугал, роўны 90°, называецца **прамым**; вугал, меншы за 90°, — **вострым**; вугал, большы за 90°, але меншы за 180°, — **тупым**; вугал, роўны 360°, называецца **поўным** (яго стораны супадаюць).

На рысунку 58 паслядоўна паказаны: востры вугал, роўны 60°; прамы вугал, роўны 90°; тупы вугал, роўны 120°; вугал, роўны 270°; поўны вугал, роўны 360°.



Рыс. 58

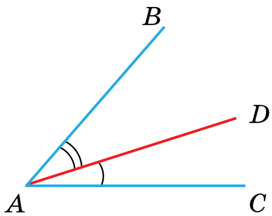


Градусная мера вугла з'яўляецца яго важнай характарыстыкай. Уласцівасці градуснай меры вугла: любы вугал мае градусную меру, выражаную некаторым дадатным лікам; роўным вуглам адпавядаюць роўныя градусныя меры, а большаму вуглу — большая градусная мера. І наадварот.

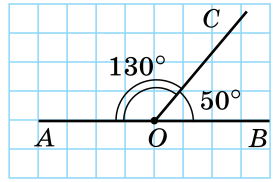
Аксіёма вымярэння вуглоў. **Калі ўнутры вугла з яго вяршыні правесці прамень, то ён разаб'е дадзены вугал на два вуглы, сума градусных мер якіх роўна градуснай меры дадзенага вугла.**

Аксіёма адкладання вуглоў. **Ад любога праменя ў дадзеную паўплоскасць можна адкласці вугал дадзенай градуснай меры, і прытым толькі адзін.**

На рысунку 59 прамень AD праходзіць унутры вугла BAC. Па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle BAD + \angle CAD = \angle BAC$. Калі з вяршыні разгорнутага вугла AOB (рыс. 60) правесці пра-



Рыс. 59



Рыс. 60

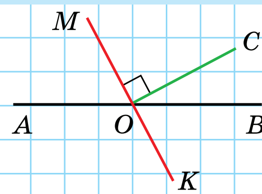
мень OC, які складзе са стараной OB вугал $50°$, то са старанай OA прамень OC складзе вугал $180° - 50° = 130°$.

Два прамені з агульным пачаткам задаюць на плоскасці два вуглы. У далейшым будзем разглядаць меншы з гэтых двух вуглоў (калі яны неразгорнутыя). Такі вугал меншы за $180°$.

А цяпер выканайце **Заданне 2.**

Заданне 2

Колькі вострых, тупых, прамых і разгорнутых вуглоў можна налічыць на рысунку?

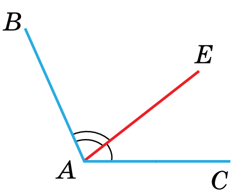


Заданні да § 5

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Унутры вугла BAC, роўнага $114°$, з яго вяршыні праведзены прамень AE. Вугал BAE ў 2 разы большы за вугал EAC. Знайсці велічыню вугла BAE.*



Рыс. 61

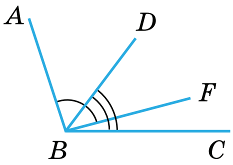
Рашэнне. Няхай $\angle EAC = x$. Тады $\angle BAE = 2x$ (рыс. 61). Па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle EAC + \angle BAE = \angle BAC$. Адсюль $x + 2x = 114°$, $3x = 114°$, $x = \frac{114°}{3} = 38°$, $\angle BAE = 2 \cdot 38° = 76°$.

Адказ: $76°$.

Заўвагі. 1. Магчымы іншы спосаб запісу рашэння, калі побач з літарай x пішуць знак градуса: $\angle MAC = x°$, $\angle BAM = 2x°$. Тады ва ўраўненні знак градуса пісаць не трэба: $x + 2x = 114$.

2. У далейшым пры рашэнні задач мы не будзем спасылацца на аксіёму вымярэння вуглоў.

Задача 2. *Унутры вугла праведзены прамені BD і BF* (*рыс.* 62). *Знайсці велічыню вугла DBF, калі*: *а*) $\angle ABC = 109°$, $\angle ABF = 95°$, $\angle CBD = 54°$; *б*) $\angle ABC = \alpha$, $\angle ABF = \beta$, $\angle CBD = \gamma$.



Рыс. 62

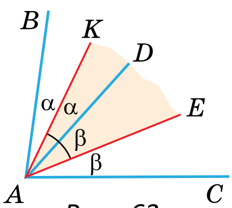
Р а ш э н н е.

а) $\angle FBC = \angle ABC - \angle ABF = 109° - 95° = 14°$,
$\angle DBF = \angle CBD - \angle FBC = 54° - 14° = 40°$.

б) Калі скласці вуглы *ABF* і *CBD*, то атрымаецца вугал *ABC* плюс вугал *DBF*. Адсюль $\angle DBF = \angle ABF + \angle CBD - \angle ABC = \beta + \gamma - \alpha$.

А д к а з: а) 40°; б) $\beta + \gamma - \alpha$.

Задача 3*. *Прамень AD дзеліць вугал BAC на два вуглы*: $\angle BAD$ *і* $\angle CAD$. *Даказаць, што вугал паміж бісектрысамі AK і AE вуглоў BAD і CAD роўны палове вугла BAC* (рыс. 63).



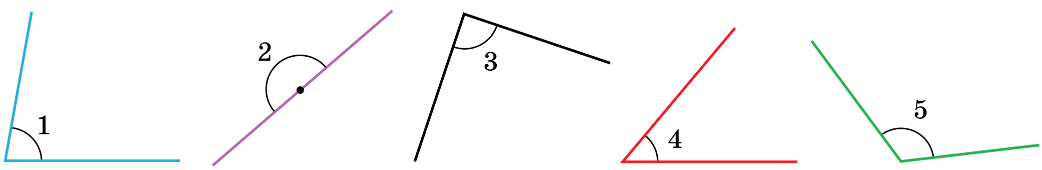
Рыс. 63

Д о к а з. Паколькі *AK* і *AE* — бісектрысы, то $\angle BAK = \angle DAK = \alpha$ і $\angle CAE = \angle DAE = \beta$. Тады $\angle BAC = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta)$, $\angle KAE = \alpha + \beta$. Значыць, $\angle KAE = \frac{1}{2}\angle BAC$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. У дадзенай задачы мы даказалі ў л а с ц і в а с ц ь: «*Калі ўнутры вугла з яго вяршыні правесці прамень, то вугал паміж бісектрысамі атрыманых вуглоў роўны палове дадзенага вугла*».

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

20. На рысунку 64 паказаны вуглы, роўныя 50°, 80°, 90°, 120°, 180°. Назавіце гэтыя вуглы.



Рыс. 64

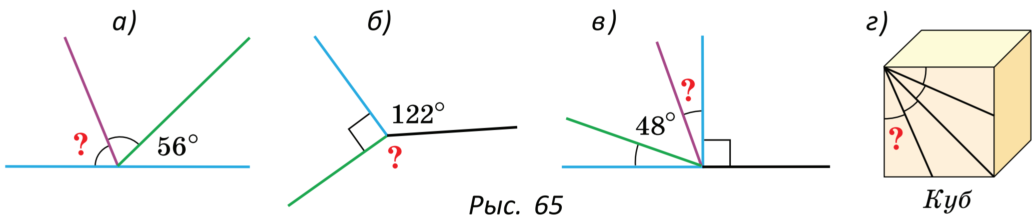
21. Дадзены вуглы: 1°, 80°52′, 100°, 90°, 45°, 99°, 179°, 89°, 180°. Вызначыце, колькі сярод іх:

а) вострых вуглоў; б) тупых вуглоў.

22. Вядома, што $\angle BAC = 68°$, AM — бісектрыса вугла BAC, AK — бісектрыса вугла MAC. Знайдзіце градусную меру вугла BAK.

23. Унутры прамога вугла KMN праведзены прамені MA і MB, $\angle KMB = 72°$, $\angle AMN = 48°$. Знайдзіце $\angle AMB$.

24. На рысунку 65 роўныя вуглы абазначаны дугамі, квадрацікам — прамы вугал. Знайдзіце вуглы, абазначаныя пытальнікам.



Рыс. 65

25. Вугал BAC роўны 130°. Прамень AK праходзіць унутры вугла BAC так, што вугал BAK на 30° меншы за вугал CAK. Знайдзіце вугал BAK.

26. Вугал NAK роўны 48°. Прамень AB дзеліць вугал NAK на два вуглы, прычым $\angle NAB : \angle KAB = 3 : 5$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай вугла KAB і праменем AN.

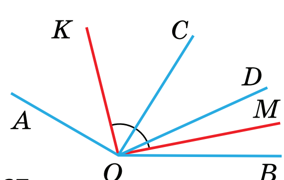
27. З пункта C, адзначанага на прамой AB, у адну паўплоскасць праведзены прамені CD і CE так, што $\angle ACE = 156°$, а $\angle DCB$ — прамы. Знайдзіце вугал DCE.

28*. Вызначыце, які вугал утвараюць гадзіннікавая і мінутная стрэлкі ў 10 г 10 мін (рыс. 66).

29*. Унутры вугла AOB размешчаны вугал COD (рыс. 67). Знайдзіце вугал паміж бісектрысамі OK і OM вуглоў AOC і BOD, калі:

а) $\angle AOB = 160°$, $\angle COD = 40°$; б) $\angle AOB = \alpha$, $\angle COD = \beta$.

Рыс. 66

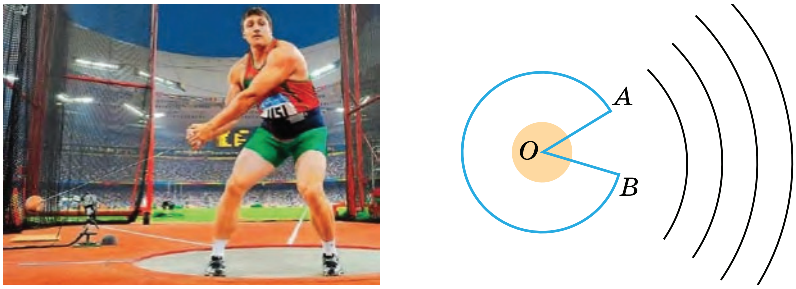


Рыс. 67

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як перакладаецца слова «*градус*» і што яшчэ, акрамя вуглоў, вымяраюць у градусах.

Мадэляванне

Круглая пляцоўка для кідання молата, абнесеная металічнай сеткай, мае свабодны ад сеткі сектар. Праз яго вылятае спартыўны снарад (рыс. 68). Цэнтральны вугал гэтага сектара складае 12,5 % ад поўнага вугла. Знайдзіце вугал AOB.



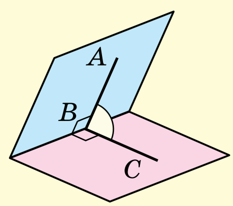
Рыс. 68

Цікава ведаць. Двухразовы чэмпіён свету беларускі кідальнік молата Іван Ціхан выйграў сярэбраны медаль на алімпійскіх гульнях у Рыа-дэ-Жанэйра ў 2016 г.

Геаметрыя 3D

У прасторы пры перасячэнні дзвюх плоскасцей утвараюцца *двухгранныя* вуглы. Дзве паўплоскасці з агульнай мяжой з'яўляюцца гранямі такога двухграннага вугла, а іх мяжа — яго кантам. Вымяраецца двухгранны вугал велічынёй *лінейнага* вугла, утворанага двума праменямі, праведзенымі ў кожнай з паўплоскасцей з пункта на канце двухграннага вугла перпендыкулярна да гэтага канта. На рысунку 69 $\angle ABC$ — лінейны вугал паказанага двухграннага вугла.

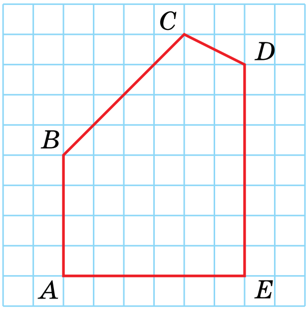
Задача. *Знайдзіце велічыню двухграннага вугла, калі его лінейны вугал складае* 70 % *прамога вугла.*



Рыс. 69

Рэальная геаметрыя

Майстар вымераў вуглы паміж сценамі ў студыі пры дапамозе электроннага вугламера. Студыя мае форму пяцівугольніка. У майстра пасля вымярэння атрымаліся вуглы, роўныя 90°, 135°, 108°, 117°, 90°.



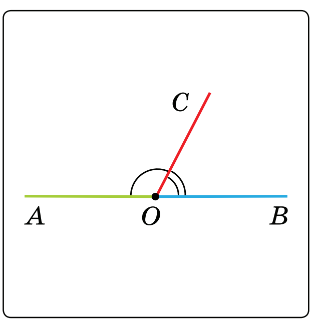
Перанясіце план студыі, паказаны на рысунку, у сшытак і вызначыце пры дапамозе транспарціра ўсе вуглы паміж суседнімі сценамі. Запішыце, чаму роўны вуглы A, B, C, D і E. Высветліце, ці не памыліўся майстар пры вымярэннях, калі вядома, што сума вуглоў любога пяцівугольніка роўна 540°.

§ 6. Сумежныя вуглы. Вертыкальныя вуглы

Азначэнне. Два вуглы называюцца **сумежнымі**, калі ў іх адна старана агульная, а дзве іншыя з'яўляюцца дадатковымі праменямі.

Калі на рысунку 70 прамені OA і OB дадатковыя, то вуглы AOC і BOC — сумежныя.

Тэарэма (уласцівасць сумежных вуглоў).
Сума сумежных вуглоў роўна 180°.



Рыс. 70

Дадзена: $\angle AOC$ і $\angle BOC$ — сумежныя.

Даказаць: $\angle AOC + \angle BOC = 180°$.

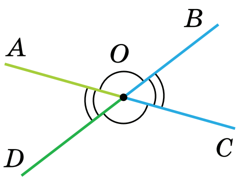
Доказ. З азначэння сумежных вуглоў вынікае, што прамені OA і OB з'яўляюцца дадатковымі і таму ўтвараюць разгорнуты вугал AOB, роўны 180°. Прамень OC праходзіць паміж старанамі гэтага вугла, і па аксіёме вымярэння вуглоў $\angle AOC + \angle BOC = \angle AOB$. Таму $\angle AOC + \angle BOC = 180°$.
Тэарэма даказана.

Вынікі.

1. *Калі сумежныя вуглы роўныя, то кожны з іх прамы.*
2. *Калі два вуглы роўныя, то роўныя і сумежныя з імі вуглы.*

Заўвага. Усе тэарэмы курса геаметрыі 7—9-х класаў апісваюць уласцівасці фігур на плоскасці.

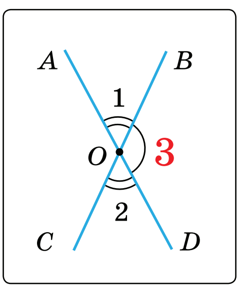
Азначэнне. Два вуглы называюцца **вертыкальнымі**, калі стораны аднаго вугла з'яўляюцца дадатковымі праменямі да старон другога.



Рыс. 71

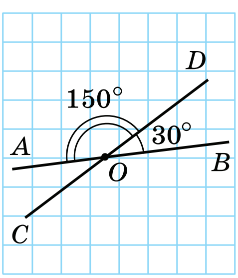
Пры перасячэнні дзвюх прамых AC і DB у пункце O (рыс. 71) атрымліваецца, што прамені OA і OC, OB і OD — дадатковыя. Таму вуглы AOD і BOC — вертыкальныя. Вуглы AOB і DOC таксама вертыкальныя.

Тэарэма (уласцівасць вертыкальных вуглоў).
Вертыкальныя вуглы роўныя.



Рыс. 72

Дадзена: $\angle 1$ і $\angle 2$ — вертыкальныя (рыс. 72).
Даказаць: $\angle 1 = \angle 2$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 сумежныя, паколькі прамені OA і OD — дадатковыя па азначэнні вертыкальных вуглоў. Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Вуглы 2 і 3 таксама сумежныя, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Паколькі $\angle 1 = 180° - \angle 3$, $\angle 2 = 180° - \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2$. Тэарэма даказана.

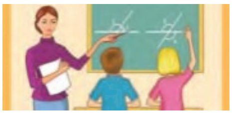


Рыс. 73

Вуглом паміж дзвюма перасякальнымі прамымі называецца найменшы з утвораных імі вуглоў. Калі пры перасячэнні дзвюх прамых AB і CD (рыс. 73) $\angle DOB = 30°$, то $\angle AOD = 180° - 30° = 150°$; $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle COB = \angle AOD$ як вертыкальныя. Вугал паміж прамымі AB і CD роўны $30°$. Гавораць, што прамыя перасякаюцца пад вуглом $30°$.

Пры перасячэнні дзвюх прамых утвараюцца чатыры вуглы (не лічачы разгорнутых). Калі адзін з іх роўны 90°, то і астатнія роўны па 90° (дакажыце самастойна). Гавораць, што прамыя перасякаюцца пад прамым вуглом.

Вугал паміж паралельнымі прамымі лічыцца роўным 0°.

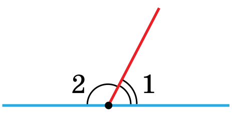


Заданні да § 6

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Сумежныя вуглы адносяцца як 2 : 3. Знайсці велічыню кожнага з вуглоў.*

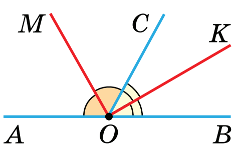


Рыс. 74

Рашэнне. Няхай $\angle 1$ і $\angle 2$ — дадзеныя сумежныя вуглы (рыс. 74). Згодна з умовай $\angle 1 = 2x$, $\angle 2 = 3x$ (градусную меру адной часткі прымаем за x). Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, г. зн. $2x + 3x = 180°$, $5x = 180°$, $x = \frac{180°}{5} = 36°$, $\angle 1 = 2 \cdot 36° = 72°$;
$\angle 2 = 180° - 72° = 108°$.

Адказ: 72°, 108°.

Задача 2. *а) Знайсці вугал паміж бісектрысамі OK і OM сумежных вуглоў BOC і AOC* (рыс. 75), *калі* $\angle BOC = 70°$. *б) Даказаць, што бісектрысы сумежных вуглоў утвараюць прамы вугал.*



Рыс. 75

Рашэнне. а) Калі $\angle BOC = 70°$, то $\angle AOC = 180° - 70° = 110°$; $\angle COK = 35°$, $\angle COM = 55°$; $\angle MOK = 35° + 55° = 90°$.

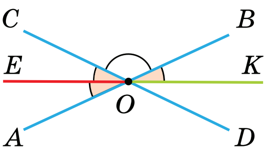
б) Паколькі OM і OK — бісектрысы, то $\angle COM = \frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle COK = \frac{1}{2}\angle BOC$.

Разгледзім вугал MOK: $\angle MOK = \angle COM + \angle COK = \frac{1}{2}\angle AOC + \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(\angle AOC + \angle BOC)$.

Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle AOC + \angle BOC = 180°$. Тады $\angle MOK = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Пры рашэнні задачы 2 можна было спаслацца на ключавую задачу 3* да § 5.

Задача 3*. *Даказаць, што бісектрысы вертыкальных вуглоў утвараюць разгорнуты вугал.*



Рыс. 76

Рашэнне. Няхай OE і OK — бісектрысы вертыкальных вуглоў AOC і BOD (рыс. 76). Дакажам, што $\angle EOK$ — разгорнуты. Вядома, што бісектрыса дзеліць вугал папалам. Паколькі вертыкальныя вуглы роўныя, то роўныя і іх паловы. Таму $\angle AOE = \angle BOK$. $\angle AOE + \angle EOC + \angle COB = 180°$, бо прамені OA і OB дадатковыя, і таму $\angle AOB$ — разгорнуты. Замяніўшы ў апошняй роўнасці $\angle AOE$ на роўны яму $\angle BOK$, атрымаем $\angle BOK + \angle EOC + \angle COB = 180°$. Адсюль вынікае, што $\angle EOK$ — разгорнуты.

Заўвага. З рашэння задачы вынікае ўласцівасць: «*Калі $\angle AOB$ — разгорнуты і $\angle AOE = \angle BOK$, то $\angle AOE$ і $\angle BOK$ — вертыкальныя*».

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

30. Адзін з сумежных вуглоў роўны:

а) $40°$; б) $75°$; в) $140°20'$.

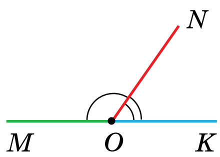
Знайдзіце другі вугал.

31. На рысунку 77 вуглы MON і KON — сумежныя, вугал MON на $70°$ большы за вугал KON. Знайдзіце $\angle MON$.

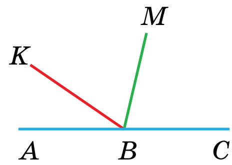
32. На рысунку 78 $\angle ABM = 100°$, $\angle CBK = 155°$. Знайдзіце $\angle KBM$.

33. На рысунку 79 сумежныя вуглы AOP і BOP адносяцца як $4 : 5$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай OE вугла BOP і праменем OA.

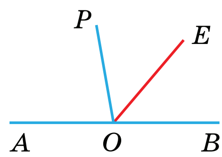
34. На рысунку 80 AB і CD — дыяметры акружнасці, вугал AOD складае $\frac{1}{2}$ вугла AOC. Знайдзіце вугал BOD.



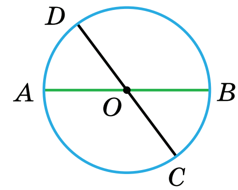
Рыс. 77



Рыс. 78



Рыс. 79



Рыс. 80

35. Адзін з вуглоў, утвораных пры перасячэнні дзвюх прамых, роўны:

а) 20°; б) 110°; в) 90°.

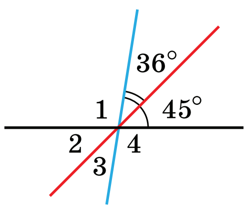
Знайдзіце астатнія тры вуглы.

36. Знайдзіце вуглы 1, 2, 3 і 4 на рысунку 81.

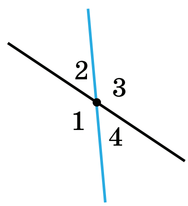
37. На рысунку 82 ∠1 + ∠3 = 250°. Знайдзіце ∠1, ∠2, ∠3, ∠4.

38. Сума вуглоў 1, 2 і 3 роўна 297° (рыс. 83). Знайдзіце суму вуглоў 2, 3 і 4.

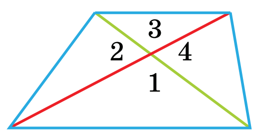
39. Вядома, што 2α + 3β + 4γ = 900° (рыс. 84). Знайдзіце вугал φ (фі).



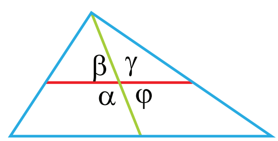
Рыс. 81



Рыс. 82



Рыс. 83



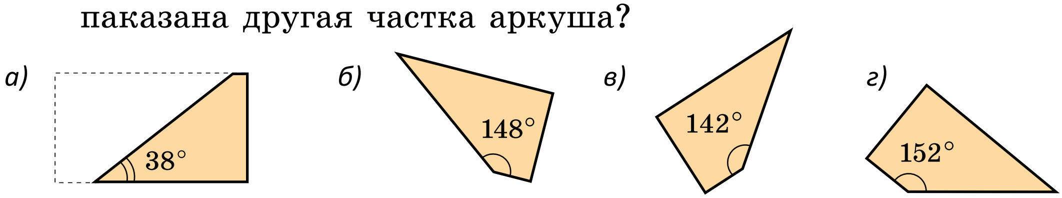
Рыс. 84

40. Вуглы 1 і 2 сумежныя. Знайдзіце вугал 1, калі:

а) ∠1 − ∠2 = 28°; б) ∠1 : ∠2 = 7 : 2;

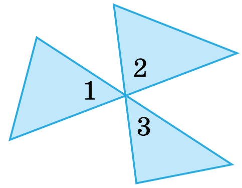
в) $\angle 1 = \frac{2}{3}\angle 2$; г) 5 · ∠1 − 7 · ∠2 = 0.

41. Прамавугольны аркуш кардону абрэзаны пад вуглом 38° да яго большай стараны. На рысунку 85, *а* паказана адрэзаная частка. На якім з рысункаў 85, *б*, 85, *в* або 85, *г* паказана другая частка аркуша?



Рыс. 85

42*. Знайдзіце суму вуглоў 1, 2 і 3 (рыс. 86).



Рыс. 86

43*. Пасля таго як адзін з сумежных вуглоў паваротам агульнай стараны вакол вяршыні павялічылі на 40 %, другі вугал паменшыўся на 60 %. Знайдзіце першапачатковую велічыню дадзеных сумежных вуглоў.

44*. Праз адзін пункт на плоскасці праходзяць чатыры прамыя, што дзеляць плоскасць на 8 вуглоў, тры з якіх адносяцца як 1 : 2 : 3, а адзін з вуглоў роўны суме трох названых. Знайдзіце кожны вугал.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні: вугла, роўных вуглоў, бісектрысы вугла, разгорнутага вугла, градуса.
2. Які вугал называецца прамым, вострым, тупым, поўным.
3. Уласцівасць сумежных вуглоў. Уласцівасць вертыкальных вуглоў.

Умеем

1. Даказваць уласцівасць сумежных вуглоў.
2. Даказваць уласцівасць вертыкальных вуглоў.
3. Адкладаць пры дапамозе транспарціра вугал, роўны дадзенаму.

Мадэляванне

Выражце з паперы вугал, роўны 40°. Пры дапамозе перагінання паперы атрымайце вугал, роўны:

а) 10°; б) 30°; в) 140°; г) 35°.

Даследуйце, якія вуглы, што выражаюцца цэлым лікам градусаў, можна атрымаць з дадзенага вугла шляхам складання.

Гімнастыка розуму

Сямікласнік стаіць тварам да настаўніка фізкультуры. Настаўнік даў навучэнцу каманду павярнуцца 7 разоў налева, 8 разоў направа і 9 разоў кругом. Як цяпер адносна настаўніка стаіць навучэнец:

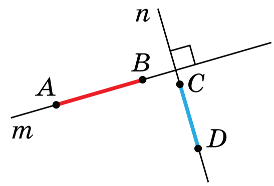
а) левым бокам; б) правым бокам;
в) спінай; г) тварам?

§ 7. Перпендыкулярныя прамыя

Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **перпендыкулярнымі**, калі яны перасякаюцца пад прамым вуглом.

Пры перасячэнні дзвюх перпендыкулярных прамых утвараюцца 4 прамыя вуглы.

Адрэзкі і прамені называюцца перпендыкулярнымі, калі яны ляжаць на перпендыкулярных прамых. На рысунку 87 прамыя m і n перпендыкулярныя (часам гавораць «узаемна перпендыкулярныя»), г. зн. $m \perp n$. Тады перпендыкулярныя адрэзкі AB і CD, прамені BA і CD, адрэзак AB і прамая n, паколькі яны ляжаць на перпендыкулярных прамых.

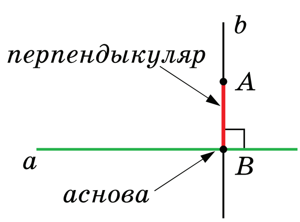


Рыс. 87

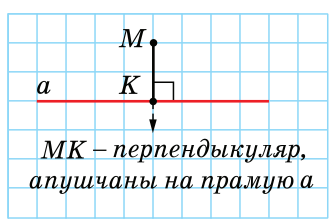
Азначэнне. **Перпендыкулярам** да дадзенай прамой называецца адрэзак, што ляжыць на прамой, перпендыкулярнай да дадзенай, адзін з канцоў якога (*аснова перпендыкуляра*) з'яўляецца пунктам перасячэння гэтых прамых.

Прамая b перпендыкулярна да прамой a (рыс. 88). Адрэзак AB — перпендыкуляр да прамой a, пункт B — аснова перпендыкуляра. Пункт B таксама называюць *праекцыяй* пункта A на прамую a.

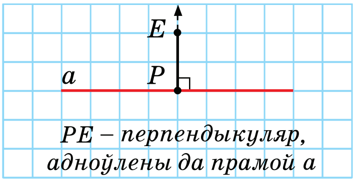
Калі з пункта M, які не ляжыць на прамой a, правесці перпендыкуляр MK да прамой a (рыс. 89), то атрымаецца



Рыс. 88



Рыс. 89

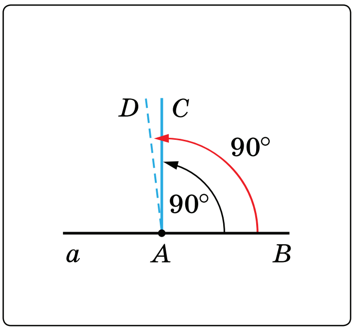


Рыс. 90

перпендыкуляр, апушчаны з пункта M на прамую a.

Калі з пункта P, які ляжыць на прамой a, правесці перпендыкуляр PE да прамой a (рыс. 90), то атрымаецца перпендыкуляр, *узведзены да прамой a*.

Тэарэма. **Праз пункт, які ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, перпендыкулярную да гэтай прамой, і толькі адну.**



Рыс. 91

Дадзена: прамая a; пункт A; $A \in a$ (рыс. 91).

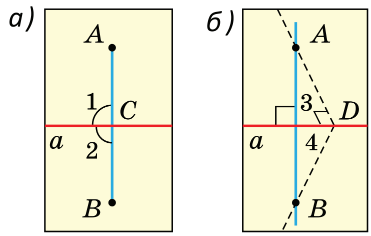
Даказаць: праз пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a, і толькі адну.

Доказ. Па аксіёме адкладання вуглоў ад праменя AB у дадзеную паўплоскасць можна адкласці вугал BAC, роўны $90°$, і прытым толькі адзін. Тады прамая AC перпендыкулярна да прамой a. Дапусцім, што існуе іншая прамая AD, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a. Тады $\angle BAD = 90°$ і ад праменя AB у дадзеную паўплоскасць будуць адкладзены два вуглы, роўныя $90°$: $\angle BAC$ і $\angle BAD$. А гэта немагчыма па аксіёме адкладання вуглоў. Значыць, не існуе іншай прамой, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a.

Тэарэма. **Праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, перпендыкулярную да гэтай прамой, і прытым толькі адну.**

Дадзена: прамая a; пункт A, $A \notin a$ (рыс. 92).

Даказаць: праз пункт A можна правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a, і прытым толькі адну.



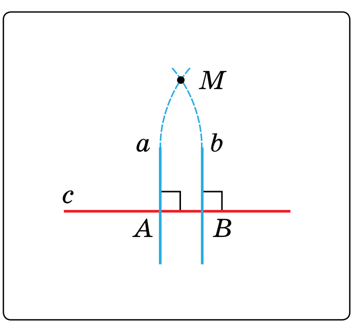
Рыс. 92

Доказ*. 1) Спачатку дакажам, што праз пункт A *можна* правесці прамую, перпендыкулярную да прамой a. Мысленна перагнём аркуш з чарцяжом па прамой a (сумясцім верхнюю паўплоскасць з ніжняй, павярнуўшы яе вакол прамой a) (рыс. 92, *а*). Пункт A зойме некаторае становішча, якое абазначым пунктам B. Вернем паўплоскасці ў ранейшае становішча і правядзём прамую AB. Паколькі вуглы 1 і 2 супадаюць пры накладанні паўплоскасцей, то яны роўныя. А паколькі гэтыя вуглы сумежныя, то кожны з іх роўны $90°$ і $AB \perp a$.

2) Цяпер дакажам, што AB — *адзіная* прамая, якая праходзіць праз пункт A і перпендыкулярна да прамой a. Няхай прамая AD таксама перпендыкулярна да прамой a. Тады $\angle 3 = 90°$ (рыс. 92, *б*). Сумясцім паўплоскасці яшчэ раз. Вугал 3 супадзе з вуглом 4, значыць, $\angle 4 = 90°$. Тады $\angle ADB$ — разгорнуты, і праз пункты A і B будуць праходзіць дзве прамыя: раней праведзеная прамая і прамая, што праходзіць праз пункты A, D і B. А гэта немагчыма па аксіёме прамой. Такім чынам, прамая AD не перпендыкулярна да прамой a. Тэарэма даказана.

З дзвюх апошніх тэарэм вынікае, што на плоскасці праз любы пункт можна правесці прамую, перпендыкулярную да дадзенай прамой, і прытым толькі адну.

Тэарэма (аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй). **На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй прамой, паралельныя паміж сабой.**



Рыс. 93

Дадзена: $a \perp c$, $b \perp c$ (рыс. 93).

Даказаць: $a \parallel b$.

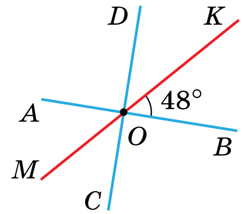
Доказ. Калі дапусціць, што прамыя a і b перасякаюцца ў некаторым пункце M, то атрымаецца, што праз пункт M праходзяць дзве прамыя a і b, перпендыкулярныя да трэцяй прамой c, а гэта немагчыма. Такім чынам, прамыя a і b ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца, г. зн. паралельныя паміж сабой. Тэарэма даказана.

Заданні да § 7

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

45. На рысунку 94 $AB \perp CD$, $\angle KOB = 48°$. Знайдзіце:

а) $\angle COM$; б) $\angle MOD$.



Рыс. 94

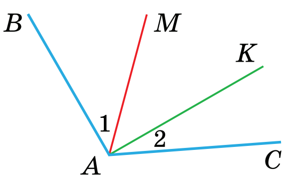
46. Вугал BAC роўны 40°. З пункта A праведзены прамень AK, перпендыкулярны да праменя AB, пункты K і B ляжаць па розныя бакі ад прамой AC. Знайдзіце, які вугал утварае бісектрыса вугла CAK з праменем AB.

47. Прамыя a і b перпендыкулярныя. Праз пункт іх перасячэння праведзена прамая c. Вызначыце колькасць тупых вуглоў, якія ўтварыліся пры гэтым.

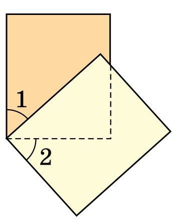
48. На рысунку 95 $AB \perp AK$, $\angle 2 : \angle 1 = 7 : 9$, AM — бісектрыса вугла BAK. Знайдзіце вугал MAC.

49. Два прамавугольнікі маюць агульную вяршыню (рыс. 96). Дакажыце, што вуглы 1 і 2 роўныя.

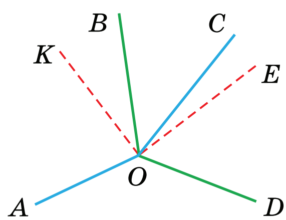
50*. Сума вуглоў AOD і BOC роўна 180°, OK — бісектрыса вугла AOC, OE — бісектрыса вугла BOD (рыс. 97). Дакажыце, што $OK \perp OE$.



Рыс. 95



Рыс. 96



Рыс. 97

Тэарэма, адваротная дадзенай*

Фармулёўка тэарэмы, як правіла, складаецца з дзвюх частак: таго, што дадзена, і таго, што трэба даказаць. Першая частка называецца ўмовай тэарэмы, другая — вывадам. Часта тэарэму фармулююць у форме: «Калі ... (умова тэарэмы), то ... (вывад тэарэмы)». Напрыклад, тэарэму аб уласцівасці сумежных вуглоў можна сфармуляваць так: «Калі вуглы сумежныя, то іх сума роўна 180°». «Вуглы сумежныя» — гэта ўмова тэарэмы, «сума гэтых двух вуглоў роўна 180°» — вывад.

Калі ўмову і вывад тэарэмы памяняць месцамі, то атрымаецца сцверджанне, адваротнае дадзенаму. Для названай вышэй тэарэмы атрымліваем: «Калі сума двух вуглоў роўна 180°, то гэтыя вуглы сумежныя». Але гэта сцверджанне няправільнае, паколькі можна прывесці прыклад двух вуглоў, напрыклад, роўных 60° і 120°, сума якіх роўна 180°, але якія не з'яўляюцца сумежнымі (пакажыце відарысы такіх вуглоў самастойна). Значыць, прыведзенае сцверджанне не з'яўляецца тэарэмай.

Калі ж правільнае і адваротнае сцверджанне, то яно называецца *тэарэмай, адваротнай дадзенай*. Напрыклад, вядомая тэарэма: «Калі сума лічбаў ліку дзеліцца на 3, то і лік дзеліцца на 3» — і ёй адваротная: «Калі лік дзеліцца на 3, то і сума лічбаў ліку дзеліцца на 3».

Часам прамую і адваротную тэарэмы аб'ядноўваюць, ужываючы пры гэтым словы «тады і толькі тады». Аб'яднаем дадзеныя вышэй тэарэмы: «Лік дзеліцца на 3 тады і толькі тады, калі сума яго лічбаў дзеліцца на 3».

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнне перпендыкулярных прамых.
2. Азначэнне перпендыкуляра да прамой.
3. Тэарэму аб прамой, перпендыкулярнай да дадзенай.
4. Уласцівасць дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Умеем

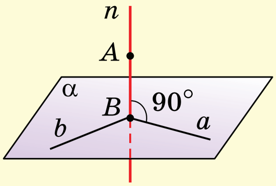
1. Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка:

   а) апускаць з пункта, які не ляжыць на прамой, перпендыкуляр на дадзеную прамую;

   б) з пункта, які ляжыць на прамой, узводзіць перпендыкуляр дадзенай даўжыні да дадзенай прамой.
2. Даказваць тэарэму аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Геаметрыя 3D

Няхай у прасторы прамая n перасякае плоскасць α у пункце B (рыс. 98). Калі прамая n перпендыкулярна да любой прамой плоскасці, якая праходзіць праз пункт B, то яна называецца прамой, перпендыкулярнай да плоскасці. Пішуць $n \perp \alpha$. Адрэзак AB называецца *перпендыкулярам да плоскасці* α.

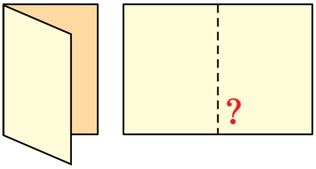


Рыс. 98

Каб прамая n была перпендыкулярна да плоскасці α, дастаткова, каб яна была перпендыкулярна да якіх-небудзь дзвюх прамых плоскасці, што праходзяць праз пункт B. Напрыклад, да прамых a і b.

Задача. *Знайдзіце ў навакольным асяроддзі і назавіце перпендыкуляры да якіх-небудзь плоскасцей.*

Мадэляванне



Рыс. 99

а) Перагніце прамавугольны аркуш паперы так, каб супалі яго ніжнія краі. Выпрастайце аркуш (рыс. 99). Растлумачце, чаму лінія перагібу перпендыкулярна да краю аркуша.

б) На аркушы паперы паказаны прамая a і пункт A (рыс. 100). Выкарыстаўшы толькі перагінанне аркуша паперы, атрымайце перпендыкуляр з дадзенага пункта да дадзенай прамой.

Прапануецца наступнае рашэнне:

1) перагінаем аркуш па прамой a так, каб пункт A быў бачны;

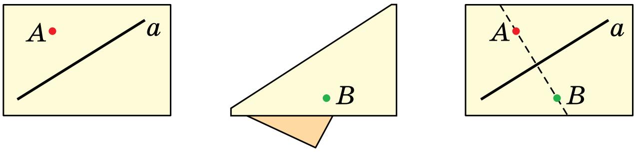
2) праколваем абедзве складзеныя часткі праз пункт A і атрымліваем на другой частцы аркуша пункт B;

3) выпрастаем аркуш;

4) складваем аркуш па прамой, якая праходзіць праз пункты A і B.

Растлумачце, чаму $AB \perp a$.

Прапануйце свой спосаб, звязаны з пунктам а).



Рыс. 100

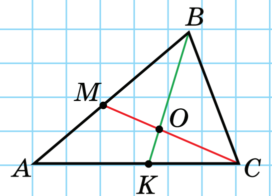
ЗАПАМІНАЕМ

1. Сума сумежных вуглоў роўна 180°.
2. Вертыкальныя вуглы роўныя.
3. На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой.
4. На плоскасці праз любы пункт можна правесці прамую, перпендыкулярную да дадзенай прамой, і прытым толькі адну.

Правяраем сябе

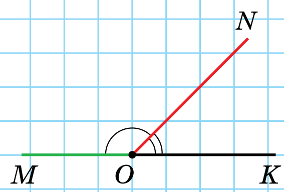
Заданне 1

Выпішыце ўсе пары сумежных вуглоў, усе пары вертыкальных вуглоў, паказаных на рысунку.



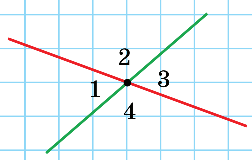
Заданне 2

$\angle NOK$ у 3 разы меншы за $\angle MON$. Знайдзіце вугал паміж бісектрысай вугла MON і праменем OK.



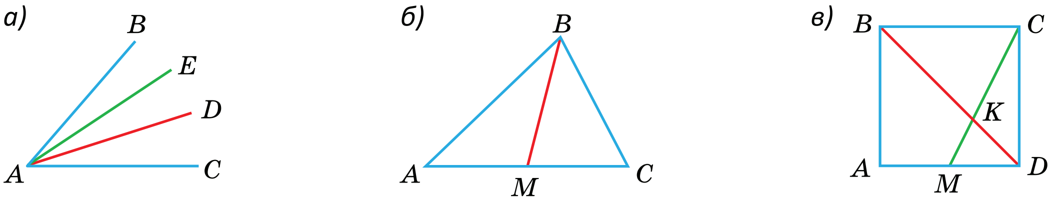
Заданне 3

Для вуглоў 1, 2, 3 і 4 сума нейкіх двух з іх на 100° большая за суму двух астатніх. Знайдзіце вуглы 1, 2, 3 і 4.



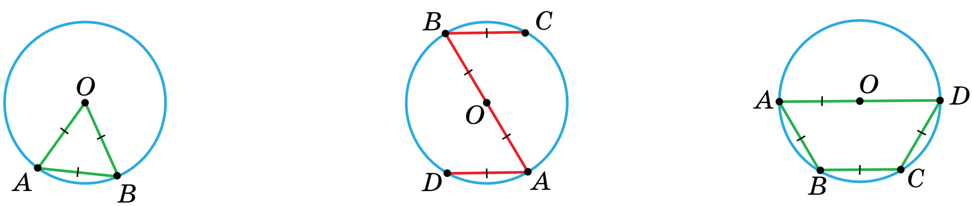
Падрыхтоўка да кантрольнай работы 1

1. Колькі вуглоў, меншых за 180°, паказана на рысунках *а*)—*в*)?



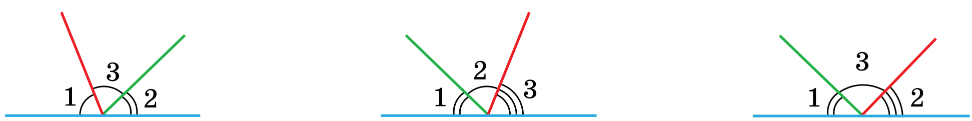
2. Ведаючы, што дыяметр акружнасці роўны 48, знайдзіце даўжыню ломанай:

а) $AO + OB + AB$; б) $DA + AB + BC$; в) $AB + BC + CD + DA$.



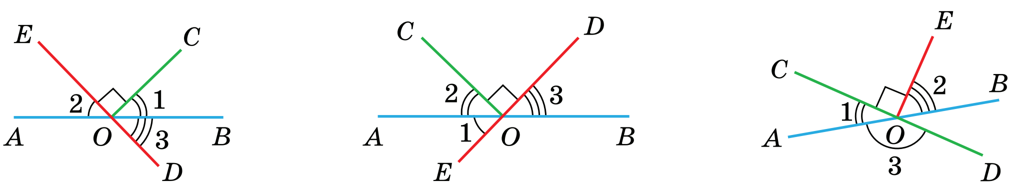
3. Знайдзіце градусную меру вугла 3, калі:

а) $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = 56°$; б) $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 5 : 6 : 7$; в) $\angle 3 - \angle 1 = \angle 2$.



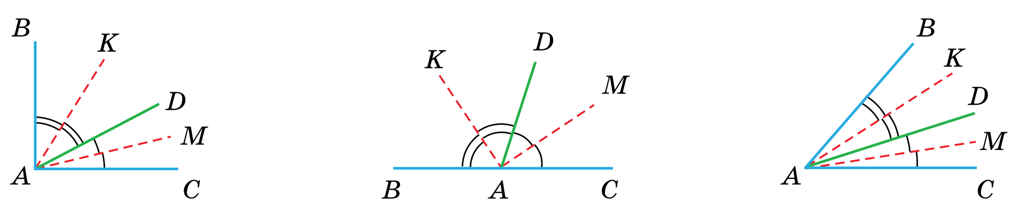
4. На рысунках *а*)—*в*) $OC \perp OE$. Знайдзіце велічыню вугла 1, калі:

а) $\angle 2 + \angle 3 = 68°$; б) $\angle 2 : \angle 3 = 7 : 8$; в) $\angle 2 + \angle 3 = 200°$.



5. Знайдзіце $\angle KAM$, дзе AK і AM — бісектрысы вуглоў BAD і CAD, калі:

а) $AB \perp AC$, $\angle BAM = 71°$; б) $\angle BAC = 180°$; в) $\angle BAM = 50°$, $\angle CAK = 40°$.

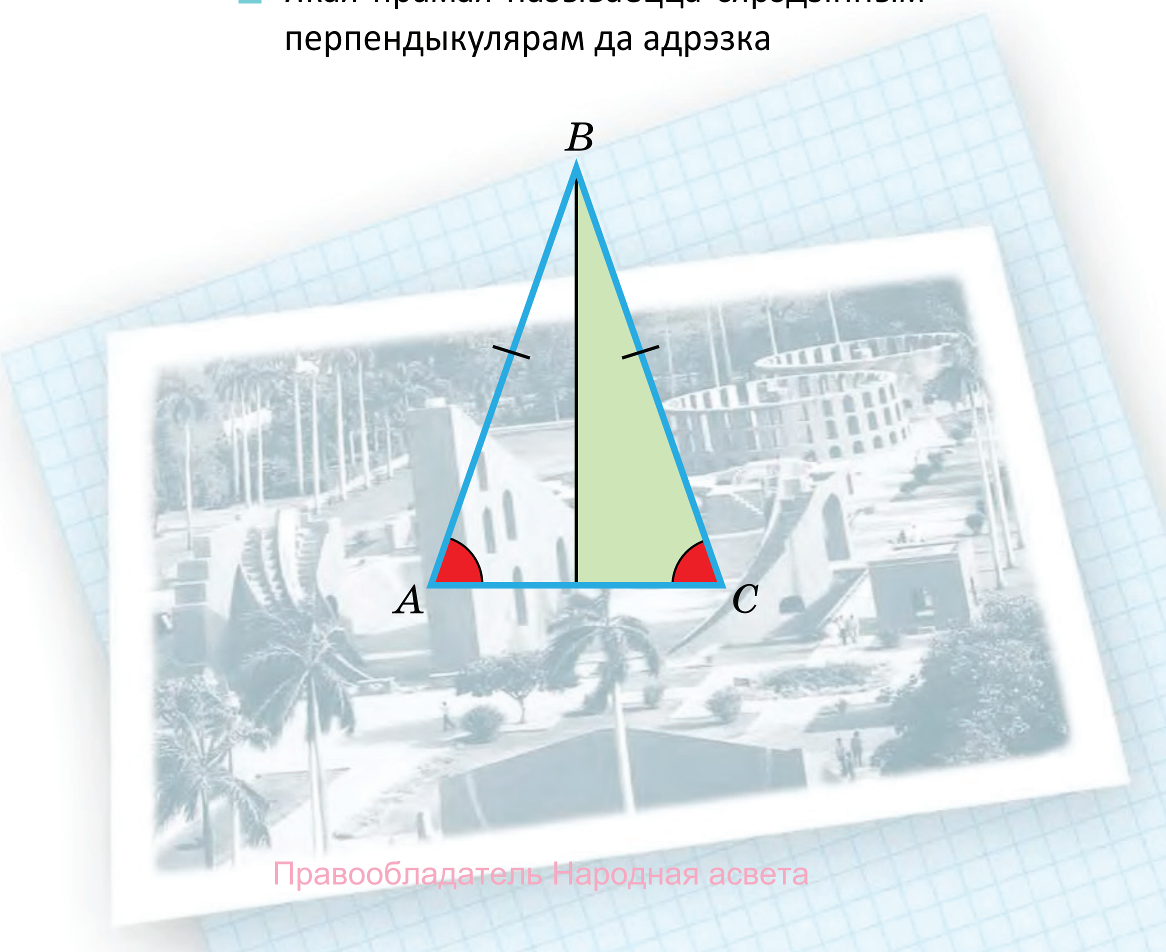


Глава II

Прыметы роўнасці трохвугольнікаў

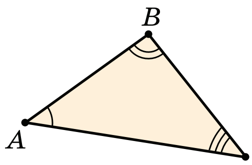
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Як вызначыць, ці роўныя два трохвугольнікі
- Што такое медыяна трохвугольніка
- Якая прамая называецца сярэдзінным перпендыкулярам да адрэзка



§ 8. Трохвугольнікі

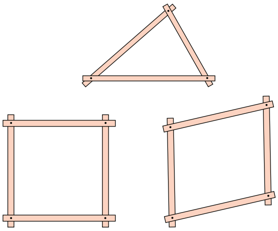
8.1. Трохвугольнік



Рыс. 101

Калі на плоскасці адзначыць тры пункты A, B і C, якія не ляжаць на адной прамой, і злучыць іх адрэзкамі, то атрымаецца трохвугольнік ABC. Можна сказаць, што трохвугольнік — гэта трохзвённая замкнёная ломаная. Абазначаюць: $\triangle ABC$, дзе AB, BC і AC — стораны, пункты A, B і C — вяршыні, $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ — вуглы трохвугольніка (рыс. 101). Каб знайсці перыметр трохвугольніка, трэба скласці даўжыні яго старон: $P_{ABC} = AB + BC + AC$. Трохвугольнікам таксама лічаць частку плоскасці, абмежаваную замкнёнай ломанай ABC.

Азначэнне. **Трохвугольнікам** называецца трохзвённая замкнёная ломаная разам з часткай плоскасці, якую яна абмяжоўвае.

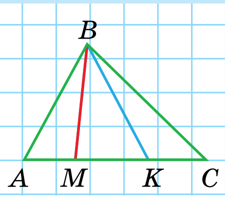

Рыс. 102

Калі злучыць канцы трох драўляных планак, то атрымаецца трохвугольнік, які немагчыма дэфармаваць — ён будзе захоўваць сваю форму, у той час як чатырохвугольнік можа змяняць сваю форму (рыс. 102). Гэта ўласцівасць «жорсткасці» трохвугольніка шырока выкарыстоўваецца ў тэхніцы, вытворчасці, будаўніцтве.

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

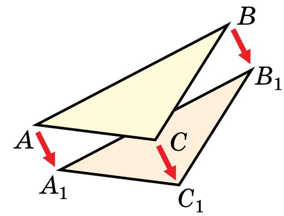
Заданне 1

Назавіце ўсе трохвугольнікі, паказаныя на рысунку. Колькі ўсяго трохвугольнікаў атрымалася?



8.2. Роўныя трохвугольнікі

Роўныя трохвугольнікі можна сумясціць накладаннем так, што адпаведна супадуць усе тры стараны і ўсе тры вуглы (рыс. 103). У трохвугольніках, якія супалі, г. зн. у роўных трохвугольніках, *супраць роўных старон ляжаць роўныя вуглы, а супраць роўных вуглоў — роўныя стараны*. Калі $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ і $AB = A_1B_1$, то $\angle C = \angle C_1$, а калі $\angle B = \angle B_1$, то $AC = A_1C_1$.



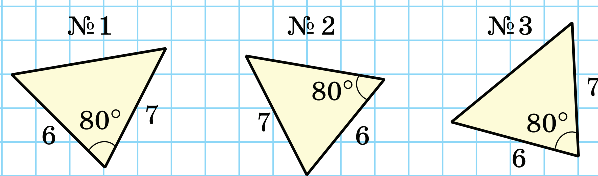
Рыс. 103

Для сумяшчэння роўных адрэзкаў дастаткова супадзення іх канцоў, а для сумяшчэння роўных трохвугольнікаў — супадзення іх вяршынь.

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

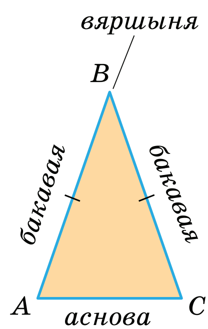
Якія трохвугольнікі, на ваш погляд, можна сумясціць накладаннем?



8.3. Віды трохвугольнікаў

Калі ў трохвугольніка ўсе тры стараны маюць розныя даўжыні, то такі трохвугольнік называецца *рознастаронні́м*.

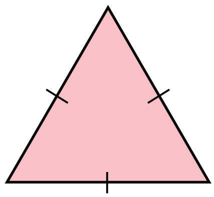
Трохвугольнік, у якога дзве стараны роўныя, называецца *раўнабедраным*. Яго роўныя стораны называюцца *бакавымі старанамі*, трэцяя старана — *асновай*, вяршыня, процілеглая аснове, — *вяршыняй раўнабедранага трохвугольніка* (рыс. 104).



Рыс. 104

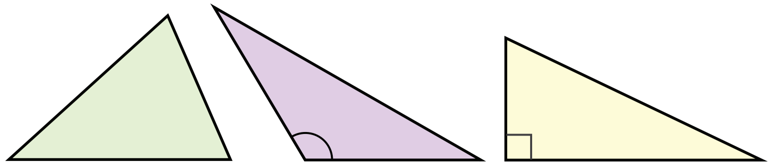
Калі ў трохвугольніка роўныя ўсе тры стараны, то ён называецца *роўнастаронні́м* (рыс. 105). Роўнастаронні трохвугольнік з'яўляецца таксама раўнабедраным, дзе любую пару старон можна прыняць за бакавыя стораны.

Па велічыні вуглоў трохвугольнікі падзяляюцца на *востравугольныя* (усе вуглы вострыя),



роўнастаронні

Рыс. 105



востравугольны *тупавугольны* *прамавугольны*

Рыс. 106

тупавугольныя (ёсць тупы вугал) і *прамавугольныя* (ёсць прамы вугал) (рыс. 106).

А цяпер выканайце **Заданне 3.**

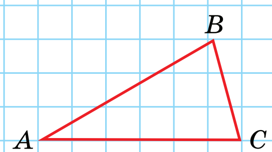
Падвядзём вынікі.

Трохвугольнікам *называецца трохзвённая замкнёная ломаная разам з часткай плоскасці, якую яна абмяжоўвае.*

Перыметрам *трохвугольніка (многавугольніка) называецца сума даўжынь яго старон.*

Заданне 3

Ці з'яўляецца $\triangle ABC$ раўнабедраным, калі $P_{ABC} = 31$ см, $AB = 12$ см, $BC = 7$ см?



Роўнымі *трохвугольнікамі называюцца трохвугольнікі, якія можна сумясціць накладаннем.*

Раўнабедраным *трохвугольнікам называецца трохвугольнік, у якога дзве стараны роўныя.*

Роўнастароннім *трохвугольнікам называецца трохвугольнік, у якога ўсе стораны роўныя.*

Уласцівасць роўных трохвугольнікаў. **У роўных трохвугольніках супраць роўных старон ляжаць роўныя вуглы, а супраць роўных вуглоў — роўныя стораны.**

Заўвага. Называючы або запісваючы роўныя трохвугольнікі, імкнуцца захоўваць паслядоўнасць адпаведных вяршынь. У многіх выпадках гэта зручна. Аднак рабіць так неабавязкова. Абодва запісы: $\triangle ABC = \triangle KNM$ і $\triangle BAC = \triangle MNK$ — правільныя.

Часам адпаведныя вяршыні роўных трохвугольнікаў абазначаюць аднымі і тымі ж літарамі, дадаючы да літар аднаго з трохвугольнікаў індэкс: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Пры такім запісе маюць на ўвазе, што адпаведнымі з'яўляюцца вяршыні A і A_1, B і B_1, C і C_1.

Заданні да § 8

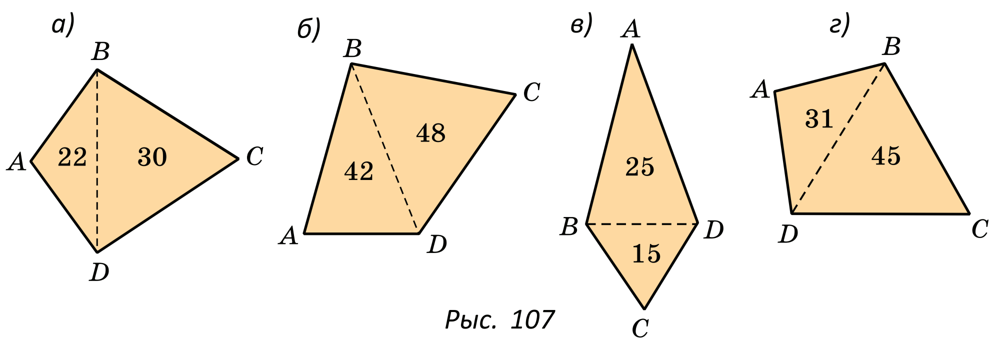
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

51. Трохвугольнікі ABC і KMN можна сумясціць накладаннем. Пры гэтым супадуць $\angle A$ і $\angle K$, $\angle B$ і $\angle M$. Калі $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см, то чаму роўны даўжыні старон MN, NK і MK трохвугольніка MNK?

52. Трохвугольнікі ABC і KED роўныя, прычым $AB = DE$, $AC = DK$, $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 30°$. Вызначыце градусныя меры вуглоў K, E і D трохвугольніка KED.

53. З дроту выраблены раўнабедраны трохвугольнік з бакавой стараной, роўнай 14 дм, і асновай, роўнай 8 дм. Дрот разагнулі і вырабілі з яго роўнастаронні трохвугольнік. Знайдзіце даўжыні старон гэтага трохвугольніка.

54. Паказаны на рысунку 107 чатырохвугольнік $ABCD$ з'яўляецца аб'яднаннем раўнабедранага трохвугольніка ABD і роўнастаронняга трохвугольніка BCD. Унутры трохвугольнікаў запісаны іх перыметры. Знайдзіце для кожнага выпадку перыметр чатырохвугольніка $ABCD$.



Рыс. 107

55. Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 40 см, аснова трохвугольніка ў 2 разы меншая за бакавую старану. Знайдзіце аснову трохвугольніка.

56. Бакавая старана раўнабедранага трохвугольніка на 4 см большая за яго аснову. Перыметр трохвугольніка роўны 56 см. Знайдзіце бакавую старану трохвугольніка.

57. Перыметр трохвугольніка роўны 90 см. Адна са старон трохвугольніка на 2 см меншая за другую старану і ў 2 разы меншая за трэцюю. Знайдзіце стораны трохвугольніка.

58. На старане AD квадрата $ABCD$ пабудаваны роўнастаронні трохвугольнік ADK, дзе пункт K ляжыць унутры квадрата. Знайдзіце адносіну перыметра квадрата да перыметра многавугольніка $ABCDK$.

59. Перыметр трохвугольнага ўчастка роўны 36 м. Стораны ўчастка адносяцца як $2 : 3 : 4$. Знайдзіце даўжыню кожнай стараны ўчастка.

60. Дадзены роўнастаронні трохвугольнік ABC. На старане AB адзначана яго сярэдзіна M. На адрэзку MB адзначана яго сярэдзіна K. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $MK = 12$ см.

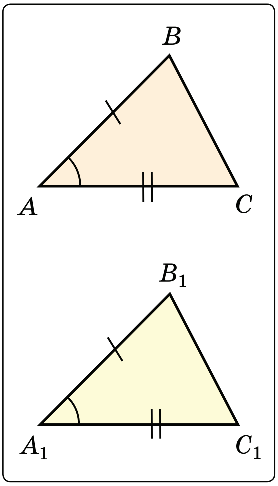
61. У прамавугольнай сістэме каардынат адзначаны пункты $A(-4; 4)$, $B(-4; 0)$, $C(3; 0)$, пункт $O(0; 0)$ — пачатак каардынат. Класіфікуйце трохвугольнікі ABO, AOC і ABC адносна старон і адносна вуглоў.

62*. Дакажыце, што калі кожную старану трохвугольніка павялічыць у 3 разы, то і яго перыметр павялічыцца таксама ў 3 разы, а калі павялічыць у k разоў, то і перыметр павялічыцца ў k разоў.

§ 9. Першая і другая прыметы роўнасці трохвугольнікаў

Пры высвятленні, ці роўныя трохвугольнікі, няма неабходнасці выяўляць роўнасць усіх іх адпаведных старон і вуглоў шляхам накладання або вымярэння. Наступныя дзве тэарэмы гарантуюць роўнасць трохвугольнікаў пры роўнасці некаторых адпаведных старон і вуглоў.

Тэарэма (першая прымета роўнасці трохвугольнікаў). **Калі дзве стараны і вугал паміж імі аднаго трохвугольніка адпаведна роўны дзвюм старанам і вуглу паміж імі другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.**

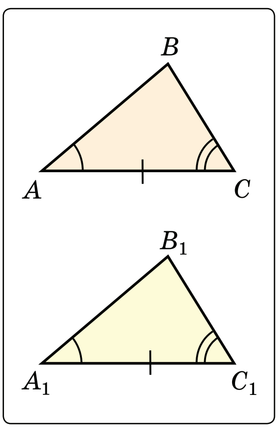


Рыс. 108

Дадзена:
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рыс. 108).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ. Накладзём трохвугольнік ABC на трохвугольнік $A_1B_1C_1$ так, каб супалі роўныя вуглы A і A_1, прамень AB супаў з праменем A_1B_1, а прамень AC супаў з праменем A_1C_1. Паколькі адрэзкі AB і A_1B_1 роўныя, то яны супадуць пры накладанні, вяршыня B супадзе з вяршыняй B_1. Аналагічна супадуць роўныя адрэзкі AC і A_1C_1, вяршыня C супадзе з вяршыняй C_1. Трохвугольнікі супадуць цалкам, бо супадуць іх вяршыні. Такім чынам, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Тэарэма даказана.

Гавораць, што дзве стараны і вугал паміж імі задаюць трохвугольнік адназначна.

Тэарэма (другая прымета роўнасці трохвугольнікаў). **Калі старана і два прылеглыя да яе вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўны старане і двум прылеглым да яе вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.**



Рыс. 109

Дадзена:
$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рыс. 109).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ. Накладзём трохвугольнік ABC на трохвугольнік $A_1B_1C_1$ так, каб супалі роўныя стораны AC і A_1C_1, вугал A супаў з роўным вуглом A_1, а вугал C — з роўным вуглом C_1. Тады прамень AB супадзе з праменем A_1B_1, прамень CB — з праменем C_1B_1, а вяршыня B супадзе з вяршыняй B_1 (пункт B будзе належаць і прамой A_1B_1, і прамой C_1B_1 і таму супадзе з пунктам іх перасячэння B_1). Трох-

вугольнікі супадуць цалкам, паколькі супадуць іх вяршыні. Такім чынам, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

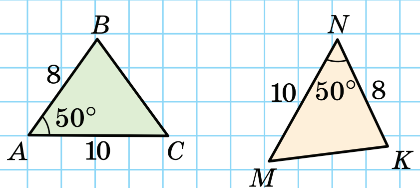
Тэарэма даказана.

Гавораць, што старана і два прылеглыя да яе вуглы задаюць трохвугольнік адназначна.

А цяпер выканайце **Заданне 1** і **Заданне 2**.

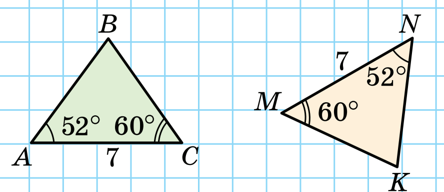
Заданне 1

Які вугал трохвугольніка MNK роўны вуглу B трохвугольніка ABC? Растлумачце адказ.



Заданне 2

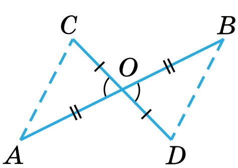
Якая старана трохвугольніка MNK роўна старане AB трохвугольніка ABC? Растлумачце адказ.



Заданні да § 9

РАШАЕМ РАЗАМ
ключавыя задачы

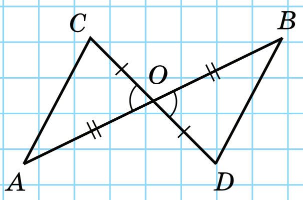
Задача 1. *Адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў іх сярэдзінах. Даказаць, што адлегласці паміж пунктамі A і C, B і D роўныя.*



Рыс. 110

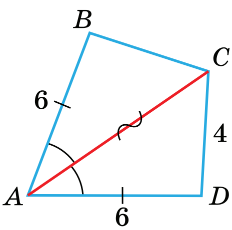
Доказ. Няхай O — пункт перасячэння адрэзкаў AB і CD (рыс. 110). Разгледзім $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$. У іх $AO = OB$, $CO = OD$ па ўмове, $\angle AOC = \angle BOD$ як вертыкальныя. Трохвугольнікі роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі, г. зн. па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Стораны AC і BD роўныя, паколькі ў роўных трохвугольніках супраць роўных вуглоў ляжаць роўныя стораны.

Дадзім магчымае кароткае афармленне рашэння задачы.



Дадзена: $AO = OB$, $CO = OD$.
Даказаць: $AC = BD$.
Доказ.
1) $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$:
$AO = OB$, $CO = OD$ па ўмове,
$\angle AOC = \angle BOD$ як вертыкальныя,
$\triangle AOC = \triangle BOD$ па 1-й прымеце.
2) $AC = BD$. ⊠

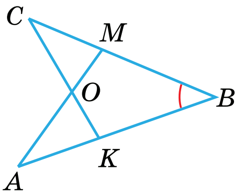
Задача 2. *Дадзена простая замкнёная ломаная ABCD, у якой AB = AD = 6 см, CD = 4 см і прамень AC з'яўляецца бісектрысай вугла BAD. Знайсці даўжыню ломанай ABCD.*



Рыс. 111

Рашэнне. У трохвугольнікаў ABC і ADC старана AC — агульная (рыс. 111), $AB = AD$ па ўмове, $\angle BAC = \angle DAC$, бо AC — бісектрыса вугла BAD. Гэтыя трохвугольнікі роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Адсюль $BC = CD$ як адпаведныя стораны ў двух роўных трохвугольніках.
Даўжыня ломанай $ABCD$:
$AB + BC + CD + AD = 6 + 4 + 4 + 6 = 20$ (см).
Адказ: 20 см.

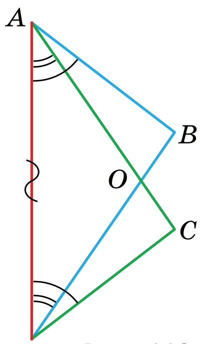
Задача 3. *На старанах вугла B адкладзены адрэзкі: BA = BC, AK = CM (рыс. 112). Даказаць, што ∠A = ∠C.*



Рыс. 112

Доказ. Разгледзім трохвугольнікі ABM і CBK. У іх $\angle B$ — агульны, $AB = CB$ па ўмове, $MB = KB$, паколькі $MB = CB - CM$, $KB = AB - AK$ (калі ад роўных адрэзкаў адняць роўныя, атрымаюцца роўныя адрэзкі). Трохвугольнікі ABM і CBK роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle A = \angle C$ (у роўных трохвугольніках супраць роўных старон ляжаць роўныя вуглы).

Задача 4. *На рысунку* 113 $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle CAD = \angle BDA$. *Даказаць роўнасць трохвугольнікаў AOB і DOC.*



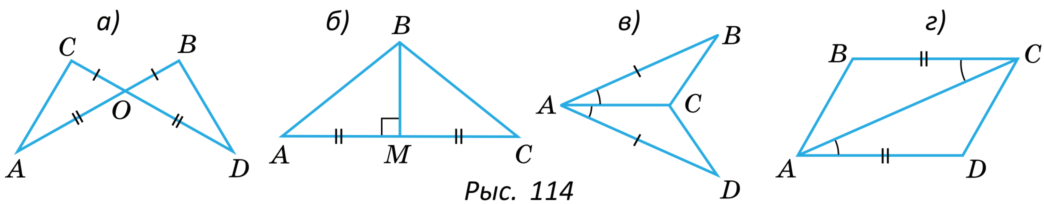
Рыс. 113

Доказ. Паколькі $\triangle ABD = \triangle DCA$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў (старана AD — агульная, вуглы пры старане AD адпаведна роўныя па ўмове), то $AB = DC$, $\angle B = \angle C$. Паколькі $\angle BAO = \angle BAD - \angle CAD$, $\angle CDO = \angle CDA - \angle BDA$, то $\angle BAO = \angle CDO$ (калі ад роўных вуглоў адняць роўныя, атрымаюцца роўныя вуглы). Тады $\triangle AOB = \triangle DOC$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

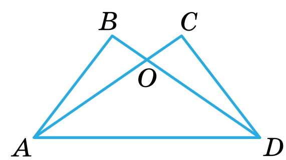
63. Выкарыстаўшы даныя на рысунках 114, *а—г*, дакажыце, што:

а) $\triangle AOC = \triangle DOB$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$;
в) $\triangle ACB = \triangle ACD$; г) $\triangle ABC = \triangle ADC$.



Рыс. 114

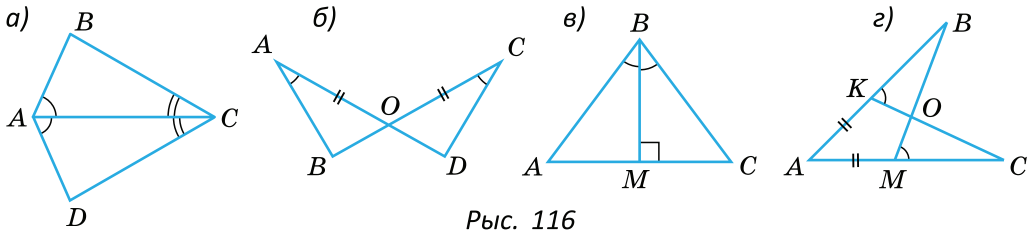
64. На рысунку 115 $AC = DB$, $\angle CAD = \angle BDA$. Дакажыце, што:
а) $\angle B = \angle C$; б) $\angle BAC = \angle CDB$.



Рыс. 115

65. У простай замкнёнай ломанай $ABCD$, $BC = AD = 10$ дм, $\angle ACB = \angle CAD$, $AB = 8$ дм. Знайдзіце даўжыню ломанай $ABCD$.

66. Выкарыстаўшы даныя на рысунках 116, *а—г*, дакажыце, што:
а) $\triangle ABC = \triangle ADC$;
б) $\triangle AOB = \triangle COD$ (дзе $AO = CO$);
в) $\triangle ABM = \triangle CBM$;
г) $\triangle ABM = \triangle ACK$; $\triangle KBO = \triangle MCO$.



Рыс. 116

67. Дадзены чатырохвугольнік $ABCD$, у якога $AB = 9$ см, $AD = 12$ см, $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle ADB = \angle CBD$. Знайдзіце перыметр гэтага чатырохвугольніка.

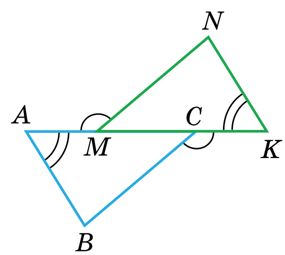
68. Дадзены адрэзак AD. У адной паўплоскасці адносна прамой AD ляжаць пункты B і C такія, што $\angle BAD = \angle CDA$, $\angle BAC = \angle CDB$. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў AC і CD, калі $AB = 5$ см, $BD = 6$ см.

69. AB і CD — дыяметры адной акружнасці з цэнтрам O. Дакажыце, што:

а) хорда AC роўна хордзе BD;
б) $\triangle ADC = \triangle DAB$.

70. На рысунку 117 $\angle BAC = \angle NKM$, $\angle AMN = \angle KCB$, $AM = KC$. Дакажыце, што:

а) $\triangle ABC = \triangle KNM$; б) $AN = KB$.



Рыс. 117

71*. Роўныя адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O так, што $OD = OB$. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў ABC і CDA.

72*. На старанах вугла A адкладзены роўныя адрэзкі AB і AC. На адрэзку AB адзначаны пункт M, на адрэзку AC — пункт K так, што $\angle ABK = \angle ACM$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што $\triangle MOB = \triangle KOC$.

73*. Пры дапамозе прыкладу пакажыце, што калі ў $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$, то гэтыя трохвугольнікі не абавязкова роўныя.

74*. На каардынатнай плоскасці пабудуйце $\triangle AOB$ і $\triangle A_1OB_1$, дзе $A(5; 1)$, $B(2; 6)$, $A_1(-5; -1)$, $B_1(-2; -6)$. Дакажыце, што $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Як знайсці перыметр трохвугольніка, многавугольніка.
2. Якія трохвугольнікі называюцца роўнымі.
3. Першую і другую прыметы роўнасці трохвугольнікаў.

Умеем

1. Даказваць першую і другую прыметы роўнасці трохвугольнікаў.
2. Будаваць чарцёж трохвугольніка па дадзеных памерах яго старон і вуглоў пры дапамозе лінейкі і транспарціра.

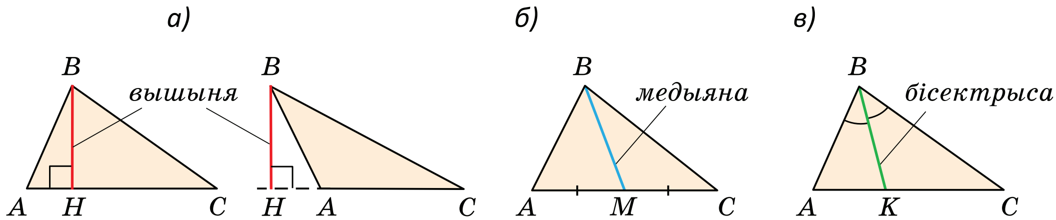
§ 10. Вышыня, медыяна і бісектрыса трохвугольніка

У трохвугольніка, акрамя трох старон, трох вяршынь і трох вуглоў, ёсць таксама іншыя элементы — *вышыня*, *медыяна* і *бісектрыса*.

Азначэнне. **Вышынёй** трохвугольніка (рыс. 118, *а*) называецца перпендыкуляр, апушчаны з вяршыні трохвугольніка на процілеглую старану або на яе прадаўжэнне (адрэзак BH).

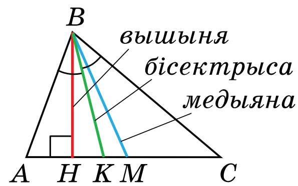
Азначэнне. **Медыянай** трохвугольніка (рыс. 118, *б*) называецца адрэзак, які злучае вяршыню трохвугольніка з сярэдзінай процілеглай стараны (адрэзак BM).

Азначэнне. **Бісектрысай** трохвугольніка (рыс. 118, *в*) называецца адрэзак бісектрысы вугла трохвугольніка, які злучае вяршыню трохвугольніка з пунктам перасячэння бісектрысы з процілеглай стараной (адрэзак BK).



Рыс. 118

У роўных трохвугольніках роўныя адпаведныя вышыні, медыяны і бісектрысы (дакажыце самастойна).



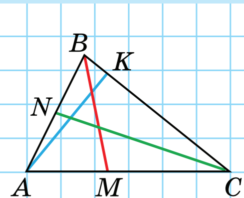
Рыс. 119

Калі трохвугольнік не раўнабедраны, то вышыня, медыяна і бісектрыса, праведзеныя з адной вяршыні трохвугольніка, не супадаюць (рыс. 119).

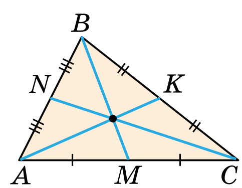
А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Заданне 1

На рысунку паказаны вышыня, медыяна і бісектрыса трохвугольніка *ABC*. Знайдзіце гэтыя адрэзкі.



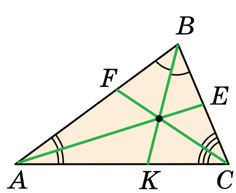
Паколькі ў трохвугольніка тры вяршыні, то ў яго і тры вышыні, тры медыяны, тры бісектрысы. Пазней мы дакажам, што вышыні трохвугольніка (або іх прадаўжэнні) перасякаюцца ў адным пункце. Гэта ж датычыцца яго медыян (рыс. 120) і бісектрыс (рыс. 121).



медыяны

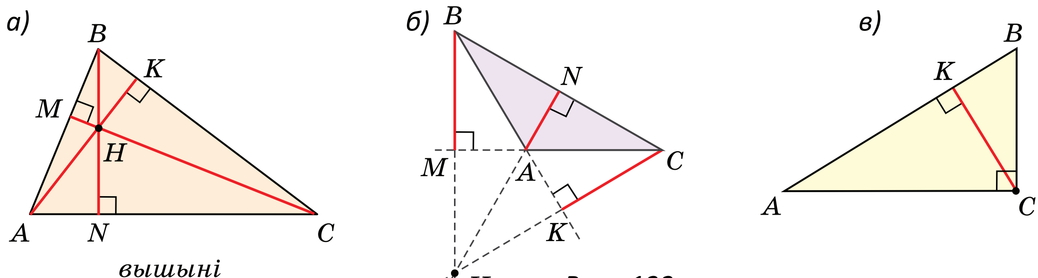
Рыс. 120

Калі трохвугольнік востравугольны, то пункт перасячэння яго вышынь знаходзіцца ўнутры трохвугольніка (рыс. 122, *а*). Калі трохвугольнік тупавугольны, то прадаўжэнні вышынь перасякаюцца па-за трохвугольнікам (рыс. 122, *б*). Калі трохвугольнік прамавугольны, то пункт перасячэння яго вышынь знаходзіцца ў вяршыні прамога вугла (рыс. 122, *в*).



бісектрысы

Рыс. 121



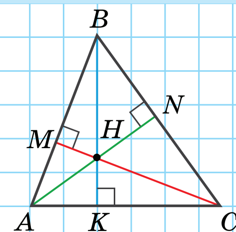
Рыс. 122

Пункты перасячэння вышынь, бісектрыс і медыян называюцца *адметнымі пунктамі трохвугольніка*.

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

Колькі ўсяго прамавугольных трохвугольнікаў паказана на рысунку?



Пры дапамозе **Інтэрнэту** высветліце, як называюцца пункты перасячэння:
а) вышынь; б) медыян; в) бісектрыс трохвугольніка.

Заданні да § 10

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

75. У раўнабедраным трохвугольніку ABC з перыметрам 30 см да яго асновы праведзена медыяна BM даўжынёй 6 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABM.

76. У трохвугольніку ABC праведзены медыяны AM і CK, $AC = 12$ см, $AK = 4$ см, $CM = 5$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

77. У трохвугольніку ABC $AB = BC$. Дакажыце, што бісектрыса BK дзеліць $\triangle ABC$ на два роўныя трохвугольнікі.

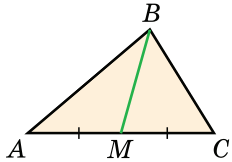
78. У трохвугольніку ABC вышыня AM дзеліць старану BC папалам. Дакажыце, што адрэзак AM з'яўляецца бісектрысай трохвугольніка ABC.

79. У трохвугольніку ABC праведзены медыяны AK, CM і BN. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $AM + BK + CN = 28$ дм.

80. Дакажыце, што $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, калі ў іх: а) роўныя стораны AB і A_1B_1, роўныя медыяны BM і B_1M_1 і $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$; б) роўныя стораны AB і A_1B_1, роўныя бісектрысы AK і A_1K_1 і $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

81*. Дадзены трохвугольнік ABC з перыметрам 30 см, AK — яго медыяна. Перыметр $\triangle ABK$ роўны 18 см, перыметр $\triangle ACK$ — 24 см. Знайдзіце даўжыню медыяны AK.

82*. Саша сцвярджае: калі трохвугольнік ABC разрэзаць па медыяне BM (рыс. 123), то з атрыманых трохвугольнікаў можна скласці новы. Ці мае рацыю Саша? Калі мае, то пакажыце на адным чарцяжы трохвугольнік ABC і новы складзены трохвугольнік.



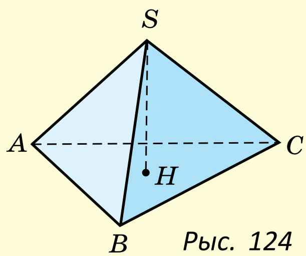
Рыс. 123

Геаметрыя 3D

Тэтраэдрам або *трохвугольнай пірамідай* называецца мнагаграннік, у якога ўсе чатыры грані — трохвугольнікі.

Пункт S — вяршыня, а трохвугольнік ABC — аснова піраміды.

Перпендыкуляр SH да плоскасці ABC з'яўляецца *вышынёй тэтраэдра* (рыс. 124).



Рыс. 124

Задача. *Ёсць металічны прут даўжынёй* 1 *м* 30 *см. Прут можна разрэзаць на часткі і змацаваць іх канцамі. Ці хопіць прута, каб вырабіць каркас тэтраэдра, у якога ўсе грані — роўнастароннія трохвугольнікі з перыметрам* 60 *см кожны?*

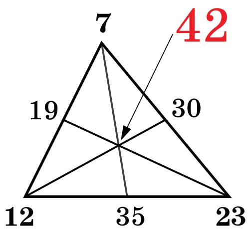
Мадэляванне

З аркуша паперы выражце тры востравугольныя нераўнабедраныя трохвугольнікі. Выкарыстаўшы толькі перагінанне аркуша паперы, знайдзіце пункт перасячэння:

1) вышынь першага трохвугольніка;
2) медыян другога трохвугольніка;
3) бісектрыс трэцяга трохвугольніка.

Абгрунтуйце матэматычна выкананне кожнага з заданняў.

Гімнастыка розуму



Рыс. 125

У вяршынях трохвугольніка запішам па адным адвольным ліку. Напрыклад, лікі 12; 7 і 23 (рыс. 125). Знойдзем сумы лікаў, якія стаяць каля канцоў кожнай стараны. Запішам атрыманыя сумы пасярэдзіне гэтых старон: $12 + 7 = 19$, $12 + 23 = 35$ і $23 + 7 = 30$.

Далей правядзём медыяны і знойдзем сумы лікаў, запісаных каля канцоў кожнай медыяны. Атрымаем: $7 + 35 = 42$, $12 + 30 = 42$, $23 + 19 = 42$. Усе тры сумы аднолькавыя і роўны 42!

Нарысуйце ў сшытку трохвугольнік і запішыце ў яго вяршынях тры свае лікі. Выканайце апісаныя вышэй аперацыі і знайдзіце сумы лікаў, запісаных каля канцоў кожнай медыяны. Калі вы ўсё рабілі правільна, то атрымаеце тры аднолькавыя сумы. Як вы гэта растлумачыце?

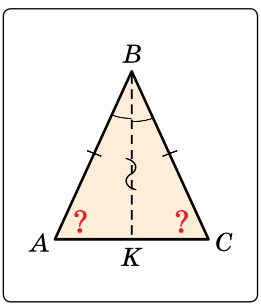
§ 11. Раўнабедраны трохвугольнік

Азначэнне. Трохвугольнік называецца **раўнабедраным**, калі ў яго дзве стараны роўныя.

Роўныя стораны называюцца **бакавымі** старанамі, трэцяя старана — **асновай**, вяршыня, процілеглая аснове, — **вяршыняй** раўнабедранага трохвугольніка.

Разгледзім некаторыя ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка і адну з яго прымет.

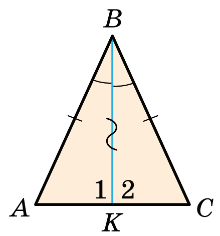
Тэарэма (аб уласцівасці вуглоў пры аснове).
У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове роўныя.



Рыс. 126

Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$ (рыс. 126).
Даказаць: $\angle A = \angle C$.
Доказ. Правядзём бісектрысу BK трохвугольніка ABC. Трохвугольнікі ABK і CBK роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі: старана BK — агульная, $AB = BC$ па ўмове, вуглы ABK і CBK роўныя па азначэнні бісектрысы. З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $\angle A = \angle C$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (аб уласцівасці бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка).
У раўнабедраным трохвугольніку бісектрыса, праведзеная да асновы, з'яўляецца яго медыянай і вышынёй.

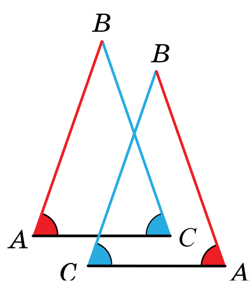


Рыс. 127

Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$, BK — бісектрыса (рыс. 127).
Даказаць: BK — медыяна і вышыня.
Доказ. Трохвугольнікі ABK і CBK роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі (гл. папярэднюю тэарэму). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AK = KC$ і $\angle 1 = \angle 2$. Паколькі вуглы 1 і 2 сумежныя, то іх сума роўна $180°$, таму $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Значыць, BK — медыяна і вышыня.
Тэарэма даказана.

Заўвага. Паколькі з вяршыні трохвугольніка можна правесці толькі адну бісектрысу, адну вышыню і адну медыяну, то змешчаную вышэй тэарэму можна сфармуляваць так: «*Бісектрыса, вышыня і медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеныя з вяршыні да асновы, супадаюць*». Гэта значыць, што калі па ўмове задачы дадзена вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, то паводле дадзенай тэарэмы яна будзе таксама бісектрысай і медыянай. Аналагічна, калі дадзена медыяна раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, то яна будзе вышынёй і бісектрысай.

Тэарэма (прымета раўнабедранага трохвугольніка).
Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.



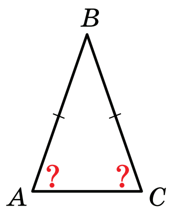
Рыс. 128

Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.
Даказаць: $AB = BC$.
Доказ. Мысленна перавернем трохвугольнік ABC адваротным бокам (рыс. 128) і накладзём перавернуты трохвугольнік на трохвугольнік ABC так, каб вугал C супаў з вуглом A, вугал A супаў з вуглом C. Тады перавернуты трохвугольнік сумесціцца з дадзеным і старана BC сумесціцца са стара-

ной AB. Такім чынам, $AB = BC$, г. зн. $\triangle ABC$ — раўнабедраны. Тэарэма даказана.

Даказаная прымета раўнабедранага трохвугольніка з'яўляецца тэарэмай, адваротнай тэарэме аб уласцівасці вуглоў пры аснове раўнабедранага трохвугольніка (рыс. 129).

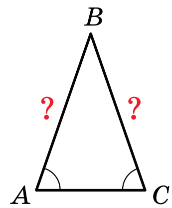
Тэарэма. *Калі трохвугольнік раўнабедраны, то вуглы пры яго аснове роўныя.*



Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$.

Даказаць: $\angle A = \angle C$.

Адваротная тэарэма. *Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.*

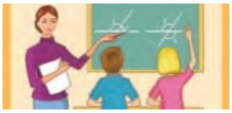


Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle A = \angle C$.

Даказаць: $AB = BC$.

Рыс. 129

Нагадаем, што любая тэарэма складаецца з умовы — таго, што дадзена, і вываду — таго, што трэба даказаць. У тэарэмы, адваротнай дадзенай, умовай з'яўляецца вывад дадзенай тэарэмы, а вывадам — умова дадзенай тэарэмы.

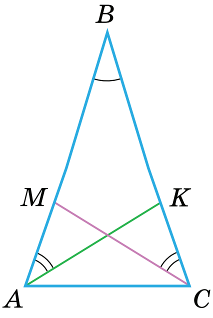


Заданні да § 11

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Даказаць, што ў раўнабедраным трохвугольніку бісектрысы, праведзеныя да бакавых старон, роўныя паміж сабой.*

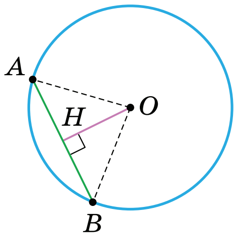


Рыс. 130

Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC $AB = BC$, AK і CM — бісектрысы (рыс. 130). Трэба даказаць, што $AK = CM$. Разгледзім $\triangle AKB$ і $\triangle CMB$. У іх $\angle B$ — агульны, $AB = BC$ па ўмове, $\angle BAK = \angle BCM$ як паловы роўных вуглоў A і C пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Тады $\triangle AKB = \triangle CMB$ па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў, адкуль $AK = CM$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Другім спосабам доказу будзе разгляд $\triangle AKC$ і $\triangle CMA$ і доказ іх роўнасці.

Задача 2. *Даказаць, што перпендыкуляр, праведзены з цэнтра акружнасці да хорды, дзеліць гэту хорду папалам.*

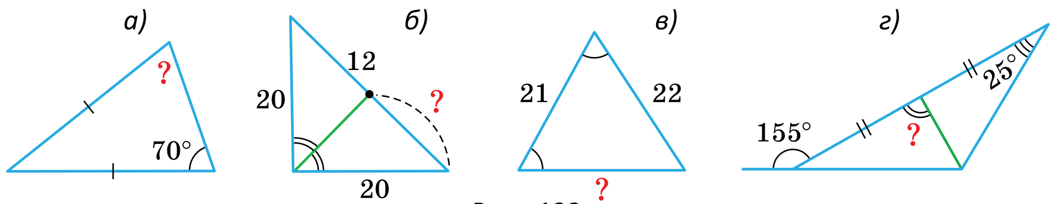


Рыс. 131

Доказ. Няхай O — цэнтр акружнасці, AB — хорда, OH — перпендыкуляр да хорды AB (рыс. 131). Адрэзкі OA і OB роўныя як радыусы. Таму трохвугольнік AOB — раўнабедраны, а OH — яго вышыня, праведзеная да асновы. Мы ведаем, што вышыня раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная да асновы, з'яўляецца і медыянай. А медыяна дзеліць старану трохвугольніка папалам, г. зн. $AH = HB$. Што і трэба было даказаць.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

83. Знайдзіце адрэзак або вугал, абазначаныя пытальнікам (рыс. 132). Растлумачце свой адказ.



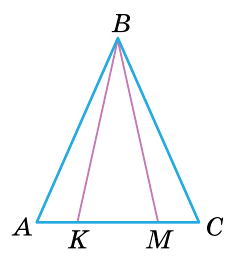
Рыс. 132

84. Дадзены трохвугольнік ABC, у якога $\angle A = \angle B$, $AB + BC =$ $= 12$ см, $AC + BC = 16$ см. Знайдзіце перыметр $\triangle ABC$.

85. У трохвугольніку ABC $AC = AB = 12$ м, $P_{ABC} = 32$ м, AK — вышыня трохвугольніка. Знайдзіце адрэзак CK.

86. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні, CK — яго бісектрыса, $AK = 7{,}5$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

87. На рысунку 133 трохвугольнік ABC — раўнабедраны, дзе $AB = BC$. Дакажыце, што трохвугольнік KBM таксама раўнабедраны, калі: а) $AK = CM$; б) $AM = CK$; в) $\angle ABK = \angle CBM$.



Рыс. 133

88. Дакажыце, што сярэдзіны старон раўнабедранага трохвугольніка з'яўляюцца вяршынямі іншага раўнабедранага трохвугольніка.

89. Дакажыце ўласцівасць вуглоў роўнастаронняга трохвугольніка: «У роўнастароннім трохвугольніку ўсе вуглы роўныя паміж сабой». Сфармулюйце сцверджанне, адваротнае дадзенаму (прымету роўнастаронняга трохвугольніка). Дакажыце яе.

90. Аснова раўнабедранага трохвугольніка адносіцца да яго бакавой стараны як $2 : 3$. Перыметр трохвугольніка роўны 72 см. Знайдзіце аснову трохвугольніка.

91. У раўнабедраным трохвугольніку MNK ($KM = KN$) праведзена бісектрыса KE, роўная 24 см. Перыметр трохвугольніка KEN роўны 56 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MNK.

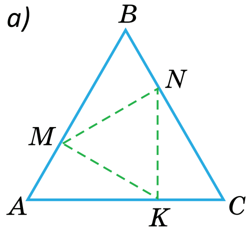
92. Дакажыце, што медыяны раўнабедранага трохвугольніка, праведзеныя да бакавых старон, роўныя паміж сабой.

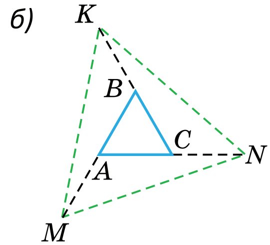
93. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC$. На прамені AC за пункт C адкладзены адрэзак CM, на прамені CA за пункт A адкладзены адрэзак AK такі, што $AK = CM$. Дакажыце, што трохвугольнік MBK раўнабедраны.

94. Дакажыце, што дыяметр акружнасці, які праходзіць праз сярэдзіну хорды (што не з'яўляецца дыяметрам), перпендыкулярны гэтай хордзе.

95*. У трохвугольніку MNK праведзена бісектрыса ME. Вядома, што $\angle MKN + \angle NME = \angle MNK + \angle KME$, $KE = 4$ см, $MN = 9$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка MNK.

96*. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні (рыс. 134, *а*, *б*). Дакажыце, што трохвугольнік MNK — роўнастаронні, калі:
а) $MB = 2AM$, $NC = 2BN$, $AK = 2KC$;
б) $AM = AB$, $CN = AC$, $BK = BC$.





Рыс. 134

Рыс. 135

97*. У раўнабедраным трохвугольніку ABC праведзены бісектрысы AK і CM да бакавых старон. Бісектрысы перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што $\triangle AOM = \triangle COK$.

98*. Адна старана пралёта моста ўяўляе сабой аб'яднанне сямі роўных раўнабедраных трохвугольнікаў, звараных з металічных бэлек (рыс. 135). Перыметр аднаго такога трохвугольніка роўны 11 м. На выраб адной стараны пралёта моста пайшло 59 м металічных бэлек. Вызначыце даўжыню (па нізе) усяго пралёта.

99*. На старанах вугла A адкладзены роўныя адрэзкі AB і AC. На адрэзку AB адзначаны пункт M, на адрэзку AC — пункт K так, што $\angle ABK = \angle ACM$. Адрэзкі BK і CM перасякаюцца ў пункце O. Дакажыце, што трохвугольнік MOK раўнабедраны.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Азначэнні вышыні, медыяны і бісектрысы трохвугольніка.
2. Азначэнне раўнабедранага трохвугольніка, назвы яго старон і вуглоў.
3. Уласцівасць вуглоў раўнабедранага трохвугольніка.
4. Уласцівасць бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка.
5. Прымету раўнабедранага трохвугольніка, звязаную з вугламі.

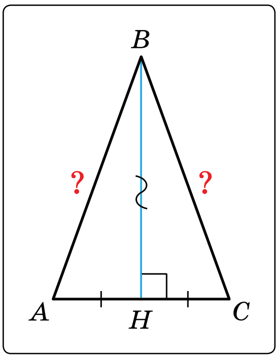
Умеем

1. Даказваць тэарэму аб уласцівасці вуглоў раўнабедранага трохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці бісектрысы раўнабедранага трохвугольніка.
3*. Даказваць прымету раўнабедранага трохвугольніка.

§ 12. Прыметы раўнабедранага трохвугольніка

Вы ўжо ведаеце адну прымету раўнабедранага трохвугольніка: «Калі ў трохвугольніку два вуглы роўныя, то трохвугольнік раўнабедраны». Дакажам яшчэ тры прыметы раўнабедранага трохвугольніка, звязаныя з яго вышынёй, медыянай і бісектрысай.

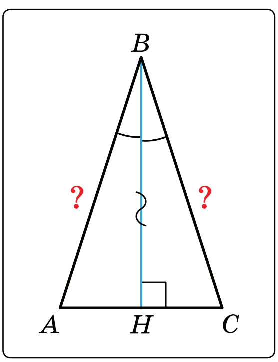
Тэарэма. **Калі ў трохвугольніку вышыня з'яўляецца медыянай, то трохвугольнік раўнабедраны.**



Рыс. 136

Дадзена: BH — вышыня і медыяна $\triangle ABC$.
Даказаць: $AB = BC$ (рыс. 136).
Доказ. Разгледзім $\triangle ABH$ і $\triangle CBH$. У іх старана BH — агульная, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (паколькі BH — вышыня), $AH = CH$ (паколькі BH — медыяна). Трохвугольнікі ABH і CBH роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць адпаведных старон AB і BC.
Тэарэма даказана.

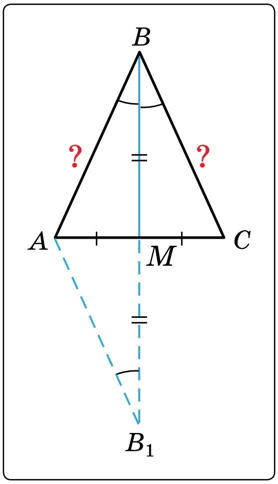
Тэарэма. **Калі ў трохвугольніку вышыня з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны.**



Рыс. 137

Дадзена: BH — вышыня і бісектрыса $\triangle ABC$.
Даказаць: $AB = BC$ (рыс. 137).
Доказ. Разгледзім $\triangle ABH$ і $\triangle CBH$. У іх старана BH — агульная, $\angle AHB = \angle CHB = 90°$ (паколькі BH — вышыня), $\angle ABH = \angle CBH$ (паколькі BH — бісектрыса). Трохвугольнікі ABH і CBH роўныя па старане і двух прылеглых да яе вуглах. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае роўнасць адпаведных старон AB і BC.
Тэарэма даказана.

Тэарэма. **Калі ў трохвугольніку медыяна з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны.**



Рыс. 138

Дадзена: BM — медыяна і бісектрыса $\triangle ABC$.
Даказаць: $AB = BC$ (рыс. 138).
Доказ. Прадоўжым медыяну BM на яе даўжыню за пункт M. Атрымаем $MB_1 = BM$. Трохвугольнікі AMB_1 і CMB роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі ($MB_1 = BM$ па пабудове; $AM = MC$, паколькі BM — медыяна; $\angle AMB_1 = \angle CMB$ як вертыкальныя). З роўнасці гэтых трохвугольнікаў вынікае, што $AB_1 = BC$ і $\angle AB_1M = \angle CBM$. Але $\angle CBM = \angle ABM$, паколькі BM — бісектрыса па ўмове. Тады $\angle AB_1B = \angle ABB_1$ і $\triangle ABB_1$ — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Значыць, $AB = AB_1$. А паколькі $AB_1 = BC$, то $AB = BC$.
Тэарэма даказана.

Заўвага. Прыём прадаўжэння медыяны часта выкарыстоўваецца пры рашэнні геаметрычных задач.

Заданні да § 12

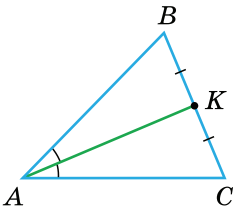
РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У трохвугольніку ABC з перыметрам 54 см медыяна AK перпендыкулярна да стараны BC, а вышыня BM утварае роўныя вуглы са старанамі BA і BC. Знайсці стораны трохвугольніка ABC.*

Рашэнне. Паколькі медыяна AK з'яўляецца і вышынёй, то $\triangle ABC$ — раўнабедраны з асновай BC і $AB = AC$. Паколькі вышыня BM з'яўляецца і бісектрысай, то $\triangle ABC$ — раўнабедраны з асновай AC і $AB = BC$. Тады $\triangle ABC$ — роўнастаронні, $AB = BC = AC = \frac{54}{3} = 18$ (см).
Адказ: 18 см.

Задача 2. *Бісектрыса AK трохвугольніка ABC дзеліць старану BC папалам. Перыметр трохвугольніка ABC роўны* 36 *см, перыметр трохвугольніка AKC роўны* 30 *см. Знайсці даўжыню бісектрысы AK.*



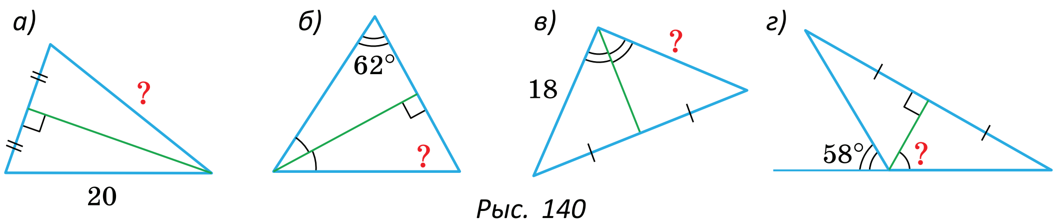
Рыс. 139

Р а ш э н н е. З умовы вынікае, што бісектрыса AK з'яўляецца і медыянай $\triangle ABC$ (рыс. 139). Тады $\triangle ABC$ — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка і $AB = AC$. Паколькі $BK = CK$, то сума адрэзкаў AC і CK роўна паўперыметру $\triangle ABC$, г. зн. 18 см. Па ўмове перыметр $\triangle AKC$ роўны 30 см, таму $AK = 30 - 18 = 12$ (см).

А д к а з: 12 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

100. Знайдзіце старану або вугал, абазначаныя пытальнікам (рыс. 140). Растлумачце свой адказ.

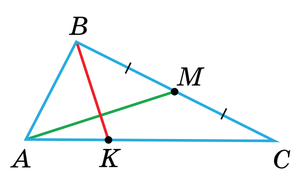


Рыс. 140

101. У трохвугольніку ABC вышыня BK дзеліць старану AC папалам, бісектрыса AM перпендыкулярна да стараны BC. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $BM = 2{,}4$ см.

102. Перпендыкулярныя адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O так, што $CO = OD$, $AC = 12$ см, $BD = 9$ см. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $ACBD$.

103. У трохвугольніку ABC праведзена медыяна AM (рыс. 141). На старане AC адзначаны пункт K. Прамыя BK і AM перпендыкулярныя, і прамая BK дзеліць медыяну AM папалам. Дакажыце, што $BC = 2AB$.



Рыс. 141

104. У трохвугольніку ABC бісектрыса AK перпендыкулярна да медыяны BM. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC, калі $AB = 6$ см, $BC = 8$ см.

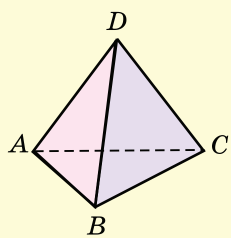
105. Дакажыце, што прамая, якая перасякае бісектрысу вугла і перпендыкулярна да гэтай бісектрысы, адсякае на старанах вугла роўныя адрэзкі.

106*. У трохвугольніку ABC з перыметрам 24 см праведзена медыяна CK, роўная 8 см, $\angle KCB = \angle KCA$. Знайдзіце перыметр трохвугольніка KAC.

107*. Бісектрыса CK трохвугольніка ABC праходзіць праз сярэдзіну медыяны BM. Перыметр трохвугольніка ABC роўны 36 см, $AM = 8$ см. Знайдзіце даўжыню стараны AB.

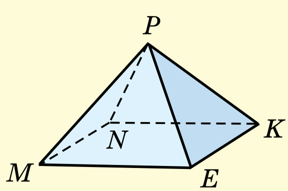
Геаметрыя 3D

У *правільнай трохвугольнай пірамідзе* $DABC$ у аснове ляжыць роўнастаронні трохвугольнік ABC, а бакавыя грані ADB, ADC, BDC — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі з агульнай вяршыняй D (рыс. 142).



Рыс. 142

У *правільнай чатырохвугольнай пірамідзе* ў аснове ляжыць квадрат $MNKE$, а бакавыя грані MPE, MPN, NPK, EPK — роўныя раўнабедраныя трохвугольнікі з агульнай вяршыняй P (рыс. 143).



Рыс. 143

Задача. *Ёсць кавалак дроту даўжынёй 2 м 30 см. Ці хопіць яго, каб вырабіць каркас:*

а) правільнай трохвугольнай пірамідзы з кантам асновы 30 см і бакавым кантам 40 см;

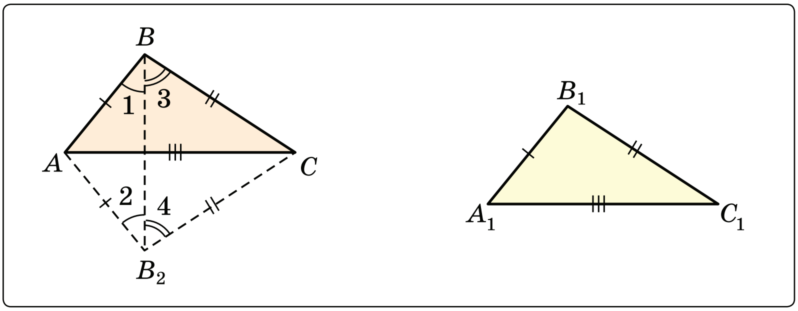
б) чатырохвугольнай пірамідзы, у якой усе канты роўны па 30 см?

§ 13. Трэцяя прымета роўнасці трохвугольнікаў

Вам ужо вядомы дзве прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Разгледзім яшчэ адну.

Тэарэма (трэцяя прымета роўнасці трохвугольнікаў). **Калі тры стараны аднаго трохвугольніка адпаведна роўны тром старанам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.**

Дадзена: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (рыс. 144).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

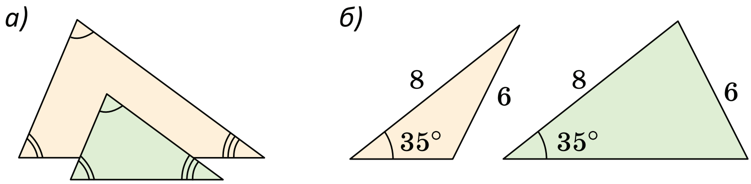


Рыс. 144

Доказ. Прыкладзём трохвугольнік $A_1B_1C_1$ да трохвугольніка ABC так, каб у іх сумясціліся роўныя стораны A_1C_1 і AC, а вяршыні B_1 і B апынуліся ў розных паўплоскасцях адносна прамой AC. Трохвугольнік $A_1B_1C_1$ зойме становішча трохвугольніка AB_2C. Правядзём адрэзак BB_2. Паколькі $AB_2 = AB$ і $B_2C = BC$, то трохвугольнікі ABB_2 і CBB_2 — раўнабедраныя. Адкуль $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$ (як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка). Тады $\angle ABC = \angle AB_2C$, і трохвугольнікі ABC і AB_2C роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Значыць, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Тэарэма даказана.

Заўвага. Выпадкі, калі адрэзак BB_2 перасякае прамую AC у пункце A (або C) ці па-за адрэзкам AC, разглядаюцца аналагічна.

Гавораць, што тры стараны задаюць трохвугольнік аднавначна.



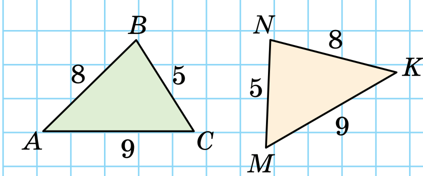
Рыс. 145

Такім чынам, цяпер вы ведаеце тры прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Можна сфармуляваць і іншыя прыметы роўнасці трохвугольнікаў, у якіх непазбежна будзе прысутнічаць адпаведная роўнасць якіх-небудзь трох элементаў двух трохвугольнікаў. Аднак не любыя тры элементы задаюць трохвугольнік. Так, напрыклад, калі тры вуглы аднаго трохвугольніка адпаведна роўны тром вуглам другога трохвугольніка, то такія трохвугольнікі не абавязкова роўныя. Тое ж датычыцца трохвугольнікаў, у якіх адпаведна роўныя дзве староны і вугал, процілеглы адной з гэтых старон. На рысунку 145, *а*, *б* вы бачыце пары такіх няроўных трохвугольнікаў.

А цяпер выканайце **Заданне**.

Заданне

Які вугал $\triangle MNK$ роўны вуглу C $\triangle ABC$? Растлумачце адказ.

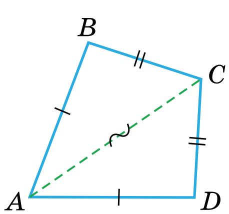


Заданні да § 13

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

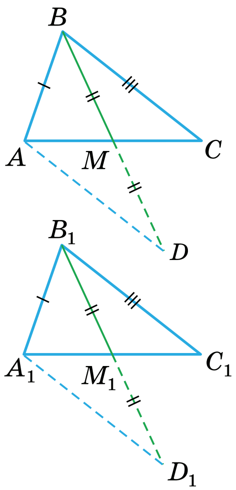
Задача 1. *У простой замкнёнай ломанай ABCD* $AB = AD$, $BC = DC$. *Даказаць, што* $\angle B = \angle D$ *і прамень* AC *— бісектрыса вугла* BAD.



Рыс. 146

Д о к а з. Правядзём адрэзак AC (рыс. 146). Трохвугольнікі ABC і ADC роўныя па 3-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AB = AD$ і $BC = DC$ па ўмове, старана AC — агульная). Таму $\angle B = \angle D$ і $\angle BAC = \angle DAC$ як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках, значыць, прамень AC — бісектрыса вугла BAD.

Задача 2. *Даказаць роўнасць трохвугольнікаў па дзвюх старанах і медыяне паміж імі.*

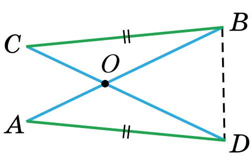


Рыс. 147

Доказ. Няхай $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $BM = B_1M_1$, дзе BM і B_1M_1 — медыяны (рыс. 147). Трэба даказаць, што $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прадоўжым у кожным трохвугольніку дадзеную медыяну на яе даўжыню так, што $MD = BM$, $M_1D_1 = B_1M_1$. Паколькі $\triangle AMD = \triangle CMB$ па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($AM = MC$, $\angle AMD = \angle CMB$ як вертыкальныя, $BM = MD$ па пабудове), то $AD = BC$. Аналагічна $\triangle A_1M_1D_1 = \triangle C_1M_1B_1$, адкуль $A_1D_1 = B_1C_1$. Па ўмове $BC = B_1C_1$, значыць, $AD = A_1D_1$ і $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ па трох старанах. Тады $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ і $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$ па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў. Адсюль $AM = A_1M_1$, $AC = A_1C_1$ (бо BM і B_1M_1 — медыяны) і $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па трох старанах.

Задача 3. *Два роўныя адрэзкі AB і CD перасякаюцца ў пункце O і $AD = BC$. Даказаць, што $BO = DO$.*



Рыс. 148

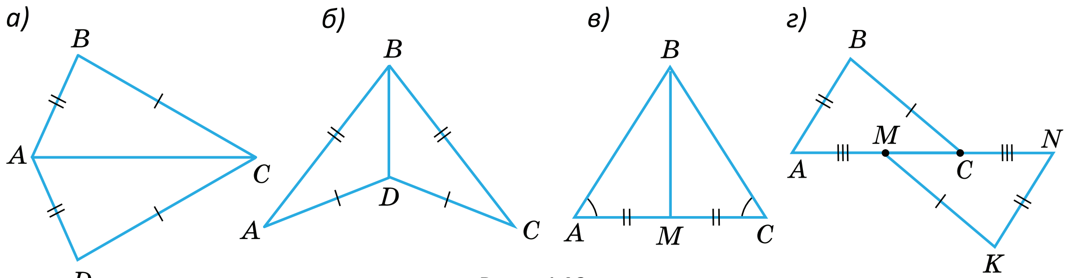
Доказ. Правядзём адрэзак BD (рыс. 148). Трохвугольнікі ABD і CDB роўныя па трох старанах (старана BD — агульная, $AB = CD$ і $AD = CB$ па ўмове). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle ABD = \angle CDB$. Тады $\triangle BOD$ — раўнабедраны (па прымеце раўнабедранага трохвугольніка), адкуль $BO = DO$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

108. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў (рыс. 149).

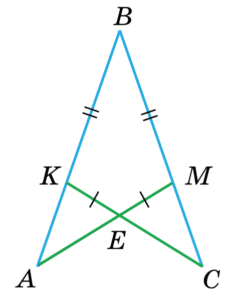
109. Дадзены адрэзак AB. Па адзін бок ад прамой AB адзначаны пункты M і K такія, што $AM = BK$, $AK = BM$. Дакажыце роўнасць трохвугольнікаў AMB і BKA.

110. Дакажыце, што калі ў акружнасці з цэнтрам O правесці дзве роўныя хорды MK і NE, то вуглы MOK і NOE



Рыс. 149

будуць роўныя. Сфармулюйце і дакажыце адваротнае сцверджанне.



Рыс. 150

111. У чатырохвугольніка $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle BAD + \angle BCD = 168°$. Знайдзіце $\angle BCD$.

112. На рысунку 150 $BK = BM$, $KE = ME$. Дакажыце, што $AB = BC$.

113. Дадзена акружнасць з цэнтрам у пункце O, AB і BC — дзве роўныя хорды акружнасці. Пункты E і F — сярэдзіны дадзеных хорд, $OE = 6$ дм, $EF = 5$ дм. Знайдзіце перыметр трохвугольніка EOF.

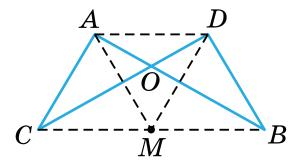
114. Дакажыце, што калі ў трохвугольнікаў ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ і медыяна AM роўна медыяне A_1M_1, то такія трохвугольнікі роўныя паміж сабой.

115. Трохвугольнікі ABC і ABC_1 — раўнабедраныя з агульнай асновай AB, дзе пункты C і C_1 ляжаць па розныя бакі ад прамой AB і $AC \neq AC_1$. Дакажыце, што $CC_1 \perp AB$.

116*. Папяровы квадрат $ABCD$ склалі па дыяганалі AC. Растлумачце, чаму пры гэтым супадуць вяршыні B і D.

117*. Трохвугольнікі AOC і DOB роўныя і $AO \neq OB$ (рыс. 151). Пункт M — сярэдзіна адрэзка BC. Дакажыце, што трохвугольнік AMD раўнабедраны.

118*. Ці абавязкова роўныя два чатырохвугольнікі, калі стораны аднаго адпаведна роўны старанам другога? Сфармулюйце якую-небудзь прымету роўнасці чатырохвугольнікаў.

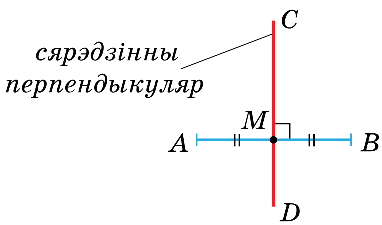


Рыс. 151

§ 14. Сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка

Азначэнне. **Сярэдзінным перпендыкулярам** да адрэзка называецца прамая, якая перпендыкулярна да гэтага адрэзка і праходзіць праз яго сярэдзіну.

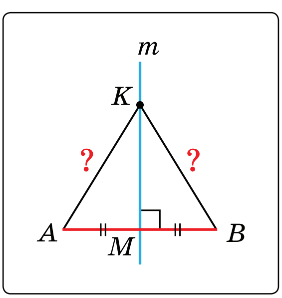
Прамая CD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB, г. зн. $CD \perp AB$ і $AM = MB$ (рыс. 152).



Рыс. 152

Тэарэма (аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка). **Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў гэтага адрэзка. Калі пункт роўнааддалены ад канцоў адрэзка, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка.**

У дадзенай тэарэме два сцверджанні: прамое і яму адваротнае. Дакажам кожнае з гэтых сцверджанняў асобна.

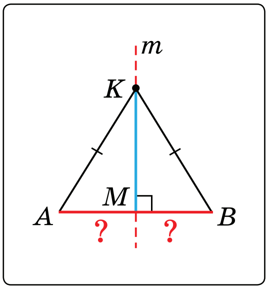


Рыс. 153

1) Дадзена: m — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB, $K \in m$ (рыс. 153).

Даказаць: $KA = KB$.

Доказ. Па азначэнні сярэдзіннага перпендыкуляра $KM \perp AB$, $AM = MB$. Тады ў трохвугольніку AKB вышыня KM з'яўляецца медыянай. Па прымеце раўнабедранага трохвугольніка $\triangle AKB$ — раўнабедраны, таму $KA = KB$.



Рыс. 154

2) Д а д з е н а: $KA = KB$ (рыс. 154).
Д а к а з а ц ь: $K \in m$, дзе m — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB.
Д о к а з. Правядзём у раўнабедраным трохвугольніку AKB вышыню KM, якая па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка будзе і медыянай. Атрымаем $KM \perp AB$, $AM = MB$. Прамая m, што змяшчае вышыню KM, — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB. Тэарэма даказана.

Геаметрычным месцам пунктаў плоскасці (або прасторы) называецца мноства ўсіх пунктаў плоскасці (або прасторы), якія маюць агульную ўласцівасць.

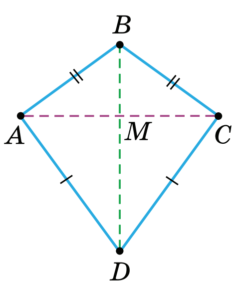
З даказанай тэарэмы вынікае, што сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка — гэта геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад канцоў адрэзка.

Заданні да § 14

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB = BC$, $AD = DC$* (рыс. 155). *Даказаць, што $AC \perp BD$.*

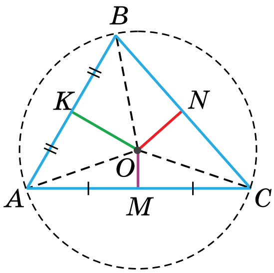


Рыс. 155

Д о к а з. *1-ы спосаб.* З роўнасці трохвугольнікаў ABD і CBD па трох старанах вынікае, што $\angle ABD = \angle CBD$. У раўнабедраным трохвугольніку ABC бісектрыса BM з'яўляецца і вышынёй. Таму $AC \perp BD$.

2-і спосаб. Пункты B і D роўнааддалены ад канцоў адрэзка AC, таму яны ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AC. Паколькі праз два пункты праходзіць адзіная прамая, то BD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AC. Адсюль $AC \perp BD$ і $AM = MC$.

Задача 2 (1-ы адметны пункт трохвугольніка). *Даказаць, што сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.*



Рыс. 156

Доказ. Няхай два сярэдзінныя перпендыкуляры да старон AC і AB перасякаюцца ў пункце O (рыс. 156). Пункт O ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры OM, таму $OA = OC$. Пункт O ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры OK, таму $OA = OB$. Адсюль $OB = OC$. Паколькі пункт O роўнаададлены ад канцоў адрэзка BC, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка BC.

Такім чынам, трэці сярэдзінны перпендыкуляр пройдзе праз пункт O, і ўсе тры сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякуцца ў адным пункце.

Заўвагі. 1. Калі ножку цыркуля паставіць у пункт O і пабудаваць акружнасць радыусам OA, то яна пройдзе праз усе вяршыні трохвугольніка з прычыны таго, што $OA = OB = OC$. Такая акружнасць называецца *апісанай каля трохвугольніка*. У дадзенай задачы мы даказалі, што цэнтр акружнасці, апісанай каля трохвугольніка, ляжыць у пункце перасячэння сярэдзінных перпендыкуляраў да яго старон.

2. Пункт перасячэння сярэдзінных перпендыкуляраў да старон трохвугольніка — гэта яшчэ адзін адметны пункт трохвугольніка, акрамя ўжо вядомых вам пунктаў перасячэння бісектрыс, медыян, вышынь.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

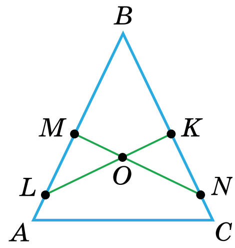
119. Пункт M ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AB, $AM + MB = 15$ м. Знайдзіце адрэзак MA.

120. Прамая a перпендыкулярна да адрэзка AB і праходзіць праз яго сярэдзіну K. Пункт M належыць прамой a, $\angle AMB = 84°$. Знайдзіце $\angle BMK$.

121. Сярэдзінны перпендыкуляр да стараны AC трохвугольніка ABC перасякае старану BC у пункце K. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABK, калі $AB = 5$ см, $BC = 7$ см.

122. Пункты M і K ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AB па розныя бакі ад прамой AB, $MA = 16$ см, $KB = 12$ см. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $AMBK$.

123. Дакажыце, што сярэдзінны перпендыкуляр да хорды акружнасці праходзіць праз цэнтр акружнасці.



Рыс. 157

124. Сярэдзінныя перпендыкуляры KL і MN да бакавых старон BC і AB раўнабедранага трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце O (рыс. 157). Дакажыце, што:

а) $MN = KL$; б) $MO = KO$.

125. Дзве акружнасці рознага радыуса з цэнтрамі ў пунктах O_1 і O_2 перасякаюцца ў пунктах A і B. Дакажыце, што лінія цэнтраў O_1O_2 перпендыкулярна да агульнай хорды AB гэтых акружнасцей.

126*. Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь раўнабедраных трохвугольнікаў з дадзенай асновай.

127*. Па адзін бок ад прамой a размешчаны пункты A і B. На прамой a знайдзіце пункт M такі, каб адлегласці ад пункта M да пунктаў A і B былі роўныя.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Прыметы раўнабедранага трохвугольніка.
2. Тэарэму аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка.
3. Адметныя пункты трохвугольніка.

Умеем

1. Даказваць тэарэму «Калі ў трохвугольніку вышыня з’яўляецца медыянай, то трохвугольнік раўнабедраны».
2. Даказваць тэарэму «Калі ў трохвугольніку вышыня з’яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны».
3*. Даказваць тэарэму «Калі ў трохвугольніку медыяна з’яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны».
4*. Даказваць тэарэму аб сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка.

Геаметрыя 3D

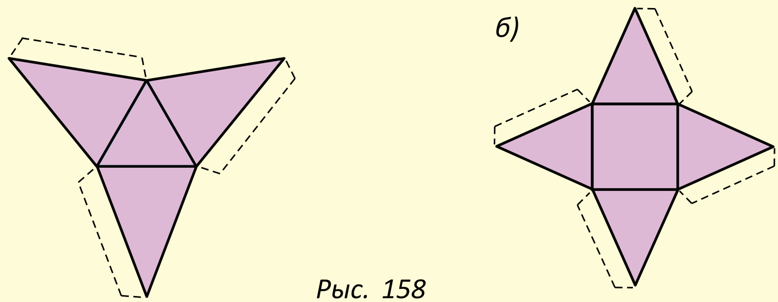
Са шчыльнай паперы зрабіце разгортку:

а) трохвугольнай піраміды, у якой у аснове ляжыць роўнастаронні трохвугольнік са стараной 10 см, а ўсе бакавыя грані — раўнабедраныя трохвугольнікі з бакавой стараной, роўнай 13 см (рыс. 158, *а*);

б) чатырохвугольнай піраміды, у якой у аснове ляжыць квадрат са стараной 9 см, а ўсе бакавыя грані — раўнабедраныя трохвугольнікі з бакавой стараной, роўнай 12 см (рыс. 158, *б*).

Склейце піраміды па дадзеных разгортках, злучыўшы разам вяршыні раўнабедраных трохвугольнікаў.

а) *б)*

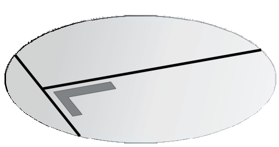


Рыс. 158

Мадэляванне

Маша вучыцца ў будаўнічым каледжы. На практычных занятках ёй даручылі прасвідраваць адтуліну ў цэнтры металічнага круга. Каб знайсці цэнтр круга, дзяўчына начарціла хорду, затым пры дапамозе рулеткі адзначыла яе сярэдзіну. Выкарыстаўшы вугольнік, яна пабудавала перпендыкуляр да гэтай хорды з асновай у яе сярэдзіне (рыс. 159). Дапамажыце дзяўчыне працягнуць дзеянні і знайсці цэнтр круга.

Складзіце матэматычную мадэль задання, якая тлумачыць дзеянні Машы і даказвае правільнасць выбранага алгарытму.



Рыс. 159

ЗАПАМІНАЕМ

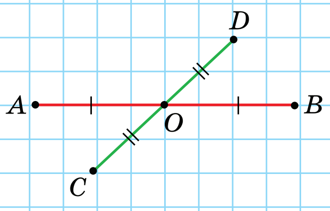
1. Тры прыметы роўнасці трохвугольнікаў:
   1) па дзвюх старанах і вугле паміж імі;
   2) па старане і двух прылеглых да яе вуглах;
   3) па трох старанах.
2. Вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка роўныя.

3. Бісектрыса раўнабедранага трохвугольніка, праведзеная з вяршыні да асновы, з'яўляецца яго вышынёй і медыянай.
4. Калі два вуглы трохвугольніка роўныя, то трохвугольнік раўнабедраны (прымета раўнабедранага трохвугольніка).
5. Калі вышыня трохвугольніка з'яўляецца яго медыянай ці бісектрысай або медыяна з'яўляецца яго бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны (прыметы раўнабедранага трохвугольніка).
6. Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў гэтага адрэзка. Калі пункт роўнааддалены ад канцоў адрэзка, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка.
7. Усе тры сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (1-ы адметны пункт трохвугольніка).

Правяраем сябе

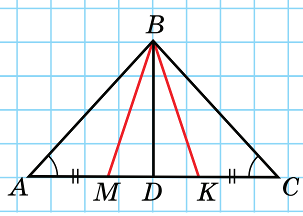
Заданне 1

Па рысунку дакажыце, што:
а) $AC = BD$, $AD = BC$,
б) $\angle CAD = \angle DBC$.



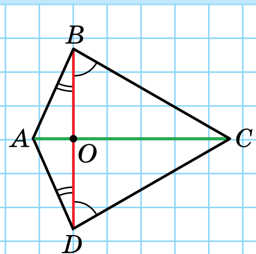
Заданне 2

Вядома, што $\angle A = \angle C$,
$AM = CK$, $BD \perp AC$.
Дакажыце, што:
а) $\triangle ABM = \triangle CBK$;
б) $\triangle MBD = \triangle KBD$.



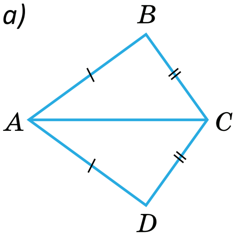
Заданне 3

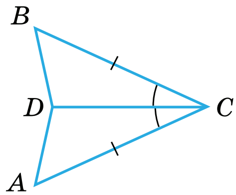
Па рысунку дакажыце, што:
а) $AC \perp BD$;
б) $BO = OD$.

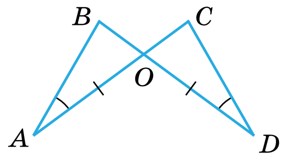


Падрыхтоўка да кантрольнай работы 2

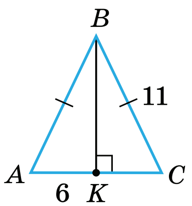
1. Вызначыце, па якой прымеце роўныя трохвугольнікі.

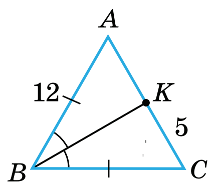
а)


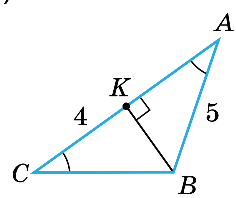
б)


в)


2. Па даных на рысунку знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

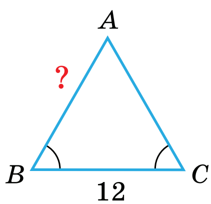
а)


б)


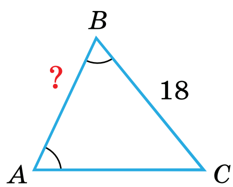
в)


3. Знайдзіце даўжыню стараны AB, выкарыстаўшы даныя на рысунку.

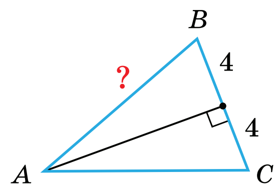
а) $P_{ABC} = 32$



б) $P_{ABC} = 48$



в) $P_{ABC} = 26$



4. Дадзены трохвугольнік ABC. Знайдзіце P_{ABC}, калі вядома, што:

а) $AB : BC : AC = 2 : 3 : 5$, $AC = 20$ см;

б) $AB - BC = 2$ см, $AB = \frac{4}{3}AC$, $AC = 10$ см;

в) $AB : BC = 1 : 2$, $AB + BC = 18$ см, $2AC = 3AB$.

5. Дадзена: $\triangle ABC$, $AB = BC$, AK і CM — медыяны. Дакажыце, што:

а) $AK = CM$;

б) $\angle BAK = \angle BCM$;

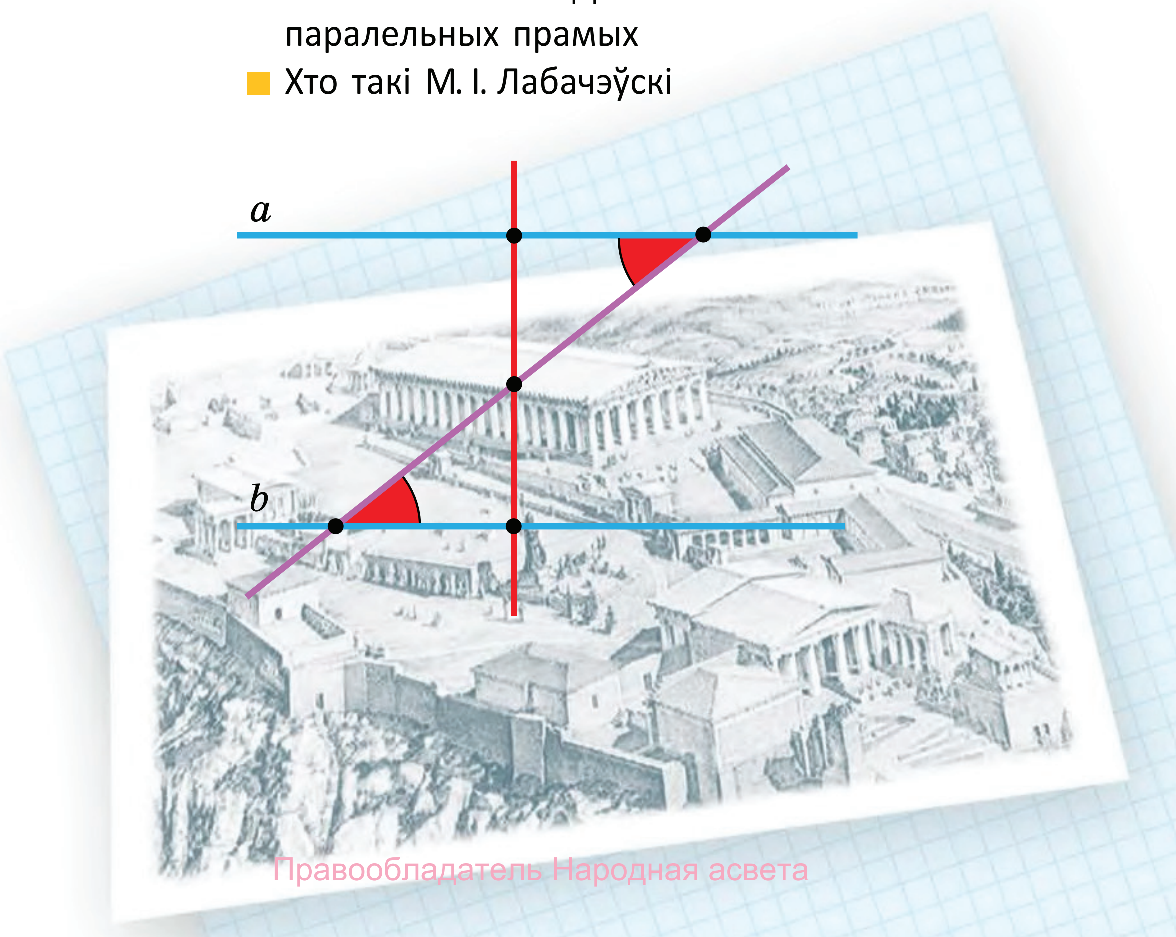
в) $\angle KAC = \angle MCA$.

Глава III

Паралельнасць прамых на плоскасці

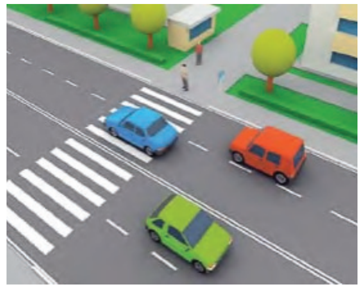
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Аб прыметах і ўласцівасцях паралельных прамых
- У чым заключаецца аксіёма паралельных прамых
- Хто такі М. І. Лабачэўскі



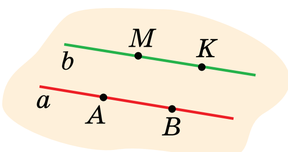
§ 15. Прыметы паралельнасці прамых

15.1. Дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй

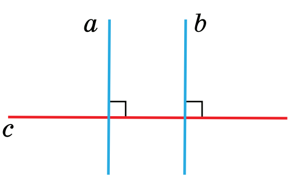


Паралельнасць прамых — адно з асноўных паняццяў геаметрыі. Паралельнасць часта сустракаецца ў жыцці. Паглядзеўшы навокал, можна пераканацца, што мы жывём у свеце паралельных ліній. Гэта краі парты, слупы наўсцяж дарогі, палоскі «зебры» на пешаходным пераходзе.

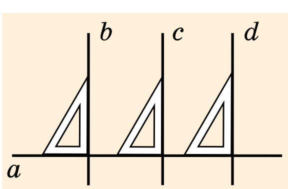
Азначэнне. Дзве прамыя называюцца **паралельнымі**, калі яны ляжаць у адной плоскасці і не перасякаюцца.



Рыс. 160



Рыс. 161



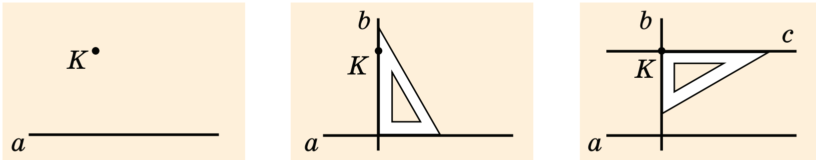
Рыс. 162

Прамені і *адрэзкі* называюцца *паралельнымі*, калі яны ляжаць на паралельных прамых. Калі прамыя a і b паралельныя, г. зн. $a \parallel b$ (рыс. 160), то паралельныя адрэзкі AB і MK, адрэзак MK і прамая a, промені AB і KM.

Вы ўжо ведаеце тэарэму аб паралельных прамых на плоскасці: «*Дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой*». Іншымі словамі, калі $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$ (рыс. 161). Дадзеная тэарэма дазваляе рашыць дзве важныя практычныя задачы.

Першая задача заключаецца ў праведзенні некалькіх паралельных прамых.

Няхай дадзена прамая a (рыс. 162). Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка будуюць прамую b, перпендыкулярную да прамой a. Затым ссоўваюць трохвугольнік



Рыс. 163

уздоўж прамой a і будуюць другую перпендыкулярную прамую c, затым — трэцюю прамую d і г. д. Паколькі прамыя b, c, d перпендыкулярныя да адной прамой a, то з вышэй названай тэарэмы вынікае, што $b \parallel c$, $c \parallel d$, $b \parallel d$.

Другая задача — правядзенне прамой, якая паралельна дадзенай і праходзіць праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой.

Па рысунку 163 растлумачце працэс правядзення прамой c, якая паралельна прамой a і праходзіць праз пункт K.

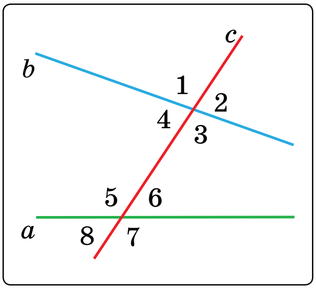
З пабудовы вынікае: паколькі $a \perp b$ і $c \perp b$, то $a \parallel c$. Рашэнне другой задачы даказвае тэарэму аб існаванні прамой, паралельнай дадзенай, якая сцвярджае:

Праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці прамую, паралельную дадзенай.

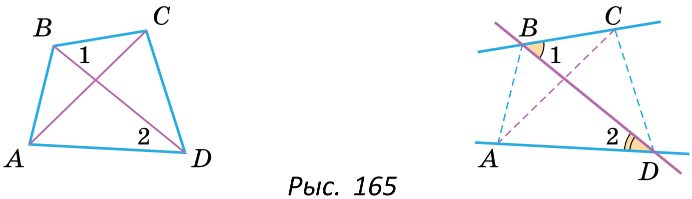
15.2. Накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы

Пры перасячэнні дзвюх прамых a і b трэцяй прамой c, якая называецца *сякучай*, утвараецца 8 вуглоў (рыс. 164).

Некаторыя пары гэтых вуглоў маюць спецыяльныя назвы: $\angle 3$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 6$ — ***унутраныя накрыжлеглыя вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 1$ і $\angle 7$ — ***знешнія накрыжлеглыя вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$ — ***адпаведныя вуглы***; $\angle 3$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 5$ — ***унутраныя аднастароннія вуглы***; $\angle 2$ і $\angle 7$, $\angle 1$ і $\angle 8$ — ***знешнія аднастароннія вуглы***.



Рыс. 164



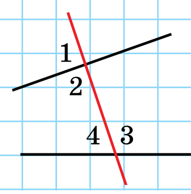
Рыс. 165

На рысунку 165 адзначаны вуглы 1 і 2. Яны з'яўляюцца ўнутранымі накрыжлеглымі вугламі пры прамых BC і AD і сякучай BD. У гэтым лёгка пераканацца, прадоўжыўшы адрэзкі BC, AD і BD. Адкажыце: якімі па ўзаемным размяшчэнні з'яўляюцца $\angle ABC$ і $\angle BAD$ адносна прамых BC і AD і сякучай AB?

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Заданне 1

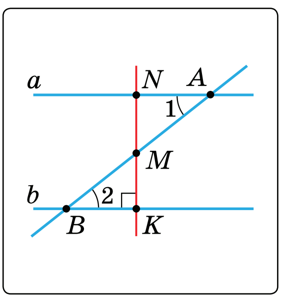
Сярод вуглоў 1, 2, 3 і 4 назавіце накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы.



15.3. Прыметы паралельнасці прамых

З названымі парамі вуглоў звязаны наступныя прыметы паралельнасці прамых.

Тэарэма (першая прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 166

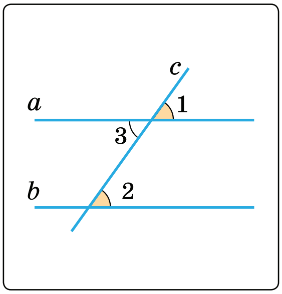
Дадзена: a і b — прамыя, AB — сякучая, $\angle 1 = \angle 2$ (рыс. 166).

Даказаць: $a \parallel b$.

Доказ. З сярэдзіны M адрэзка AB апусцім перпендыкуляр MK на прамую b. Адкладзём адрэзак $AN = BK$ і правядзём адрэзак NM (гл. рыс. 166). Трохвугольнікі BKM і ANM роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Адсюль $\angle ANM = \angle BKM = 90°$,

$\angle AMN = \angle BMK$ і таму $\angle NMK$ — разгорнуты (гл. с. 44, заўвага да задачы 3*). Прамыя a і b паралельныя як дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй (прамой NK).
Тэарэма даказана.

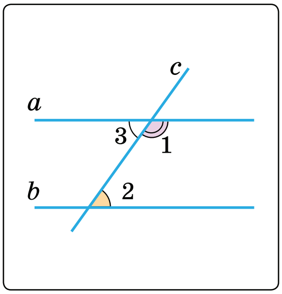
Тэарэма (другая прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай адпаведныя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 167

Дадзена: $\angle 1 = \angle 2$ (рыс. 167).
Даказаць: $a \parallel b$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 роўныя як вертыкальныя. А паколькі вуглы 1 і 2 роўныя па ўмове, то вуглы 2 і 3 роўныя паміж сабой. Але вуглы 2 і 3 — унутраныя накрыжлеглыя пры прамых a і b і сякучай c. А мы ведаем, што калі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Значыць, $a \parallel b$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (трэцяя прымета паралельнасці прамых). **Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя паралельныя.**



Рыс. 168

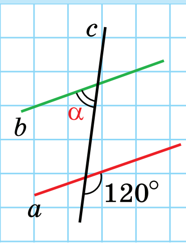
Дадзена: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рыс. 168).
Даказаць: $a \parallel b$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 — сумежныя, таму іх сума роўна 180°. А паколькі сума вуглоў 1 і 2 роўна 180° па ўмове, то вуглы 2 і 3 роўныя паміж сабой. Але вуглы 2 і 3 — унутраныя накрыжлеглыя пры прамых a і b і сякучай c. А мы ведаем, што калі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Значыць, $a \parallel b$.
Тэарэма даказана.

Сфармулюйце і дакажыце аналагічныя прыметы для знешніх накрыжлеглых і знешніх аднастаронніх вуглоў.

А цяпер выканайце **Заданне 2**.

Заданне 2

Колькі градусаў павінен складаць вугал α, каб прамыя a і b былі паралельнымі?

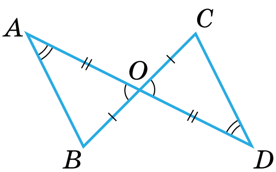


Заданні да § 15

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

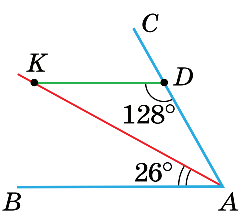
Задача 1. *Даказаць, што калі адрэзкі AD і BC перасякаюцца і пунктам перасячэння дзеляцца папалам, то прамыя AB і CD паралельныя.*



Рыс. 169

Доказ. Няхай O — пункт перасячэння адрэзкаў AD і BC (рыс. 169). Трохвугольнікі AOB і DOC роўныя па дзвюх старанах і вугле паміж імі ($\angle AOB = \angle DOC$ як вертыкальныя, $BO = OC$, $AO = OD$ па ўмове). З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $\angle BAO = \angle CDO$. Паколькі гэтыя вуглы — накрыжлеглыя пры прамых AB і CD і сякучай AD, то $AB \parallel CD$ па прымеце паралельнасці прамых.

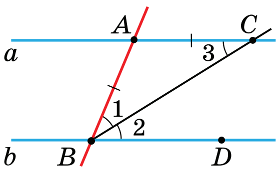
Задача 2. *На бісектрысе вугла BAC адзначаны пункт K, а на старане AC — пункт D, $\angle BAK = 26°$, $\angle ADK = 128°$. Даказаць, што адрэзак KD паралельны праменю AB.*



Рыс. 170

Доказ. Паколькі AK — бісектрыса вугла BAC (рыс. 170), то $\angle BAC = 2 \cdot \angle BAK = 2 \cdot 26° = 52°$. Вуглы ADK і BAC — унутраныя аднастароннія пры прамых KD і BA і сякучай AC. А паколькі $\angle ADK + \angle BAC = 128° + 52° = 180°$, то $KD \parallel AB$ па прымеце паралельнасці прамых.

Задача 3. *Бісектрыса BC вугла ABD адсякае на прамой a адрэзак AC, роўны адрэзку AB. Даказаць, што прамыя a і b паралельныя* (рыс. 171).

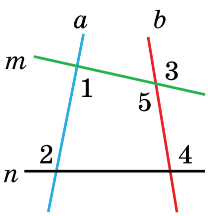


Рыс. 171

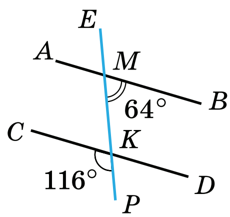
Д о к а з. Паколькі BC — бісектрыса вугла ABD, то $\angle 1 = \angle 2$. Паколькі трохвугольнік BAC раўнабедраны ($AB = AC$ па ўмове), то $\angle 1 = \angle 3$ як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Тады $\angle 2 = \angle 3$. Але вуглы 2 і 3 з'яўляюцца накрыжлеглымі пры прамых a і b і сякучай BC. А калі накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Такім чынам, $a \parallel b$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

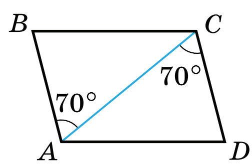
128. Сярод вуглоў 1, 2, 3, 4 і 5 (рыс. 172) вызначыце накрыжлеглыя, адпаведныя і аднастароннія вуглы.



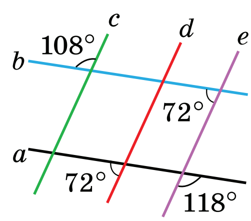
Рыс. 172



Рыс. 173



Рыс. 174

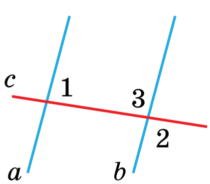


Рыс. 175

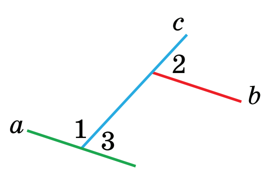
129. Высветліце, якія з паказаных на рысунках 173—175 прамых паралельныя і чаму.

130. У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Дакажыце, што $BC \parallel AD$.

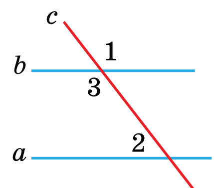
131. Дакажыце, што $a \parallel b$ (рыс. 176—178), калі:
а) $\angle 1 = 87°$, $\angle 2 = 93°$; б) $\angle 1 = 116°$, $\angle 2 = 64°$;
в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.



Рыс. 176

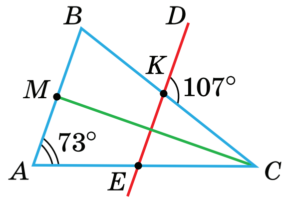


Рыс. 177



Рыс. 178

132. Бісектрыса CM трохвугольніка ABC дзеліць старану AB папалам, $\angle BAC = 73°$, $\angle DKC = 107°$ (рыс. 179). Дакажыце, што $ED \parallel AB$.



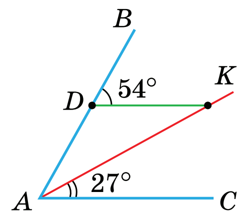
Рыс. 179

133. У $\triangle ABC$ праведзена бісектрыса AM, да якой праведзены сярэдзінны перпендыкуляр, што перасякае прамую AB у пункце E. Дакажыце, што $EM \parallel AC$.

134. З пунктаў A і B прамой a у адну паўплоскасць праведзены прамені AK і BM так, што вугал KAB складае 20 % вугла MBA, а вугал MBA складае $\frac{5}{6}$ разгорнутага вугла. Ці перасякаюцца прамыя AK і BM?

135. На рысунку 180 AK — бісектрыса вугла BAC. Дакажыце, што $DK \parallel AC$, калі:

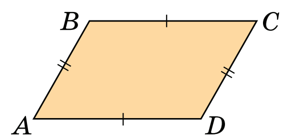
а) $\angle BDK = 54°$, $\angle KAC = 27°$;
б) $\angle BDK = 2\angle KAC$.



Рыс. 180

136*. Дакажыце, што прамыя AB і CD, размешчаныя ў каардынатнай плоскасці, паралельныя, калі $A(-6; 0)$, $B(0; -4)$, $C(6; 0)$, $D(0; 4)$.

137*. *Паралелаграмам называецца чатырохвугольнік, у якога процілеглыя стораны паралельныя.* Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніку процілеглыя стораны роўныя (рыс. 181), то гэты чатырохвугольнік — паралелаграм.



Рыс. 181

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

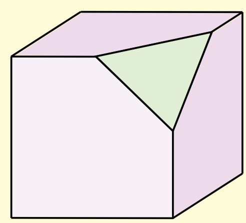
1. Азначэнне паралельных прамых.
2. Тэарэму аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.
3. Назвы некаторых пар вуглоў, што ўтвараюцца пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай.
4. Прыметы паралельнасці прамых.

Умеем

1. Праводзіць пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка паралельныя прамыя.
2. Праводзіць пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка прамую, якая паралельна дадзенай прамой і праходзіць праз пункт, што не ляжыць на дадзенай прамой.
3. Вызначаць на рысунку пары накрыжлеглых, адпаведных і аднастаронніх вуглоў.
4. Даказваць прыметы паралельнасці прамых.

Геаметрыя 3D

1. У куба адрэзалі вугал (рыс. 182). Колькі ўсяго вяршынь, кантаў і граней у атрыманага мнагагранніка? Калі $В$ — колькасць вяршынь, $Г$ — колькасць граней, $К$ — колькасць кантаў, то чаму будзе роўны лік $В + Г - К$? Знакамітая формула вялікага матэматыка Леанарда Эйлера (XVII ст.) сцвярджае, што для любога мнагагранніка $В + Г - К = 2$. Праверце гэту формулу для паралелепіпеда, для трохвугольнай і чатырохвугольнай пірамід.



Рыс. 182

2. Вызначыце, колькі ў паказанага на рысунку мнагагранніка пар паралельных кантаў, дзе кожная пара паралельных кантаў належыць якой-небудзь адной грані.

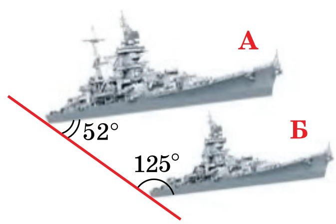
3*. Нарысуйце разгортку гэтага мнагагранніка.

Мадэляванне

Каманда «*Дзесяць градусаў лева руля*» на караблі азначае паварот судна на 10° улева ад курсу.

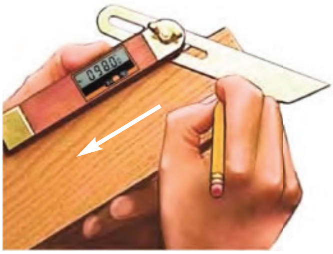
а) Якую каманду павінен даць камандзір карабля «Б» (рыс. 183) рулявому, каб караблі «А» і «Б» ішлі паралельнымі курсамі?

б) Калі камандзір карабля «А» дасць каманду «пяць градусаў лева руля», то якую каманду пасля гэтага павінен даць камандзір карабля «Б», каб караблі ішлі паралельнымі курсамі?



Рыс. 183

Рэальная геаметрыя



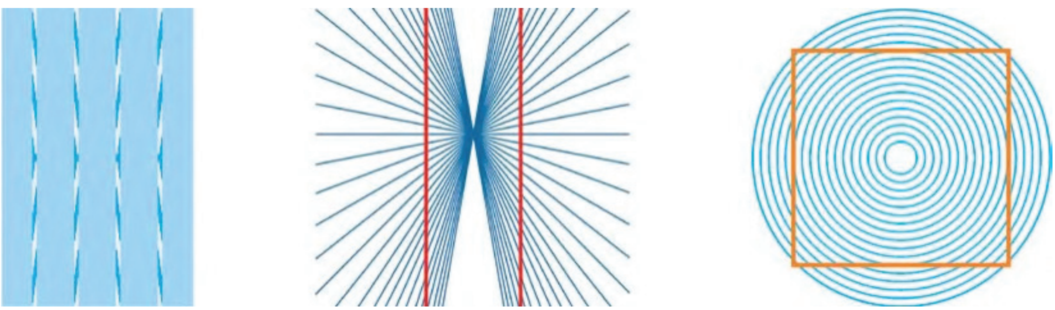
Рыс. 184

На рысунку 184 паказаны вугламер — інструмент для нанясення паралельных ліній на рэйцы ці дошцы. Прыбор складаецца з дзвюх частак, змацаваных шрубай. Першая частка нерухомая, яна прыціскаецца да дошкі, а другая паварочваецца на неабходны вугал, градусная мера якога адлюстроўваецца на экране вугламера. Заціснуўшы шрубу, замацоўваюць патрэбны вугал. Ссоўваючы нерухомую частку вугламера ўздоўж дошкі, наносяць паралельныя лініі разметкі, па якіх затым распілоўваюць дошку. Растлумачце, згодна з якой тэарэмай лініі, што атрымліваюцца, будуць паралельнымі.

Гімнастыка розуму

Вызначыце візуальна, г. зн. на вока, на якім з рысункаў паказаны паралельныя адрэзкі (рыс. 185).

Прыклаўшы лінейку, пераканайцеся, што ўсе лініі з'яўляюцца прамымі, хоць здаюцца скрыўленымі.

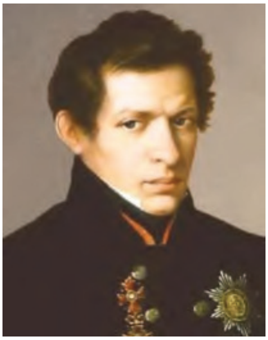


Рыс. 185

§ 16. Аксіёма паралельных прамых

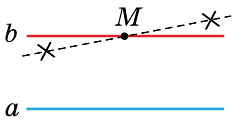
Вы ўжо ведаеце, што на плоскасці праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, *можна* правесці прамую, паралельную дадзенай (гл. § 15). З пятага пастулата Эўкліда (*пастулат* — аксіяматычнае дапушчэнне) вынікае, што такая прамая — адзіная.

На працягу двух тысячагоддзяў вакол сцверджання аб адзінасці паралельнай прамой разыгрывалася захапляльная і драматычная гісторыя! З часоў Старажытнай Грэцыі матэматыкі спрачаліся аб тым, можна даказаць пяты пастулат Эўкліда ці не. Гэта тэарэма ці аксіёма? У рэшце рэшт працы рускага матэматыка **Мікалая Іванавіча Лабачэўскага (1792—1856)** дазволілі высветліць, што даказаць пяты пастулат нельга. Таму гэта сцверджанне з'яўляецца *аксіёмай*.



М. І. Лабачэўскі

Аксіёма паралельных прамых. **Праз пункт, які не ляжыць на дадзенай прамой, можна правесці толькі адну прамую, паралельную дадзенай.**



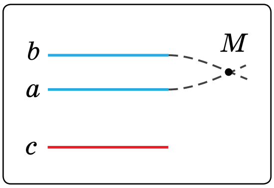
Рыс. 186

Калі прамая b праходзіць праз пункт M і паралельна прамой a (рыс. 186), то любая іншая прамая, што праходзіць праз пункт M, будзе перасякацца з прамой a ў некаторым пункце, няхай і досыць аддаленым.

Пошукі доказу пятага пастулата Эўкліда прывялі да развіцця матэматыкі і фізікі, да перагляду навуковых уяўленняў аб геаметрыі Сусвету. Вырашаючы праблему пятага пастулата, Лабачэўскі стварыў новую геаметрыю, з новымі аксіёмамі, тэарэмамі, якая адрозніваецца ад *геаметрыі Эўкліда* і зараз так і называецца — *геаметрыя Лабачэўскага*.

Вы ўжо ведаеце, што на плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой. А калі дзве прамыя паралельныя трэцяй прамой, то што можна сказаць пра першыя дзве прамыя? На гэта пытанне адказвае наступная тэарэма.

Тэарэма (аб дзвюх прамых, паралельных трэцяй). **На плоскасці дзве прамыя, паралельныя трэцяй, паралельныя паміж сабой.**



Рыс. 187

Дадзена: $a \parallel c$, $b \parallel c$ (рыс. 187).

Даказаць: $a \parallel b$.

Доказ. Дапусцім, што прамыя a і b не паралельныя і перасякаюцца ў некаторым пункце M. Тады праз пункт M будуць праходзіць дзве прамыя a і b, паралельныя трэцяй прамой c. А гэта супярэчыць аксіёме паралельных прамых. Значыць, наша меркаванне няправільнае, і $a \parallel b$. Тэарэма даказана.

Метад доказу «ад адваротнага»

Пры доказе тэарэмы аб дзвюх прамых, паралельных трэцяй, мы карысталіся метадам доказу *ад адваротнага* (гэта значыць *ад процілеглага*). Сутнасць яго ў наступным. Сцверджанне любой тэарэмы падзяляецца на *ўмову* — тое, што ў тэарэме дадзена, і *вывад* — тое, што трэба даказаць. У даказанай вышэй тэарэме ўмова: *«Кожная з дзвюх прамых паралельная некаторай трэцяй прамой»*, а вывад: *«Гэтыя дзве прамыя паралельныя паміж сабой»*.

Выкарыстоўваючы метад ад адваротнага, у пачатку доказу робяць дапушчэнне, процілеглае (адваротнае) таму, што трэба даказаць. Пасля гэтага шляхам лагічных разважанняў прыходзяць да якой-небудзь супярэчнасці. Гэта дазваляе прыйсці да высновы, што зробленае дапушчэнне няправільнае, а правільным з'яўляецца тое, што трэба было даказаць.

У доказе нашай тэарэмы мы дапусцілі, што дзве прамыя не паралельныя, а перасякаюцца ў некаторым пункце. І прыйшлі да высновы, што тады парушаецца аксіёма паралельных прамых. Такім чынам, наша дапушчэнне аб перасячэнні прамых няправільнае, а правільнае яму процілеглае: прамыя не перасякаюцца, г. зн. паралельныя.

Метадам ад адваротнага раней была даказана тэарэма аб дзвюх прамых, перпендыкулярных да трэцяй.

Дадзены метад з'яўляецца вельмі магутным лагічным інструментам доказу. Прычым не толькі ў геаметрыі, але і ў любой аргументаванай спрэчцы.

Выкарыстаўшы аксіёму паралельных прамых і метад ад адваротнага, дакажыце самастойна наступную тэарэму.

Тэарэма. **Калі на плоскасці прамая перасякае адну з дзвюх паралельных прамых, то яна перасякае і другую прамую.**

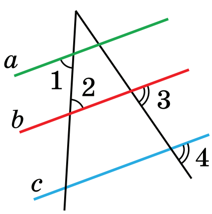
Пры дапамозе **Інтэрнэту** высвятліце, ці маглі сустракацца вялікі пісьменнік *Леў Талсты* і вялікі матэматык *Мікалай Лабачэўскі*. Калі маглі, то дзе была найбольшая верагоднасць іх сустрэчы?

Заданні да § 16

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

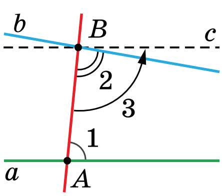
Задача 1. *На рысунку* 188 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. *Даказаць, што* $a \parallel c$.



Рыс. 188

Доказ. Паколькі накрыжлеглыя вуглы 1 і 2 роўныя, то $a \parallel b$ па прымеце паралельнасці прамых. Паколькі адпаведныя вуглы 3 і 4 роўныя, то па прымеце паралельнасці прамых $c \parallel b$. Паколькі $a \parallel b$ і $c \parallel b$, то $a \parallel c$ па тэарэме аб дзвюх прамых, паралельных трэцяй.

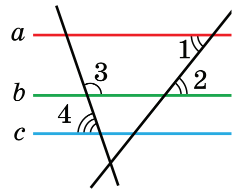
Задача 2. *Даказаць, што калі сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў пры дзвюх дадзеных прамых і сякучай меншая за* 180°, *то гэтыя прамыя перасякаюцца.*



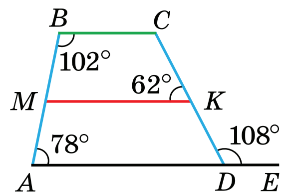
Рыс. 189

Доказ. Няхай a і b — дадзеныя прамыя, AB — іх сякучая, сума вуглоў 1 і 2 меншая за 180° (рыс. 189). Адкладзём ад праменя BA вугал 3, які ў суме з вуглом 1 дае 180°. Атрымаем прамую c, якая паралельна прамой a па прымеце паралельнасці прамых. Калі дапусціць, што прамыя a і b не перасякаюцца, а, значыць, паралельныя, то праз пункт B будуць праходзіць дзве прамыя b і c, паралельныя прамой a. Гэта супярэчыць аксіёме паралельных прамых. Значыць, прамыя a і b перасякаюцца.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА



Рыс. 190



Рыс. 191

138. На рысунку 190 $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 52°$, $\angle 3 = 122°$, $\angle 4 = 58°$. Дакажыце, што $a \parallel c$.

139. Сярод прамых a, b, c і d, што ляжаць у адной плоскасці, вызначыце пары паралельных прамых, калі вядома, што $a \perp b$, $c \perp b$, $a \perp d$.

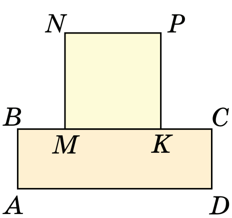
140. Высветліце, ці перасякуцца пры прадаўжэнні адрэзкі MK і BC (рыс. 191).

141. На рысунку 192 $ABCD$ — прамавугольнік, $MNPK$ — квадрат. Дакажыце, што $NP \parallel AD$, $AB \parallel PK$.

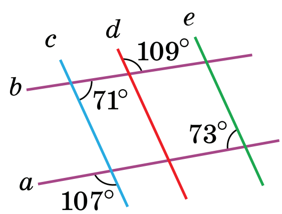
142. Вызначыце ўсе пары паралельных прамых (рыс. 193).

143. На рысунку 194 $\angle BAC = 28°$, $\angle ACD = 28°$, $\angle DFC = 35°$, $\angle EFC = 15°$, $\angle FDC = 130°$. Дакажыце, што $AB \parallel FE$.

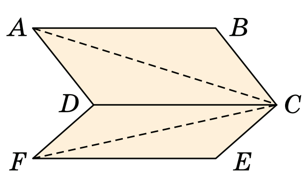
144*. Калі дзве паралельныя прамыя перасячы дзвюма іншымі перпендыкулярнымі да іх паралельнымі прамымі, атрымаецца прамавугольнік. Колькі ўсяго прамавугольнікаў можна налічыць у прамавугольнай табліцы, у якой 2 радкі і 3 слупкі?



Рыс. 192



Рыс. 193

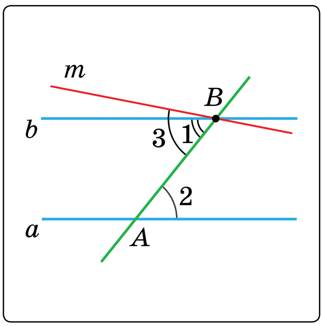


Рыс. 194

§ 17. Уласцівасці паралельных прамых

Вы ведаеце, што калі дзве прамыя перасечаны сякучай і накрыжлеглыя вуглы роўныя, то прамыя паралельныя. Гэта прымета паралельнасці прамых. Адваротнае сцверджанне гучыць так: «Калі дзве прамыя паралельныя і перасякаюцца сякучай, то накрыжлеглыя вуглы роўныя». Гэта сцверджанне правільнае, і яно адлюстроўвае ўласцівасць паралельных прамых. Дакажам яго і дзве іншыя ўласцівасці для адпаведных і аднастаронніх вуглоў.

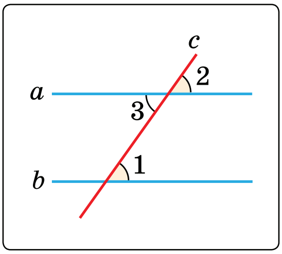
Тэарэма (аб уласцівасці накрыжлеглых вуглоў пры паралельных прамых і сякучай).
Калі дзве паралельныя прамыя перасечаны сякучай, то ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы роўныя.



Рыс. 195

Дадзена: $a \parallel b$, AB — сякучая, $\angle 1$ і $\angle 2$ — унутраныя накрыжлеглыя.
Даказаць: $\angle 1 = \angle 2$.
Доказ. Дапусцім, што $\angle 1 \neq \angle 2$. Адкладзём ад праменя BA вугал 3, роўны вуглу 2. Паколькі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы 2 і 3 роўныя, то $m \parallel a$ па прымеце паралельнасці прамых. Атрымалі, што праз пункт B праходзяць дзве прамыя b і m, паралельныя прамой a. А гэта немагчыма па аксіёме паралельных прамых. Такім чынам, наша дапушчэнне няправільнае і $\angle 1 = \angle 2$.
Тэарэма даказана.

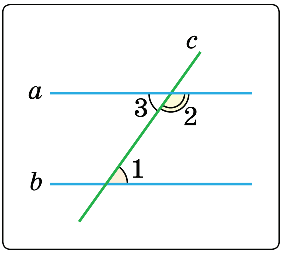
Тэарэма (аб уласцівасці адпаведных вуглоў пры паралельных прамых і сякучай).
Калі дзве паралельныя прамыя перасечаны сякучай, то адпаведныя вуглы роўныя.



Рыс. 196

Дадзена: $a \parallel b$, c — сякучая, $\angle 1$ і $\angle 2$ — адпаведныя (рыс. 196).
Даказаць: $\angle 1 = \angle 2$.
Доказ. Вуглы 1 і 3 роўныя як унутраныя накрыжлеглыя пры паралельных прамых a і b і сякучай c. Вуглы 2 і 3 роўныя як вертыкальныя. Значыць, $\angle 1 = \angle 2$. Тэарэма даказана.

Тэарэма (аб уласцівасці аднастаронніх вуглоў пры паралельных прамых і сякучай).
Калі дзве паралельныя прамыя перасечаны сякучай, то сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў роўна 180°.



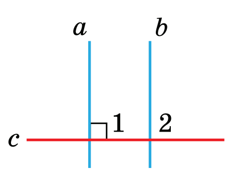
Рыс. 197

Дадзена: $a \parallel b$, c — сякучая, $\angle 1$ і $\angle 2$ — унутраныя аднастароннія (рыс. 197).
Даказаць: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.
Доказ. Вуглы 2 і 3 — сумежныя. Па ўласцівасці сумежных вуглоў $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Па ўласцівасці паралельных прамых $\angle 1 = \angle 3$ як унутраныя накрыжлеглыя. Значыць, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Тэарэма даказана.

Сфармулюйце і дакажыце самастойна аналагічныя ўласцівасці для знешніх накрыжлеглых і знешніх аднастаронніх вуглоў.

Вынік.

Прамая, перпендыкулярная да адной з дзвюх паралельных прамых, перпендыкулярна і да другой прамой.



Рыс. 198

Дакажыце гэты вынік самастойна.

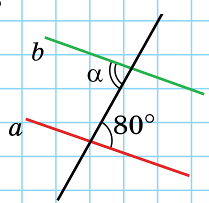
На рысунку 198 $a \parallel b$ і $c \perp a$, г. зн. $\angle 1 = 90°$. Трэба даказаць, што $c \perp b$, г. зн. што $\angle 2 = 90°$.

Даказаныя намі тэарэмы аб уласцівасцях вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай з'яўляюцца адваротнымі да прымет паралельнасці прамых. Каб не блытаць прыметы і ўласцівасці паралельных прамых, трэба памятаць наступнае: а) калі спасылаюцца на прымету паралельнасці прамых, то патрабуецца даказаць паралельнасць некаторых прамых; б) калі спасылаюцца на ўласцівасць паралельных прамых, то паралельныя прамыя ўжо дадзены, і трэба выкарыстаць нейкую іх уласцівасць.

А цяпер выканайце **Заданне 1** і **Заданне 2**.

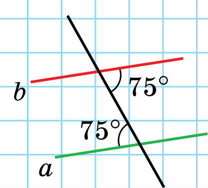
Заданне 1

На кантрольнай рабоце Саша рашаў задачу: «Выкарыстаўшы рысунак, знайдзіце вугал α, калі $a \parallel b$». Ён запісаў: «Вугал α роўны 80° па прымеце паралельнасці прамых». Ці мае рацыю Саша? Калі не, то на якую тэарэму трэба спаслацца?



Заданне 2

Маша рашала задачу: «Па вуглах на рысунку высветліце, як размешчаны прамыя a і b». Яна запісала: «$a \parallel b$ па ўласцівасці паралельных прамых». Ці мае рацыю Маша? Калі не, то на якую тэарэму трэба спаслацца?

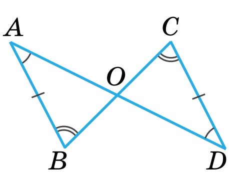


Заданні да § 17

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

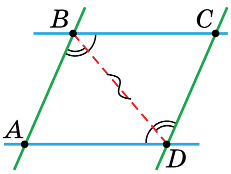
Задача 1. *Даказаць, што калі адрэзкі AB і CD роўныя і паралельныя, а адрэзкі AD і BC перасякаюцца ў пункце O, то трохвугольнікі AOB і DOC роўныя.*



Рыс. 199

Доказ. Вуглы BAD і CDA роўныя як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AB і CD і сякучай AD (рыс. 199). Вуглы ABC і DCB роўныя як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AB і CD і сякучай BC. Тады $\triangle AOB = \triangle DOC$ па старане і двух прылеглых да яе вуглах. Што і трэба было даказаць.

Задача 2. ***Даказаць, што адрэзкі паралельных прамых, змешчаныя паміж дзвюма іншымі паралельнымі прамымі, якія іх перасякаюць, роўныя паміж сабой.***

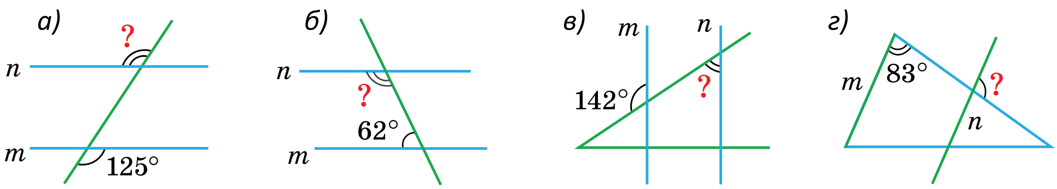


Рыс. 200

Доказ. Няхай $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$ (рыс. 200). Дакажам, што $AB = CD$, $BC = AD$. Правядзём адрэзак BD. У трохвугольнікаў ABD і CDB старана BD — агульная, $\angle ABD = \angle CDB$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых AB і CD і сякучай BD, $\angle ADB = \angle CBD$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых BC і AD і сякучай BD. Тады трохвугольнікі роўныя па старане і двух прылеглых да яе вуглах. З роўнасці трохвугольнікаў вынікае, што $AB = CD$, $BC = AD$. Што і трэба было даказаць.

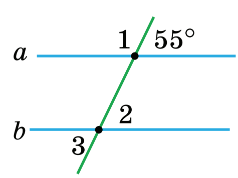
РАШАЕМ САМАСТОЙНА

145. На рысунку 201 $m \parallel n$. Знайдзіце велічыню вугла, абазначанага пытальнікам.



Рыс. 201

146. На рысунку 202 $a \parallel b$. Знайдзіце суму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

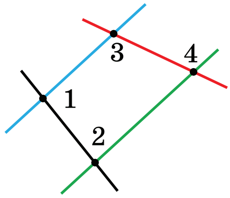


Рыс. 202

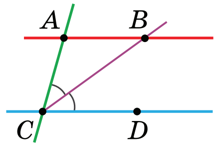
147. На рысунку 203 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 + \angle 4 = 240°$. Знайдзіце вугал 4.

148. На рысунку 204 $AB \parallel CD$, CB — бісектрыса вугла ACD, $AC = 14$ см, $BC = 22$ см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка ABC.

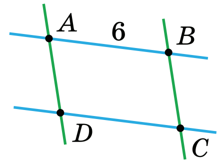
149. На рысунку 205 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $AB = 6$ см, перыметр чатырохвугольніка $ABCD$ роўны 20 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AD.



Рыс. 203



Рыс. 204



Рыс. 205

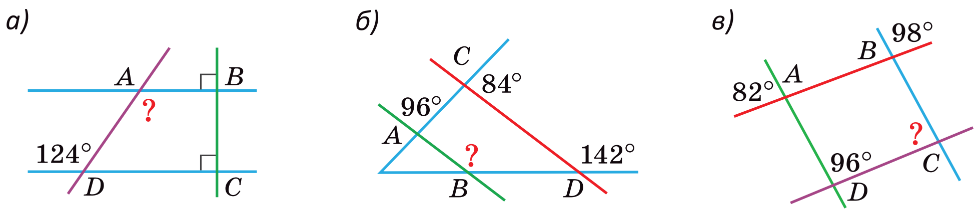
150. Унутраныя аднастароннія вуглы пры дзвюх паралельных прамых і сякучай адносяцца як 2 : 3. Знайдзіце большы з гэтых вуглоў.

151. Адзін з унутраных аднастаронніх вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай на 40° меншы за другі. Знайдзіце меншы з гэтых вуглоў.

152. У трохвугольніку ABC правялі бісектрысу BK, а з вяршыні C — прамую, паралельную BK, якая перасякае прадаўжэнне стараны AB у пункце E. Дакажыце, што трохвугольнік BEC раўнабедраны.

153. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка $ABCD$ $AB = CD$, $AB \parallel CD$, то $BC \parallel AD$.

154. Знайдзіце вугал, абазначаны пытальнікам (рыс. 206).



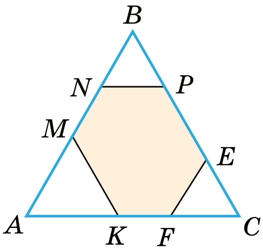
Рыс. 206

155. На бісектрысе вугла ABC адзначаны пункт K, на старане BC — пункт M такі, што $KM \parallel AB$, $\angle BKM = 36°$. Знайдзіце вугал CMK.

156. Канцы адрэзка AB ляжаць на паралельных прамых a і b. Пункт O — сярэдзіна адрэзка AB. Дакажыце, што любы іншы адрэзак з канцамі на прамых a і b, які праходзіць праз пункт O, дзеліцца ім папалам.

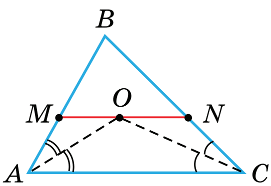
157. Дакажыце, што прамая, якая перасякае бакавую старану раўнабедранага трохвугольніка і паралельна яго аснове, адсякае ад яго раўнабедраны трохвугольнік.

158. На рысунку 207 трохвугольнік ABC — роўнастаронні з перыметрам 36 см, $MK \parallel BC$, $NP \parallel AC$, $EF \parallel AB$ і $KM + MN + NP = PE + EF + FK$. Знайдзіце перыметр шасцівугольніка $KMNPEF$.



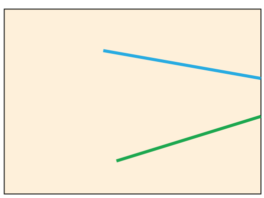
Рыс. 207

159*. На рысунку 208 $MN \parallel AC$. Дакажыце, што калі O — пункт перасячэння бісектрыс вуглоў A і C, то $AM + CN = MN$. Знайдзіце даўжыню стараны AC, калі перыметр трохвугольніка ABC роўны 34 см, а перыметр трохвугольніка MBN — 26 см.



Рыс. 208

160*. Дзве прамыя перасякаюцца ў пункце, што ляжыць па-за межамі аркуша (рыс. 209). Як можна вымераць вугал паміж гэтымі прамымі, выкарыстаўшы чарцёжны трохвугольнік і транспарцір?


Рыс. 209

161*. Дакажыце, што калі ў чатырохвугольніка процілеглыя стораны паралельныя, то яго процілеглыя вуглы роўныя паміж сабой.

162*. Дакажыце, што калі $AB \parallel CD$, то:

а) $\angle AEC = \angle 1 + \angle 2$;
б) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$ (рыс. 210).

Рыс. 210

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Аксіёму паралельных прамых.
2. Тэарэму аб дзвюх прамых, паралельных трэцяй.
3. Уласцівасці накрыжлеглых, адпаведных і аднастаронніх вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай.

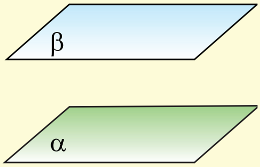
Умеем

1. Даказваць тэарэму аб дзвюх прамых, паралельных трэцяй.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці накрыжлеглых вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай.
3. Даказваць тэарэму аб уласцівасці адпаведных вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай.
4. Даказваць тэарэму аб уласцівасці аднастаронніх вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай.

Геаметрыя 3D

Дзве плоскасці называюцца паралельнымі, калі яны не маюць агульных пунктаў (не перасякаюцца).

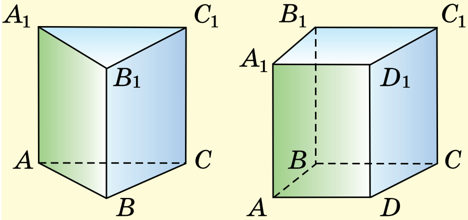
Калі плоскасці α і β паралельныя, то пішуць: $\alpha \parallel \beta$ (рыс. 211).



Рыс. 211

Пазнаёмімся з яшчэ адным мнагаграннікам — *прызмай* (рыс. 212). У прызмы дзве грані (асновы) — роўныя многавугольнікі, якія ляжаць у паралельных плоскасцях, а астатнія грані (бакавыя) — паралелаграмы (гл. задачу 137).

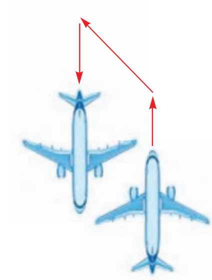
У *прамой прызмы* бакавыя грані — прамавугольнікі, бакавыя канты перпендыкулярныя да плоскасцей асноў і роўныя паміж сабой. На рысунку 212 паказаны трохвугольная і чатырохвугольная прамыя прызмы. У іх паралельныя плоскасці верхняй і ніжняй граней. Перанясіце відарысы прызм у сшытак. Пакажыце, якія грані гэтых прызм з’яўляюцца нябачнымі.



Рыс. 212

Задача. *Колькі дроту пойдзе на выраб каркаса прамой трохвугольнай прызмы $ABCA_1B_1C_1$, у якой усе канты роўны па 12 см?*

Мадэляванне



Пасажырскі самалёт ляцеў строга на поўнач. Затым, не мяняючы вышыні, ён змяніў курс, павярнуўшы налева на 45°. Хутка экіпажу паступіла каманда ляцець на поўдзень. На колькі градусаў пілот павінен у другі раз павярнуць самалёт, каб ляцець патрэбным курсам на поўдзень? Зрабіце чарцёж, пазначыўшы становішча самалёта пунктамі. Прапануйце некалькі спосабаў знаходжання адказу.

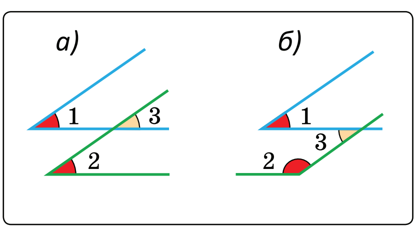
П. В. Сухі

Цікава ведаць. У гісторыі авіяцыі значнае месца займае выдатны авіяканструктар Павел Восіпавіч Сухі (1895—1975), які нарадзіўся і вырас у г. Глыбокае (Віцебская вобласць). У канструктарскім бюро Сухога было створана больш за 50 канструкцый грамадзянскіх і ваенных самалётаў. П. В. Сухі сапраўды з'яўляецца гонарам зямлі беларускай.

Пры дапамозе **Інтэрнэту** высвятліце, якую школу і з якімі вынікамі скончыў П. В. Сухі, якую атрымаў адукацыю пасля школы, у якім горадзе працаваў настаўнікам матэматыкі і кім быў яго бацька.

§ 18*. Вуглы з адпаведна паралельнымі і адпаведна перпендыкулярнымі старанамі

Тэарэма (аб вуглах з адпаведна паралельнымі старанамі).
Вуглы з адпаведна паралельнымі старанамі або роўныя (калі абодва вострыя ці абодва тупыя), або ў суме складаюць 180° (калі адзін востры, а другі тупы).

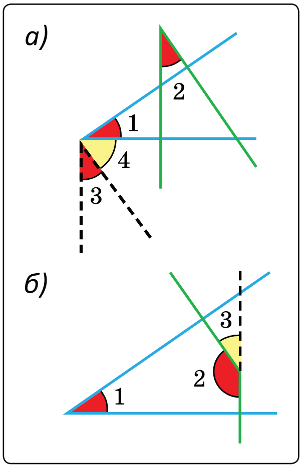


Рыс. 213

Доказ. 1) Вострыя вуглы 1 і 2 — гэта вуглы з адпаведна паралельнымі старанамі (рыс. 213, *а*). Выкарыстаўшы рысунак, дакажыце самастойна, што вуглы 1 і 2 роўныя.

2) Востры вугал 1 і тупы вугал 2 (рыс. 213, *б*) — гэта вуглы з адпаведна паралельнымі старанамі. Выкарыстаўшы гэты рысунак і вынік пункта 1), дакажыце, што сума вуглоў 1 і 2 роўна 180°.

Тэарэма (аб вуглах з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі).
Вуглы з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі або роўныя (калі абодва вострыя ці абодва тупыя), або ў суме складаюць 180° (калі адзін востры, а другі тупы).



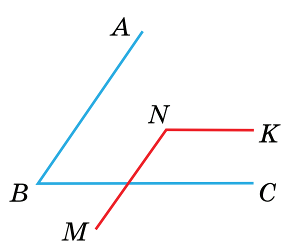
Рыс. 214

Доказ. 1) Вострыя вуглы 1 і 2 — гэта вуглы з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі (рыс. 214, *а*). Пабудуем востры вугал 3 у вяршыні вугла 1, стораны якога паралельныя старанам вугла 2. Стораны вугла 3 перпендыкулярныя да старон вугла 1 (прамая, перпендыкулярная да адной з паралельных прамых, перпендыкулярная і да другой прамой). Па папярэдняй тэарэме $\angle 2 = \angle 3$. Паколькі вугал 1 і вугал 3 дапаўняюць вугал 4 да 90°, то $\angle 1 = \angle 3$. Значыць, $\angle 1 = \angle 2$.

2) Востры вугал 1 і тупы вугал 2 — гэта вуглы з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі (рыс. 214, *б*). Выкарыстаўшы гэты рысунак і вынік пункта 1), дакажыце самастойна, што сума вуглоў 1 і 2 роўна 180°.

Заданні да § 18

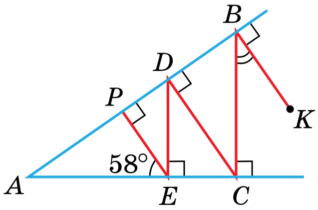
РАШАЕМ САМАСТОЙНА



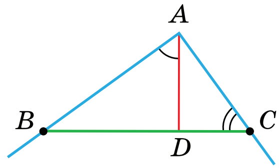
Рыс. 215

163. На рысунку 215 $AB \parallel MN$, $BC \parallel NK$ і $\angle ABC : \angle MNK = 1 : 2$. Знайдзіце $\angle MNK$.

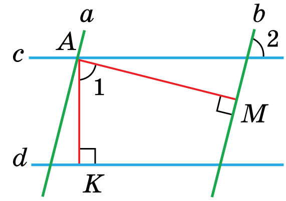
164. На рысунку 216 $KB \perp AB$, $BC \perp AC$, $CD \perp AB$, $DE \perp AC$, $EP \perp AB$, $\angle AEP = 58°$. Знайдзіце $\angle KBC$.



Рыс. 216



Рыс. 217



Рыс. 218

165. Два вуглы з узаемна паралельнымі старанамі адносяцца як 2 : 7. Знайдзіце, на колькі градусаў адзін з іх большы за другі.

166. На старанах вугла A, роўнага 90°, адзначаны пункты B і C (рыс. 217). З пункта A на прамую BC апушчаны перпендыкуляр AD. Сума вуглоў ACB і DAB роўна 138°. Знайдзіце вугал ACB.

167. Дакажыце, што калі $a \parallel b$, $c \parallel d$, $AM \perp b$, $AK \perp d$, то $\angle 1 = \angle 2$ (рыс. 218).

168. У вуглоў ABC і MNK $AB \parallel MN$, $BC \perp NK$. Высветліце, як могуць быць звязаны градусныя меры вуглоў ABC і MNK. Разгледзьце ўсе варыянты.

169. Дакажыце, што прамыя AB і CD, размешчаныя на каардынатнай плоскасці, паралельныя, калі $A(-2; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; -4)$, $D(4; -1)$.

170*. Высветліце, ці правільнае сцверджанне: «Калі два вуглы роўныя і якія-небудзь дзве іх стараны паралельныя, то і дзве іншыя стараны гэтых вуглоў паралельныя».

171*. Высветліце, ці правільнае сцверджанне: «Калі два вуглы роўныя і якія-небудзь дзве іх стараны перпендыкулярныя, то і дзве іншыя стараны гэтых вуглоў перпендыкулярныя».

ЗАПАМІНАЕМ

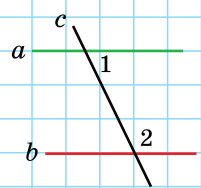
1. Прыметы паралельнасці прамых: «Калі пры перасячэнні дзвюх прамых сякучай накрыжлеглыя вуглы роўныя, або адпаведныя вуглы роўныя, або сума аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя паралельныя».

2. Уласцівасці паралельных прамых: «Калі паралельныя прамыя перасечаны сякучай, то накрыжлеглыя вуглы роўныя, адпаведныя вуглы роўныя і сума аднастаронніх вуглоў роўна 180°».
3. На плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой.
4. На плоскасці дзве прамыя, паралельныя трэцяй, паралельныя паміж сабой.
5. Прамая, перпендыкулярная да адной з дзвюх паралельных прамых, перпендыкулярна і да другой прамой.
6*. Вуглы з адпаведна паралельнымі старанамі або роўныя, або ў суме складаюць 180°.
7*. Вуглы з адпаведна перпендыкулярнымі старанамі або роўныя, або ў суме складаюць 180°.

Правяраем сябе

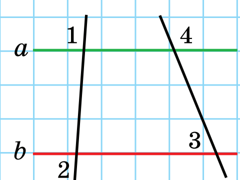
Заданне 1

Вядома, што $a \parallel b$ і $\angle 1$ на $50°$ меншы за $\angle 2$. Знайдзіце $\angle 1$.



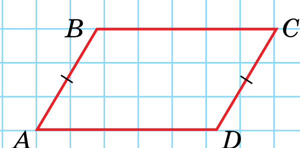
Заданне 2

Знайдзіце $\angle 4$, калі вядома, што $\angle 1 = 96°$, $\angle 2 = 84°$, $\angle 3 = 76°$.



Заданне 3

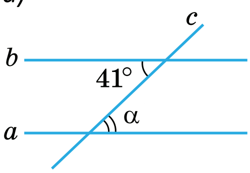
Дакажыце, што калі $AB = CD$ і $AB \parallel CD$, то $BC = AD$ і $BC \parallel AD$.



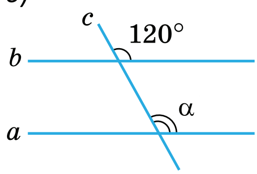
Падрыхтоўка да кантрольнай работы 3

1. На рысунках *а)*—*в)* прамыя a і b паралельныя. Знайдзіце вугал α.

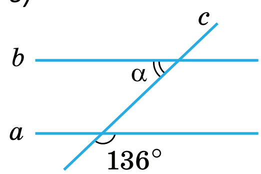
а)



б)

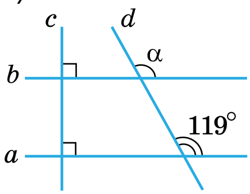


в)

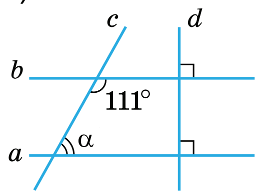


2. Прамыя a і b перасечаны прамымі c і d. Знайдзіце вугал α.

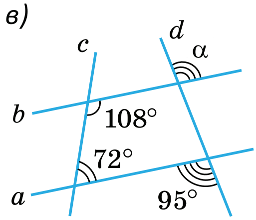
а)



б)



в)

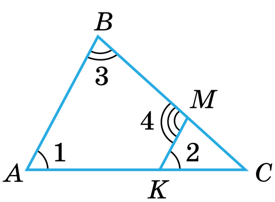


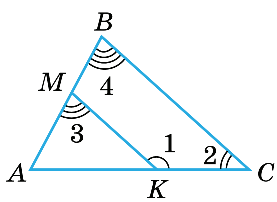
3. Знайдзіце $\angle 4$, калі:

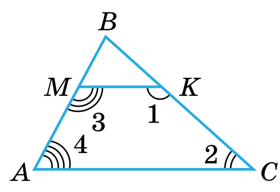
а) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 72°$;

б) $\angle 1 = 138°$, $\angle 2 = 42°$, $\angle 3 = 75°$;

в) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = 122°$.





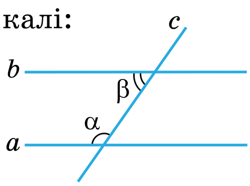


4. $a \parallel b$. Знайдзіце вугал β, калі:

а) $\alpha = 2\beta$;

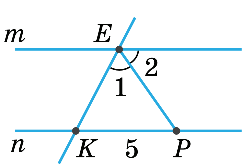
б) $\alpha : \beta = 2 : 3$;

в) $\alpha - \beta = 70°$.

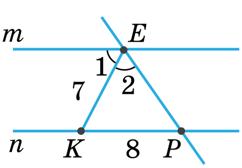


5. Дадзена: $m \parallel n$, $\angle 1 = \angle 2$. Знайдзіце EK.

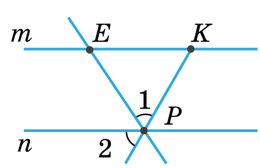
а)



б)



в) $EP + EK = 12$



Глава IV

Сума вуглоў трохвугольніка

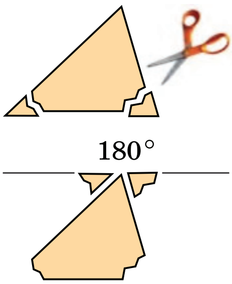
У гэтай главе вы даведаецеся:

- Які вугал называецца знешнім вуглом трохвугольніка
- У чым заключаецца няроўнасць трохвугольніка
- Аб пяці прыметах роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў
- Аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла
- Аб уласцівасці катэта, які ляжыць супраць вугла ў 30°

§ 19. Сума вуглоў трохвугольніка

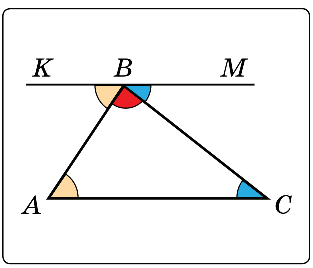
Блез Паскаль

Вялікі французскі вучоны XVII ст. Блез Паскаль (1623—1662) яшчэ ў дзяцінстве любіў вывучаць геаметрычныя фігуры, адкрываць іх уласцівасці. Вымяраючы вуглы транспарцірам, юны даследчык заўважыў, што ў любога трохвугольніка сума вуглоў адна і тая ж — 180°. «Як жа гэта растлумачыць?» — думаў Паскаль. Тады ён адрэзаў у трохвугольніка два вугалкі і прыклаў іх да трэцяга (рыс. 219). Атрымаўся разгорнуты вугал, які, як вядома, роўны 180°. Гэта было яго першае ўласнае адкрыццё! Далейшы лёс хлопчыка быў прадвызначаны.



Рыс. 219

Тэарэма. **Сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°.**



Рыс. 220

Дадзена: $\triangle ABC$ (рыс. 220).

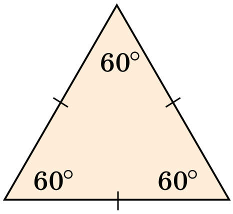
Даказаць: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Доказ. Праз вяршыню B трохвугольніка ABC правядзём прамую KM, паралельную старане AC. Тады $\angle KBA = \angle A$ як унутраныя накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых KM і AC і сякучай AB, а $\angle MBC = \angle C$ як унутраныя накрыжлеглыя вуглы пры паралельных прамых KM і AC і сякучай BC. Паколькі вуглы KBA, ABC і MBC утвараюць разгорнуты вугал, то $\angle KBA + \angle ABC + \angle MBC = 180°$. Адсюль $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

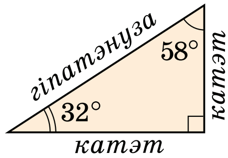
Тэарэма даказана.

Вынікі.

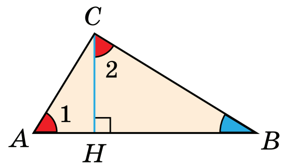
1. *Кожны вугал роўнастаронняга трохвугольніка роўны* 60° (рыс. 221).



Рыс. 221



Рыс. 222



Рыс. 223

2. *Сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна* 90° (рыс. 222).

У прамавугольным трохвугольніку стораны, якія змяшчаюць прамы вугал, называюцца *катэтамі*, старана, процілеглая прамому вуглу, — *гіпатэнузай* (гл. рыс. 222).

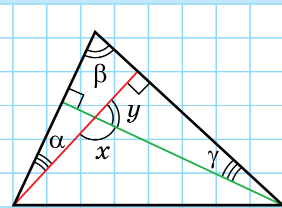
Правядзём у прамавугольным трохвугольніку *ABC* вышыню *CH* да гіпатэнузы *AB* (рыс. 223). Паколькі ў трохвугольніку *ABC* вугал 1 дапаўняе вугал *B* да 90°, а ў трохвугольніку *CHB* вугал 2 таксама дапаўняе вугал *B* да 90°, то $\angle 1 = \angle 2$.

Даказана ўласцівасць: «*Вугал паміж вышынёй прамавугольнага трохвугольніка, праведзенай да гіпатэнузы, і катэтам роўны вуглу паміж другім катэтам і гіпатэнузай*».

А цяпер выканайце **Заданне**.

Заданне

У трохвугольніку правялі дзве вышыні, вугал α роўны 20°. Знайдзіце вуглы β, γ, y, x.

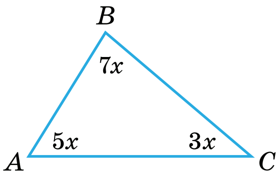


Заданні да § 19

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У трохвугольніку ABC градусныя меры вуглоў A, B і C адносяцца адпаведна як* 5 : 7 : 3. *Знайсці вуглы трохвугольніка* (рыс. 224).

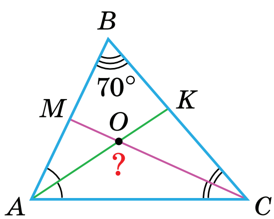


Рыс. 224

Р а ш э н н е. Няхай $\angle A = 5x$, $\angle B = 7x$, $\angle C = 3x$ (x — градусная мера адной часткі). Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна $180°$, то $5x + 7x + 3x = 180°$, $15x = 180°$, $x = \frac{180°}{15} = 12°$. Тады $\angle A = 5 \cdot 12° = 60°$, $\angle B = 7 \cdot 12° = 84°$, $\angle C = 3 \cdot 12° = 36°$.

А д к а з: $\angle A = 60°$, $\angle B = 84°$, $\angle C = 36°$.

Задача 2. *У трохвугольніку ABC* (рыс. 225) *вугал B роўны* $70°$, *AK і CM — бісектрысы, O — пункт іх перасячэння. Знайсці вугал AOC паміж бісектрысамі.*



Рыс. 225

Р а ш э н н е. Сума вуглоў A і C трохвугольніка ABC роўна $180° - 70° = 110°$. Паколькі бісектрыса дзеліць вугал папалам, то $\angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) = \frac{1}{2} \cdot 110° = = 55°$.

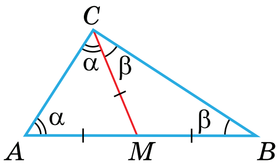
З трохвугольніка AOC знаходзім:

$\angle AOC = 180° - 55° = 125°$.

А д к а з: $125°$.

Заўвага. Калі $\angle B = \beta$, то, разважаючы аналагічна, атрымаем формулу: $\angle AOC = 90° + \frac{\beta}{2}$. Калі, напрыклад, $\angle B = 60°$, то $\angle AOC = 90° + \frac{60°}{2} = 120°$.

Задача 3. *Даказаць, што калі медыяна трохвугольніка роўна палове стараны, да якой яна праведзена, то дадзены трохвугольнік — прамавугольны.*

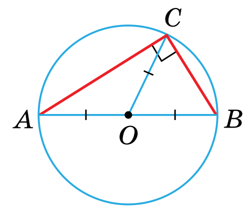


Рыс. 226

Д о к а з. Няхай CM — медыяна трохвугольніка ABC і $CM = \frac{1}{2}AB$ (рыс. 226). Дакажам, што $\angle ACB = 90°$. Абазначым $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Паколькі медыяна дзеліць старану папалам, то $AM = MB = \frac{1}{2}AB$. Тады $CM = AM = MB$. Паколькі $\triangle AMC$ — раўнабедраны, то $\angle A = \angle ACM = \alpha$ як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Аналагічна, $\triangle CMB$ — раўнабедраны і $\angle B = \angle BCM = \beta$.

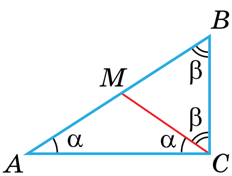
Сума вуглоў трохвугольніка ABC, з аднаго боку, роўна $2\alpha + 2\beta$, з другога — роўна $180°$. Адсюль $2\alpha + 2\beta = 180°$, $2(\alpha + \beta) = 180°$, $\alpha + \beta = 90°$. Але $\angle ACB = \alpha + \beta$, таму $\angle ACB = 90°$.

Заўвага. Вугал, у якога вяршыня ляжыць на акружнасці, а стораны перасякаюць акружнасць, называецца *ўпісаным*. На рысунку 227 гэта вугал ACB. З задачы 3 вынікае ўласцівасць: «*Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, — прамы*». Дакажыце гэту ўласцівасць самастойна.



Рыс. 227

Задача 4. *Даказаць, што ў прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы.*

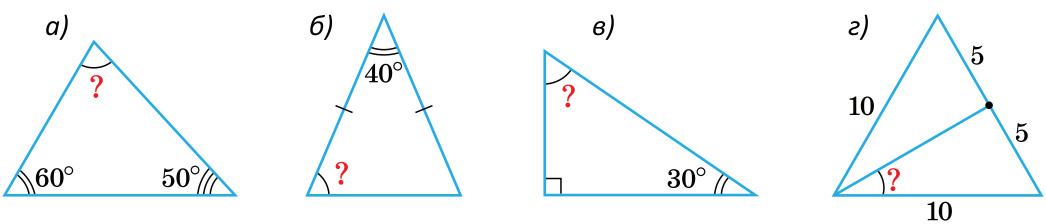


Рыс. 228

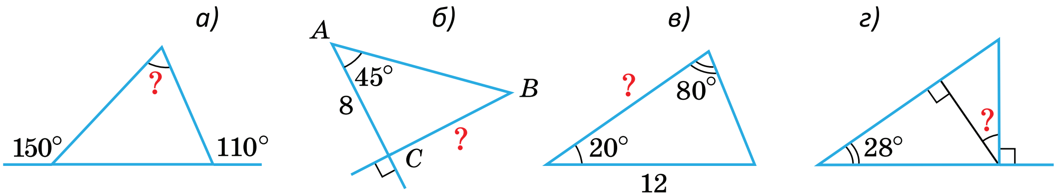
Доказ. Няхай у трохвугольніку ABC (рыс. 228) $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Правядзём адрэзак CM так, каб $\angle ACM$ быў роўны α, і дакажам, што CM — медыяна і што $CM = \frac{1}{2}AB$. Вугал B дапаўняе вугал A да $90°$, а $\angle BCM$ дапаўняе $\angle ACM$ да $90°$. Паколькі $\angle ACM = \angle A = \alpha$, то $\angle BCM = \beta$. Трохвугольнікі AMC і BMC — раўнабедраныя па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Тады $AM = MC$ і $MB = MC$. Адсюль CM — медыяна і $CM = \frac{1}{2}AB$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

172. Знайдзіце вугал, абазначаны пытальнікам (рыс. 229).



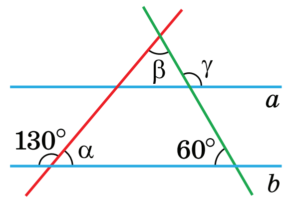
Рыс. 229



Рыс. 230

173. Знайдзіце вугал або старану, абазначаныя пытальнікам (рыс. 230).

174. Вуглы трохвугольніка адносяцца як 1 : 3 : 5. Знайдзіце найбольшы вугал трохвугольніка.



Рыс. 231

175. На рысунку 231 $a \parallel b$. Знайдзіце вуглы α, β і γ. У адказе запішыце значэнне $2\alpha - \beta + \gamma$.

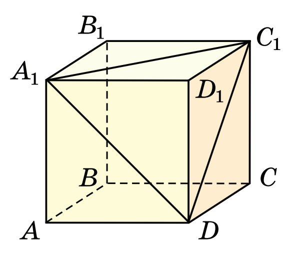
176. Адзін з вуглоў трохвугольніка на 70° меншы за другі і на 40° большы за трэці вугал. Знайдзіце найменшы вугал трохвугольніка.

177. Дакажыце, што бісектрысы ўнутраных аднастаронніх вуглоў пры дзвюх паралельных прамых і сякучай узаемна перпендыкулярныя.

178. Вышыня прамавугольнага трохвугольніка ABC, праведзеная да гіпатэнузы, дзеліць прамы вугал C у адносіне 4 : 5. Знайдзіце вострыя вуглы трохвугольніка ABC.

179. У раўнабедранага трохвугольніка адна са старон роўна 8 см і адзін з вуглоў роўны 60°. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.

180. Дадзены куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рыс. 232). Знайдзіце вуглы ўсіх трохвугольнікаў, якія з’яўляюцца гранямі піраміды $D_1A_1C_1D$.

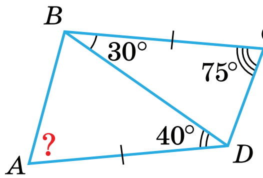


Рыс. 232

181. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC$. На прамені AB адкладзены адрэзак BD за пункт B такі, што $BD = AB$. Дакажыце, што трохвугольнік ACD — прамавугольны.

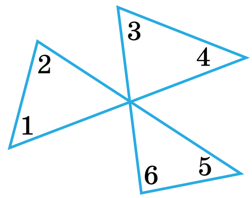
182. Трохвугольнік ABC — раўнабедраны, $AB = BC$, AK — бісектрыса, $AK = BK$. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABC.

183. У чатырохвугольніку $ABCD$ $AD = BC$. Знайдзіце вугал BAD (рыс. 233).



Рыс. 233

184. Тры бісектрысы трохвугольніка ABC перасякаюцца ў пункце O. Вугал OAC роўны 32°. Знайдзіце вугал BOC.



Рыс. 234

185. У востравугольным трохвугольніку ABC вышыні AK і CM перасякаюцца ў пункце H. Дакажыце, што:
а) $\angle BAK = \angle BCM$; б) $\angle B = \angle CHK$;
в) $\angle AHC + \angle B = 180°$.

186*. У трохвугольніку ABC медыяна BK роўна адрэзку AK, $\angle CBK = 24°$. Знайдзіце $\angle A$.

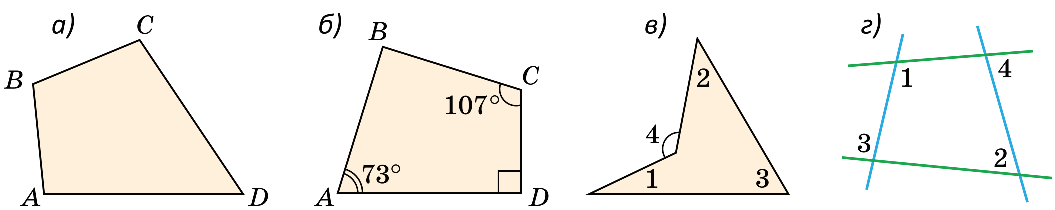
187*. Вугал паміж хордай AB і дыяметрам AC роўны 64°. Знайдзіце вугал паміж хордай BC і гэтым дыяметрам.

188*. Знайдзіце, чаму роўна сума $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$ (рыс. 234).

189*. Унутры квадрата $ABCD$ адзначаны пункт K так, што трохвугольнік AKD роўнастаронні. Знайдзіце вуглы трохвугольніка BKC.

190*. У прамавугольным трохвугольніку з вяршыні прамога вугла праведзены вышыня, бісектрыса і медыяна. Дакажыце, што бісектрыса дзеліць папалам вугал паміж вышынёй і медыянай.

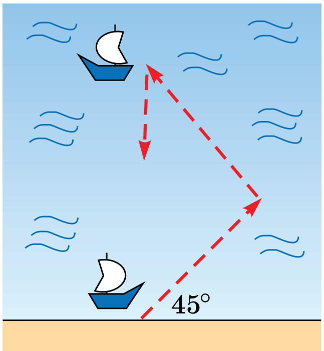
191*. Дакажыце, што: а) сума вуглоў чатырохвугольніка $ABCD$ роўна 360° (рыс. 235, *а*); б) $AB \perp BC$ (рыс. 235, *б*); в) $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ (рыс. 235, *в*); г) $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4$ (рыс. 235, *г*).



Рыс. 235

Рэальная геаметрыя

Яхта выйшла ў мора курсам, які склаў з лініяй берага 45° (рыс. 236). Прайшоўшы 4 км, яна павярнула на 80° улева і прайшла яшчэ 4 км. Пасля гэтага яхта накіравалася ў пункт свайго выхаду. Вызначыце вугал, які склаў курс яхты, што ішла да берага, з лініяй берага.



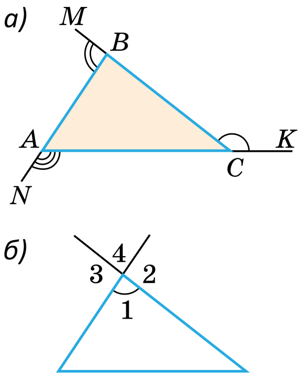
Рыс. 236

Пры дапамозе **Інтэрнэту** знайдзіце цікавыя біяграфічныя факты з жыцця і навуковай дзейнасці вучонага Блеза Паскаля.

§ 20. Знешні вугал трохвугольніка

Вуглы трохвугольніка называюцца яшчэ яго ўнутранымі вугламі. Акрамя ўнутраных вуглоў, у трохвугольніка ёсць і знешнія вуглы.

Азначэнне. **Знешнім вуглом** трохвугольніка называецца вугал, сумежны з яго ўнутраным вуглом.

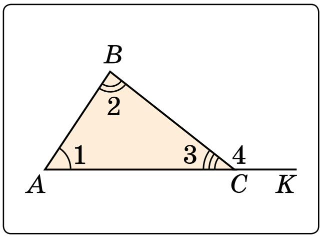


Рыс. 237

На рысунку 237, *а* вуглы BCK, ABM, CAN — знешнія, паколькі кожны з іх з'яўляецца сумежным з адным з унутраных вуглоў трохвугольніка ABC.

Пры кожнай вяршыні трохвугольніка адзін вугал унутраны і два знешнія. На рысунку 237, *б* вугал 1 — унутраны, вуглы 2 і 3 — роўныя знешнія вуглы. Вугал 4 не з'яўляецца знешнім, паколькі ён не з'яўляецца сумежным з унутраным вуглом 1.

Тэарэма. **Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.**



Рыс. 238

Д а д з е н а: $\triangle ABC$, $\angle 4$ — знешні (рыс. 238).
Д а к а з а ц ь: $\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$.
Д о к а з. Паколькі сума вуглоў трохвугольніка роўна $180°$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle 3$. Паколькі сума сумежных вуглоў роўна $180°$, то $\angle 4 = 180° - \angle 3$. Адсюль $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$. Тэарэма даказана.

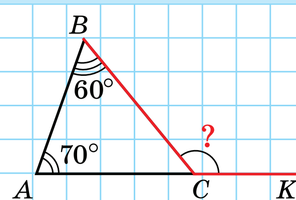
Вынік.

Знешні вугал трохвугольніка большы за любы ўнутраны вугал, не сумежны з ім.

А цяпер выканайце **Заданне**.

Заданне

Знайдзіце $\angle BCK$ двума спосабамі.

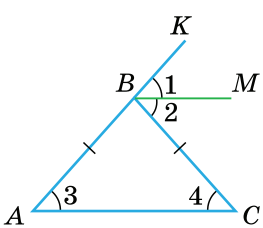


Заданні да § 20

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

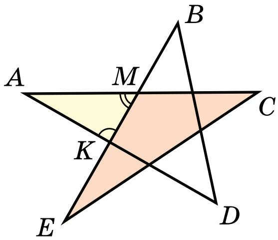
Задача 1. *Даказаць, што бісектрыса знешняга вугла пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка паралельна аснове.*



Рыс. 239

Д о к а з. Няхай дадзены $\triangle ABC$, $AB = BC$, BM — бісектрыса знешняга вугла KBC, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2}\angle KBC$ (рыс. 239). Па ўласцівасці знешняга вугла трохвугольніка $\angle KBC = \angle 3 + \angle 4$. Паколькі $\triangle ABC$ раўнабедраны, то $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle KBC$. Таму $\angle 2 = \angle 4$. Паколькі ўнутраныя накрыжлеглыя вуглы 2 і 4 роўныя (пры прамых BM і AC і сякучай BC), то прамыя BM і AC паралельныя.

Задача 2. *Даказаць, што сума вуглоў A, B, C, D і E «зорачкі» роўна* 180° (рыс. 240).



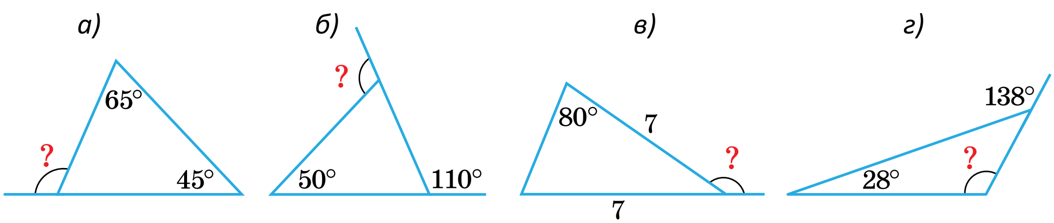
Рыс. 240

Р а ш э н н е. Разгледзім трохвугольнік AMK. Сума яго вуглоў роўна 180°. Вугал AME — знешні для трохвугольніка EMC, таму $\angle AME = \angle C + \angle E$. Аналагічна, вугал AKB — знешні для трохвугольніка KBD, таму $\angle AKB = \angle B + \angle D$.

Паколькі $\angle A + \angle AMK + \angle AKM = 180°$, то $\angle A + (\angle C + \angle E) + (\angle B + \angle D) = 180°$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

192. Знайдзіце вугал, абазначаны пытальнікам (рыс. 241).



Рыс. 241

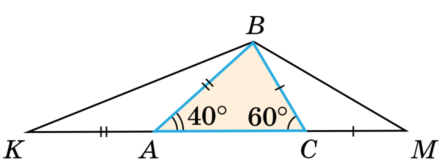
193. Знайдзіце вугал пры аснове раўнабедранага трохвугольніка, калі знешні вугал пры яго вяршыні роўны:

а) 110°; б) 73°; в) α.

194. Вуглы трохвугольніка адносяцца як 2 : 3 : 4. Знайдзіце адносіну адпаведных знешніх вуглоў трохвугольніка, узятых па адным пры кожнай вяршыні.

195. Сума знешняга вугла пры вяршыні раўнабедранага трохвугольніка і ўнутранага вугла пры аснове роўна 216°. Знайдзіце вуглы трохвугольніка.

196. У трохвугольніку ABC $\angle A = 40°$, $\angle C = 60°$, $AK = AB$, $CM = CB$ (рыс. 242). Знайдзіце велічыню найбольшага вугла трохвугольніка KBM.



Рыс. 242

197. Дадзены прамавугольны трохвугольнік ABC, $\angle C = 90°$, CK — вышыня трохвугольніка ABC, CM — бісектрыса трохвугольніка ACK. Дакажыце, што трохвугольнік BMC — раўнабедраны.

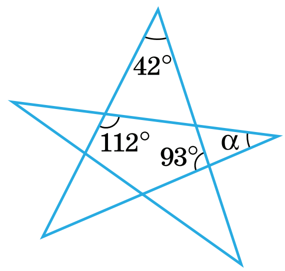
198. У акружнасці з цэнтрам O праведзены дыяметр AB і хорда AC. Дакажыце, што $\angle CAB = \frac{1}{2}\angle COB$.

199*. У трохвугольніку ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 70°$, вышыні AK і CM перасякаюцца ў пункце H. Знайдзіце вугал MHK.

200*. У трохвугольніку ABC бісектрыса BK і вышыня AH перасякаюцца ў пункце O. Вугал AOB у 2 разы большы за вугал ABC. Знайдзіце вугал ABC.

201*. На аснове AC раўнабедранага трохвугольніка ABC адзначаны пункт D, і выявілася, што $AD = BD$, $DC = BC$. Знайдзіце вуглы трохвугольніка ABC.

202*. Знайдзіце $\angle\alpha$ (рыс. 243) (калі на чарцяжы неабходна вылучыць чатыры або больш вуглоў, то іх пазначаюць адной дугой).



Рыс. 243

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

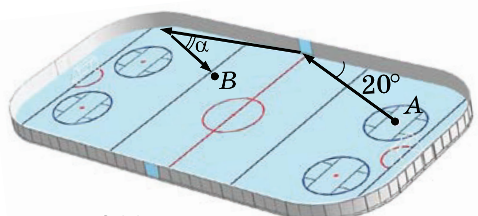
1. Тэарэму аб суме вуглоў трохвугольніка.
2. Уласцівасць вуглоў роўнастаронняга трохвугольніка.
3. Уласцівасць вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка.
4. Азначэнне і ўласцівасць знешняга вугла трохвугольніка.

Умеем

1. Паказваць відарысы знешніх вуглоў дадзенага трохвугольніка.
2. Даказваць тэарэму аб суме вуглоў трохвугольніка.
3. Даказваць тэарэму аб уласцівасці знешняга вугла трохвугольніка.

Рэальная геаметрыя

Хакеіст пасылае шайбу з пункта A пад вуглом 20° да правага борта. Шайба адбіваецца ад борта, трапляе ў зону праціўніка і, адбіўшыся другі раз ад борта за варотамі, выходзіць у пункт B пад удар нападаючага.



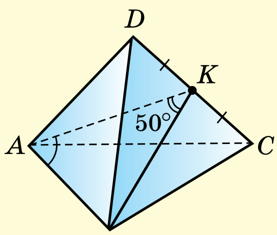
Рыс. 244

Вызначыце вугал α, выкарыстаўшы закон фізікі: вугал падзення роўны вуглу адбіцця. З гэтага закону вынікае, што вугал паміж траекторыяй пасланай шайбы і бортам роўны вуглу паміж траекторыяй адбітай шайбы і гэтым бортам.

Цікава ведаць. У Рэспубліцы Беларусь вялікая ўвага надаецца папулярызацыі хакея. Пры ўдзеле Прэзідэнцкага спартыўнага клуба праходзіць рэспубліканскі турнір аматарскіх падлеткавых каманд «Залатая шайба», міжнародны Калядны турнір на прыз Прэзідэнта Рэспублікі Беларусь.

Геаметрыя 3D

Задача 1. *DABC — правільная трохвугольная піраміда, пункт K — сярэдзіна канта DC,* $\angle AKB = 50°$. *Знайдзіце* $\angle KAB$ (рыс. 245).



Рыс. 245

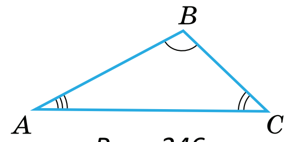
Рашэнне. Паколькі піраміда правільная, то трохвугольнікі ADC і BDC — роўныя раўнабедраныя, $AD = BD$, $BD = CD$, $\angle ADC = \angle BDC$. Тады $\triangle ADK = \triangle BDK$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі. Адсюль $AK = BK$, $\triangle AKB$ — раўнабедраны, $\angle KAB = \dfrac{180° - 50°}{2} = 65°$.

Адказ: 65°.

Задача 2. *Зрабіце чарцёж правільнай піраміды DABC. Адзначце сярэдзіну M канта AD і знайдзіце вуглы трохвугольніка BMC, калі вядома, што* $AB = BM$.

§ 21. Суадносіны паміж старанамі і вугламі трохвугольніка

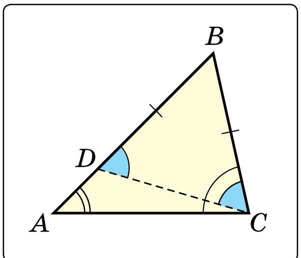
Можна заўважыць, што ў трохвугольніку даўжыні старон звязаны з велічынямі процілеглых вуглоў наступным чынам: большай старане адпавядае большы процілеглы вугал, а меншай старане — меншы. Так, у трохвугольніку ABC старана AC — большая, старана AB — сярэдняя, старана BC — меншая, $\angle B$ — большы, $\angle C$ — сярэдні, $\angle A$ — меншы (рыс. 246). Гэта гіпотэза знаходзіць пацверджанне ў наступнай тэарэме.



Рыс. 246

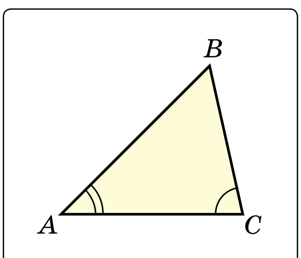
Тэарэма (аб суадносінах паміж старанамі і вугламі ў трохвугольніку).
У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, а супраць большага вугла ляжыць большая старана.

Тэарэма складаецца з двух сцверджанняў. Дакажам кожнае з іх.
1) *У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал.*



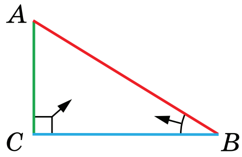
Рыс. 247

Дадзена: $\triangle ABC$, $AB > BC$ (рыс. 247).
Даказаць: $\angle C > \angle A$.
Доказ. На большай старане BA ад вяршыні B адкладзём адрэзак BD, роўны меншай старане BC, і правядзём адрэзак CD. Атрымаем раўнабедраны $\triangle DBC$, у якога вуглы пры аснове роўныя, г. зн. $\angle BDC = \angle BCD$. Але $\angle BDC$ — знешні для трохвугольніка ADC, і таму $\angle BDC$ большы за $\angle A$. Значыць, і $\angle BCD$ большы за $\angle A$. А паколькі $\angle C$ большы за $\angle BCD$, то $\angle C$ і падаўна большы за $\angle A$. Сцверджанне даказана.
2) *У трохвугольніку супраць большага вугла ляжыць большая старана.*



Рыс. 248

Дадзена: $\triangle ABC$, $\angle C > \angle A$ (рыс. 248).
Даказаць: $AB > BC$.
Доказ. Прыменім метад доказу ад адваротнага. Няхай $\angle C > \angle A$, а $AB \leqslant BC$. Калі $AB < BC$, то па першай частцы тэарэмы $\angle C < \angle A$. Атрымалі супярэчнасць з умовай. Калі $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — раўнабедраны, і тады $\angle A = \angle C$. Зноў атрымалі супярэчнасць. Значыць, $AB > BC$. Сцверджанне даказана.



Рыс. 249

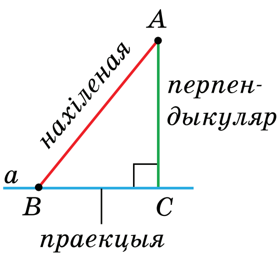
Вынік 1.

Катэт прамавугольнага трохвугольніка меншы за гіпатэнузу.

Вынік 1 справядлівы, паколькі катэт ляжыць супраць вострага вугла, а гіпатэнуза — супраць прамога, які большы за востры (рыс. 249).

А цяпер выканайце **Заданне 1**.

Азначэнне. Калі AC — **перпендыкуляр** да прамой a, пункт B належыць прамой a і не супадае з пунктам C, то адрэзак AB называецца **нахіленай**, праведзенай з пункта A да прамой a (рыс. 250). Пункт B называецца **асновай нахіленай**. Адрэзак BC, які злучае аснову нахіленай і аснову перпендыкуляра, называецца **праекцыяй** нахіленай AB на прамую a.



Рыс. 250

Вынік 2.

Калі з аднаго пункта да прамой праведзены перпендыкуляр і нахіленая, то перпендыкуляр і праекцыя нахіленай меншыя за гэту нахіленую.

Вынік 2 справядлівы, паколькі ў прамавугольным трохвугольніку катэт меншы за гіпатэнузу.

Азначэнне. **Адлегласцю ад пункта да прамой** называецца даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта на прамую.

Калі пункт ляжыць на прамой, то гэта адлегласць роўна 0.

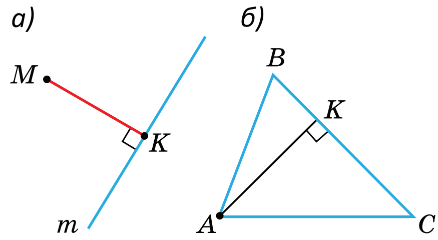
З выніка 2 выцякае, што даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з дадзенага пункта на прамую, — гэта найменшая з адлегласцей ад дадзенага пункта да пунктаў прамой.

На рысунку 251, *а* адлегласць ад пункта M да прамой m роўна даўжыні перпендыкуляра MK.

Адлегласць ад вяршыні A трохвугольніка ABC да прамой BC, якая змяшчае процілеглую старану, роўна вышыні AK трохвугольніка (рыс. 251, *б*).

У матэматыцы за адлегласць паміж фігурамі прымаецца найменшая з адлегласцей паміж пунктамі гэтых фігур.

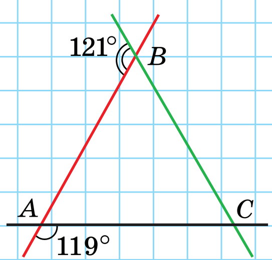
А цяпер выканайце **Заданне 2**.



Рыс. 251

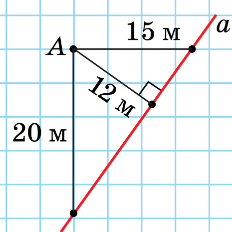
Заданне 1

У $\triangle ABC$ вызначыце большую старану.



Заданне 2

Знайдзіце адлегласць ад пункта A да прамой a.

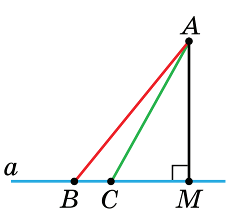


Заданні да § 21

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Адрэзак AM — перпендыкуляр да прамой a. Пункты B і C ляжаць на прамой a па адзін бок ад пункта M* (рыс. 252). *Даказаць, што калі $CM < BM$, то $AC < AB$.*

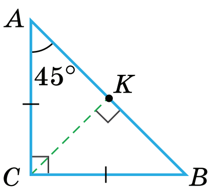


Рыс. 252

Доказ. Паколькі $\triangle AMC$ — прамавугольны, то $\angle ACM$ — востры. Тады сумежны да яго вугал ACB — тупы. У трохвугольніку ABC вугал ACB — большы, таму $\angle ACB > \angle ABC$. Паколькі ў трохвугольніку супраць большага вугла ляжыць большая старана, то $AC < AB$. Што і трэба было даказаць.

Заўвага. Рышыўшы дадзеную задачу пры ўмове, што пункты B і C ляжаць на прамой a па розныя бакі ад пункта M, вы дакажаце ўласцівасць: «*Калі нахіленыя праведзены з аднаго пункта да адной прамой, то большай праекцыі адпавядае большая нахіленая, а меншай — меншая*».

Задача 2. *Дадзены раўнабедраны прамавугольны трохвугольнік з гіпатэнузай 12 см. Знайсці адлегласць ад вяршыні прамога вугла да прамой, якая змяшчае гіпатэнузу.*



Рыс. 253

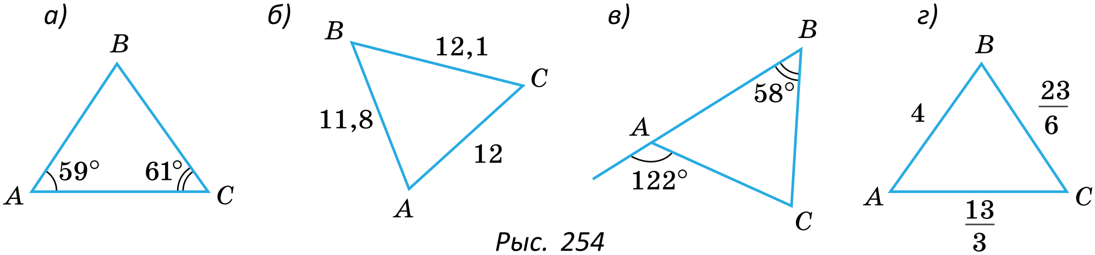
Рашэнне. Няхай у трохвугольніку ABC $AC = BC$, $\angle C = 90°$, $AB = 12$ см (рыс. 253). Па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка $\angle A = \angle B = 45°$. Правядзём вышыню CK. Даўжыня адрэзка CK — шуканая адлегласць. У раўнабедраным трохвугольніку ACB вышыня CK, апушчаная на аснову AB, будзе медыянай і бісектрысай. Таму $AK = KB = \frac{1}{2}AB = 6$ см, $\angle ACK = \frac{1}{2}\angle ACB = 45°$. У прамавугольным $\triangle ACK$ $\angle ACK = \angle CAK = 45°$. Таму $\triangle ACK$ — раўнабедраны і $CK = AK = 6$ см. Адказ: 6 см.

Заўвага. У далейшым будзем карыстацца тым, што вышыня раўнабедранага прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

203. Запішыце стораны і вуглы трохвугольніка ABC у парадку нарастання (рыс. 254).

204. У трохвугольніку ABC, дзе $AB < BC < AC$, адзін з вуглоў у 2 разы меншы за другі і ў 3 разы меншы за трэці. Знайдзіце вугал A.



Рыс. 254

205. Дакажыце, што для нахіленых, праведзеных з аднаго пункта да адной прамой, справядлівае сцверджанне:
а) роўным нахіленым, праведзеным з аднаго пункта да адной прамой, адпавядаюць роўныя праекцыі;
б) большай нахіленай адпавядае большая праекцыя.

206. Трохвугольнік ABC — роўнастаронні, M — унутраны пункт адрэзка BC. Дакажыце, што $AM < AB$.

207. У трохвугольніку MNK медыяна ME роўна 12 см, $\angle NME =$ $= \angle KME$. Знайдзіце адлегласць ад пункта M да прамой KN.

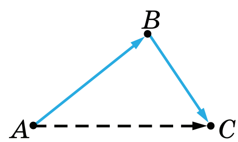
208*. Дакажыце, што сума вышынь трохвугольніка меншая за яго перыметр.

209*. У трохвугольніку ABC ($AB < BC$) BH — вышыня, BM — медыяна. Дакажыце, што:
а) $\angle ABH < \angle CBH$;   б) $\angle ABM > \angle CBM$.

210*. Дакажыце, што калі з адной вяршыні нераўнабедранага трохвугольніка правесці вышыню, медыяну і бісектрысу, то бісектрыса будзе ляжаць паміж вышынёй і медыянай.

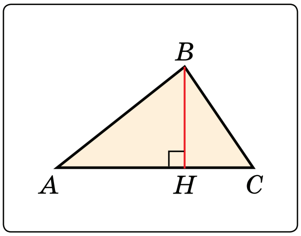
§ 22. Няроўнасць трохвугольніка

Вопыт нам падказвае, што шлях з пункта A ў пункт C па прамой AC карацейшы, чым па ломанай ABC (рыс. 255), г. зн. $AC < AB + BC$. Дакажам гэта.



Рыс. 255

> Тэарэма (аб няроўнасці трохвугольніка).
> **Любая старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон.**



Рыс. 256

Дадзена: $\triangle ABC$ (рыс. 256).
Даказаць: $AC < AB + BC$, $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$.
Доказ. Няхай AC — найбольшая старана трохвугольніка ABC. Правядзём вышыню BH. З прамавугольнага трохвугольніка AHB вынікае $AH < AB$ (катэт меншы за

гіпатэнузу). Аналагічна з трохвугольніка CHB вынікае $HC < BC$. Склаўшы няроўнасці, атрымаем $AH + HC < AB + BC$. Адкуль $AC < AB + BC$. Дзве іншыя няроўнасці $AB < AC + BC$ і $BC < AC + AB$ справядлівыя, паколькі AC — найбольшая старана трохвугольніка. Тэарэма даказана.

Для старон a, b і c трохвугольніка можна запісаць няроўнасці: $a < b + c$, $c < a + b$, $b < a + c$. Кожная з трох запісаных няроўнасцей называецца *няроўнасцю трохвугольніка*.

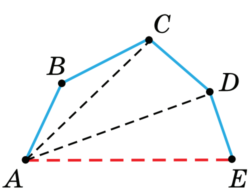
Вынік 1.

Калі для пунктаў A, B і C правільна, што AB = AC + BC, то гэтыя пункты ляжаць на адной прамой. Пры гэтым пункт C ляжыць паміж пунктамі A і B.

Дакажыце вынік 1 самастойна, выкарыстаўшы метад доказу ад адваротнага.

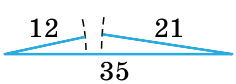
Вынік 2.

Даўжыня адрэзка, які злучае канцы незамкнёнай ломанай, меншая за даўжыню ломанай.



Рыс. 257

На рысунку 257 паказана незамкнёная ломаная $ABCDE$. Дакажам, што $AE < AB + BC + CD + DE$. Злучым пункт A з пунктамі C і D адрэзкамі. Па няроўнасці трохвугольніка $AC < AB + BC$ і $AD < AC + CD$. Значыць, $AD < AB + BC + CD$. Паколькі па няроўнасці трохвугольніка $AE < AD + DE$, то $AE < AB + BC + CD + DE$.



Рыс. 258

Каб даказаць, што дадзеныя тры лікі не могуць быць даўжынямі старон трохвугольніка, дастаткова пераканацца, што большы з гэтых лікаў большы або роўны суме двух іншых лікаў. Напрыклад, трохвугольніка са старанамі 21, 12, 35 не існуе, паколькі не выконваецца няроўнасць трохвугольніка: 35 > 12 + 21 (рыс. 258).

Заўвага. З няроўнасцей трохвугольніка $a < b + c$, $c < a + b$, $b < a + c$ вынікае, што $a - b < c$, $c - a < b$, $b - c < a$, г. зн. любая старана трохвугольніка большая за рознасць дзвюх іншых яго старон. Так, для стараны a справядліва $b - c < a < b + c$.

А цяпер выканайце **Заданне.**

Заданне

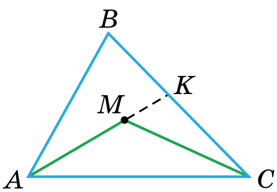
Дзве стараны трохвугольніка роўны 5 см і 7 см. Ці можа перыметр гэтага трохвугольніка быць роўным 25 см?

Заданні да § 22

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

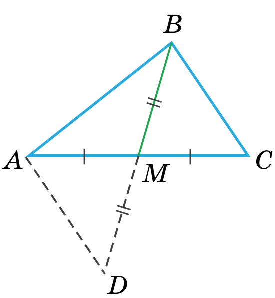
Задача 1. *Унутры трохвугольніка ABC адзначаны пункт M* (рыс. 259). *Даказаць, што перыметр трохвугольніка AMC меншы за перыметр трохвугольніка ABC.*



Рыс. 259

Р а ш э н н е. Паколькі ў $\triangle ABC$ і $\triangle AMC$ старана AC — агульная, то дастаткова даказаць, што $AM + MC < AB + BC$. Прадоўжым старану AM да перасячэння са стараной BC у пункце K. З $\triangle MKC$ па няроўнасці трохвугольніка $MC < MK + KC$. Тады $AM + MC < AK + KC$ (1). З $\triangle ABK$ па няроўнасці трохвугольніка $AK < AB + BK$, значыць, $AK + KC < AB + BC$ (2). З няроўнасцей (1) і (2) вынікае, што $AM + MC < AB + BC$. Сцверджанне даказана.

Задача 2. *Даказаць, што медыяна трохвугольніка меншая за паўсуму дзвюх суседніх старон.*



Рыс. 260

Д о к а з. Дакажам, што для медыяны BM трохвугольніка ABC справядлівая няроўнасць: $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$ (рыс. 260). Прадоўжым медыяну BM на яе даўжыню, $MD = BM$, $BD = 2BM$. Трохвугольнікі AMD і CMB роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў ($\angle AMD = \angle CMB$ як вертыкальныя), адкуль $AD = BC$. У $\triangle ABD$ па няроўнасці трохвугольніка $BD < AB + AD$, г. зн. $2BM < AB + BC$, $BM < \frac{1}{2}(AB + BC)$. Сцверджанне даказана.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

211. Ці з'яўляюцца пункты A, B і C вяршынямі трохвугольніка, калі даўжыні адрэзкаў AB, BC і AC роўныя:
а) 3 см, 5 см, 4 см; б) 10 см, 4 см, 6 см;
в) 5 дм, 62 см, 120 мм?

212. а) У раўнабедраным трохвугольніку адна старана роўна 5 см, другая — 10 см. Знайдзіце перыметр трохвугольніка.
б) Перыметр раўнабедранага трохвугольніка роўны 24 см, адна са старон роўна 6 см. Знайдзіце дзве іншыя стараны.

213. Ці можна з дроту даўжынёй 45 см вырабіць трохвугольнік, дзве стараны якога роўны:
а) 25 см і 10 см; б) 13 см і 7 см?

214. Дакажыце, што не існуе чатырохвугольніка со старанамі 4 м, 2 м, 6 м, 13 м.

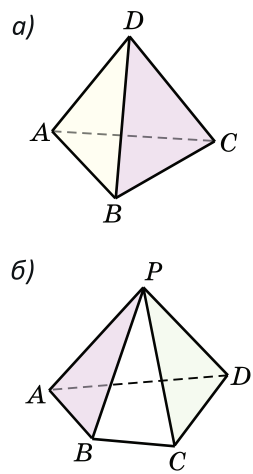
215. Дакажыце, што дыяметр — гэта найбольшая хорда акружнасці.

216*. Дзве стараны трохвугольніка роўны 1 м і 7 м. Знайдзіце перыметр трохвугольніка, калі вядома, што даўжыня трэцяй стараны выражаецца цэлым лікам метраў.

217*. Пункт M рухаецца па старанах трохвугольніка ABC, у якога $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AB = 10$ см. Пры якім становішчы пункта M сума яго адлегласцей да пунктаў A і B будзе:
а) найбольшай; б) найменшай?

218*. Дакажыце, што сума адлегласцей ад любога пункта ўнутры трохвугольніка да трох яго вяршынь большая за паўперыметр трохвугольніка.

219*. Дакажыце, што сума даўжынь бакавых кантаў трохвугольнай піраміды $DABC$ большая за паўперыметр асновы ABC, г. зн. што $DA + DB + DC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ (рыс. 261, *а*). Высветліце, ці будзе аналагічнае сцверджанне правільным для чатырохвугольнай піраміды $PABCD$ (рыс. 261, *б*).



Рыс. 261

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

1. Тэарэму аб суадносінах паміж старанамі і вугламі ў трохвугольніку.
2. Суадносіны катэта і гіпатэнузы, перпендыкуляра і нахіленай.
3. Азначэнне адлегласці ад пункта да прамой.
4. У чым заключаецца няроўнасць трохвугольніка.

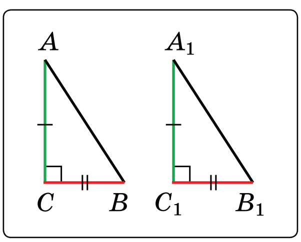
Умеем

1. Па даўжынях старон трохвугольніка вызначаць, які яго вугал з'яўляецца найбольшым, а які — найменшым. Па велічынях вуглоў вызначаць, якая старана трохвугольніка найбольшая, якая — найменшая.
2. Даказваць, што катэт меншы за гіпатэнузу.
3*. Даказваць тэарэму аб суадносінах паміж старанамі і вугламі ў трохвугольніку.
4*. Даказваць тэарэму аб няроўнасці трохвугольніка.

§ 23. Прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў

Вы ўжо ведаеце тры прыметы роўнасці трохвугольнікаў. Паколькі часта даводзіцца мець справу з прамавугольнымі трохвугольнікамі, то вылучаюць пяць прымет роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў. Сфармулюем і дакажам іх.

Першая прымета (па двух катэтах).
Калі катэты аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўны двум катэтам другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



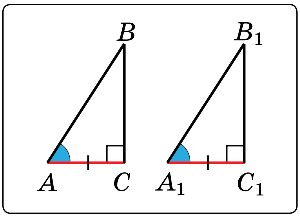
Рыс. 262

Дадзена: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (рыс. 262).

Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доказ.
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па дзвюх старанах і вугле паміж імі.

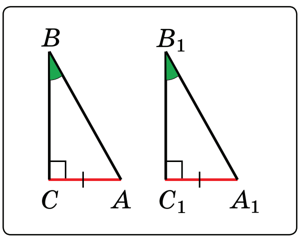
Другая прымета (па катэце і прылеглым вострым вугле).
Калі катэт і прылеглы да яго востры вугал аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўны катэту і прылегламу да яго востраму вуглу другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 263

Дадзена: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рыс. 263).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ.
$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па старане і двух прылеглых да яе вуглах.

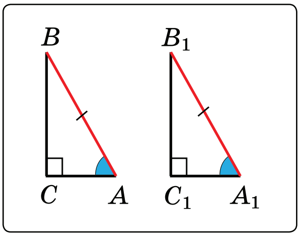
Трэцяя прымета (па катэце і процілеглым вострым вугле).
Калі катэт і процілеглы востры вугал аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўны катэту і процілегламу востраму вуглу другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 264

Дадзена: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рыс. 264).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ.
Сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна $90°$. З роўнасці вуглоў $\angle B$ і $\angle B_1$ вынікае, што $\angle A = \angle A_1$. Тады $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па старане і двух прылеглых да яе вуглах.

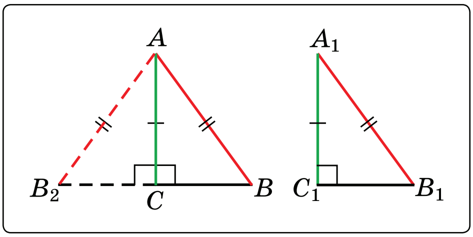
Чацвёртая прымета (па гіпатэнузе і вострым вугле).
Калі гіпатэнуза і востры вугал аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўны гіпатэнузе і востраму вуглу другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 265

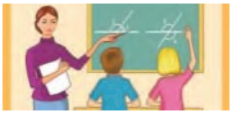
Дадзена: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рыс. 265).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ. Сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна 90°. З таго, што $\angle A = \angle A_1$, вынікае, што $\angle B = \angle B_1$. Тады $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па старане і двух прылеглых да яе вуглах.

Пятая прымета (па катэце і гіпатэнузе).
Калі катэт і гіпатэнуза аднаго прамавугольнага трохвугольніка адпаведна роўны катэту і гіпатэнузе другога прамавугольнага трохвугольніка, то такія трохвугольнікі роўныя.



Рыс. 266

Дадзена: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (рыс. 266).
Даказаць: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
Доказ. Прыкладзём трохвугольнік $A_1B_1C_1$ да трохвугольніка ABC так, каб сумясціліся роўныя катэты A_1C_1 і AC, а вяршыні B_1 і B ляжалі па розныя бакі ад прамой AC. Трохвугольнік $A_1B_1C_1$ зойме становішча трохвугольніка AB_2C. Паколькі $\angle B_2CB$ — разгорнуты і $AB_2 = AB$, то трохвугольнік B_2AB — раўнабедраны, катэт AC — яго вышыня. Па ўласцівасці раўнабедранага трохвугольніка вышыня, праведзеная да асновы, будзе і медыянай. Тады $B_2C = CB$ і трохвугольнікі ABC і AB_2C роўныя па двух катэтах. Адсюль $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

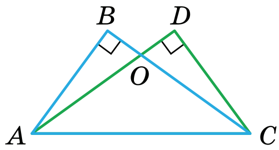


Заданні да § 23

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *На рысунку 267 $\angle B = \angle D = 90°$, $BC = AD$. Даказаць роўнасць трохвугольнікаў:*
а) ABC і CDA; *б) AOB і COD.*

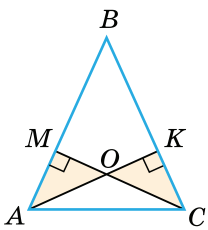


Рыс. 267

Доказ. а) Разгледзім прамавугольныя трохвугольнікі ABC і CDA. У іх гіпатэнуза AC — агульная, катэты AD і BC роўныя па ўмове. Тады $\triangle ABC = \triangle CDA$ па катэце і гіпатэнузе.

б) З роўнасці трохвугольнікаў ABC і CDA (даказана ў пункце а)) вынікае роўнасць старон AB і CD. Тады $\triangle AOB = \triangle COD$ па катэце ($AB = CD$) і процілеглым вострым вугле ($\angle AOB = \angle COD$ як вертыкальныя).

Задача 2. *Дадзены трохвугольнік ABC, AK і CM — яго вышыні, праведзеныя да бакавых старон, O — пункт іх перасячэння* (рыс. 268). *Даказаць, што калі трохвугольнікі AOM і COK роўныя, то трохвугольнік ABC — раўнабедраны.*

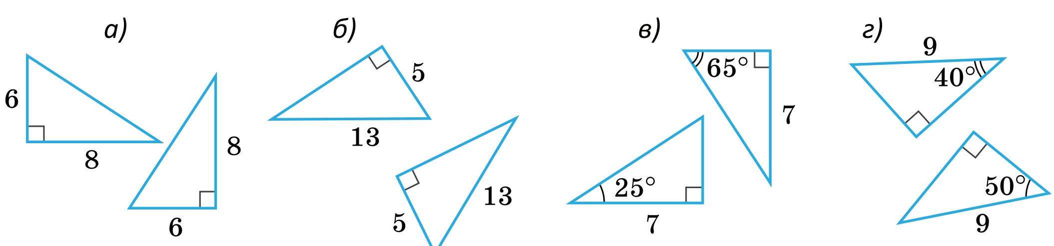


Рыс. 268

Доказ. Паколькі $\angle AOM = \angle COK$ як вертыкальныя, то $\angle MAO = \angle KCO$ (сума вострых вуглоў прамавугольнага трохвугольніка роўна $90°$). З роўнасці трохвугольнікаў AOM і COK вынікае роўнасць гіпатэнуз AO і CO. Трохвугольнік AOC — раўнабедраны, $\angle OAC = \angle OCA$ як вуглы пры аснове раўнабедранага трохвугольніка. Тады $\angle BAC = \angle BCA$ як састаўленыя з роўных вуглоў. Трохвугольнік ABC раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Што і трэба было даказаць.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

220. Вызначыце, па якой прымеце роўныя прамавугольныя трохвугольнікі (рыс. 269).



Рыс. 269

221. Дакажыце, што: а) у раўнабедраным трохвугольніку вышыні, праведзеныя да бакавых старон, роўныя паміж сабой; б) калі ў трохвугольніку роўныя дзве вышыні, то ён раўнабедраны.

222. Дакажыце, што вяршыні A і C трохвугольніка ABC роўнааддалены ад прамой, якая праходзіць праз медыяну BM.

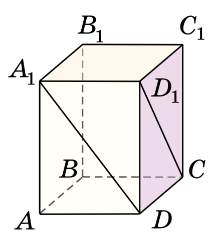
223. На старанах вугла A адзначаны пункты M і K так, што $AM = AK = 12$ см. Адлегласць ад пункта M да прамой AK роўна 8 см. Знайдзіце адлегласць ад пункта K да прамой AM.

224. Дакажыце, што роўныя хорды адной акружнасці знаходзяцца на аднолькавай адлегласці ад яе цэнтра. Сфармулюйце адваротнае сцверджанне і дакажыце яго.

225. Дадзены вугал BAC. На старане AC адзначаны пункт E. Праз пункт E праведзена прамая, перпендыкулярная да бісектрысы вугла BAC, якая перасякае прамень AB у пункце F, а бісектрысу — у пункце G. Знайдзіце перыметр трохвугольніка AFE, калі $AE = 12$ см, а $FG = 4$ см.

226. Вышыні востравугольнага трохвугольніка ABC, праведзеныя з вяршынь A і C, перасякаюцца ў пункце H. Дакажыце, што калі $AH = CH$, то трохвугольнік ABC раўнабедраны.

227*. У аснове прамавугольнага паралелепіпеда ляжыць квадрат $ABCD$ з плошчай 36 см^2 (рыс. 270). Перыметр трохвугольніка DD_1C роўны 24 см. Дыяганаль A_1D грані AA_1D_1D роўна 10 см. Знайдзіце плошчу поўнай паверхні паралелепіпеда (суму плошчаў усіх граней).



Рыс. 270

228*. Адзначце на каардынатнай плоскасці пункты $A(-4; 4)$, $B(2; 8)$, $C(6; 2)$ і дакажыце, што трохвугольнік ABC — раўнабедраны і прамавугольны.

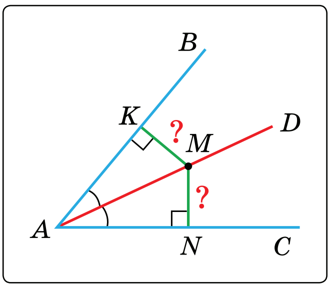
229*. У востравугольным трохвугольніку ABC вышыні BN і CK перасякаюцца ў пункце H. Знайдзіце вугал C трохвугольніка ABC, калі $CH = AB$.

§ 24. Уласцівасць пунктаў бісектрысы вугла

Па азначэнні бісектрыса вугла дзеліць вугал папалам. У бісектрысы ёсць яшчэ адна важная ўласцівасць.

Тэарэма (аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла). **Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла. Калі пункт унутры вугла роўнааддалены ад старон вугла, то ён ляжыць на бісектрысе гэтага вугла.**

У дадзенай тэарэме два сцверджанні: прамое і яму адваротнае. Дакажам кожнае з гэтых сцверджанняў асобна.

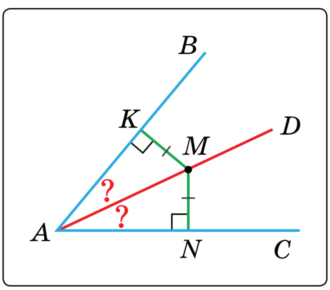


Рыс. 271

1) Дадзена: AD — бісектрыса $\angle BAC$, $M \in AD$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$ (рыс. 271).

Даказаць: $MK = MN$.

Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі AKM і ANM роўныя па гіпатэнузе і вострым вугле (гіпатэнуза AM — агульная, $\angle KAM = \angle NAM$, паколькі AD — бісектрыса). Катэты MK і MN роўныя як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках.



Рыс. 272

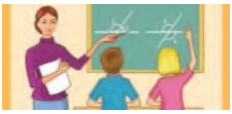
2) Дадзена: $\angle BAC$, $MK \perp AB$, $MN \perp AC$, $MK = MN$, $M \in AD$ (рыс. 272).

Даказаць: прамень AD — бісектрыса $\angle BAC$.

Доказ. Прамавугольныя трохвугольнікі AKM і ANM роўныя па катэце і гіпатэнузе (гіпатэнуза AM — агульная, $MK = MN$ па ўмове). Вуглы KAM і NAM роўныя як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках, адкуль прамень AD — бісектрыса $\angle BAC$.

Тэарэма даказана.

З даказанай тэарэмы вынікае, што *бісектрыса з'яўляецца геаметрычным месцам пунктаў плоскасці, якія знаходзяцца ўнутры вугла і роўнааддалены ад старон вугла*.

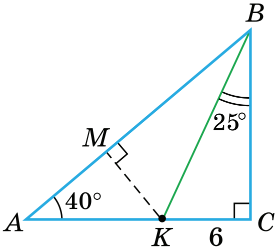


Заданні да § 24

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку ABC* $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$ (рыс. 273). *На катэце AC адзначаны пункт K так, што KC = 6 см і* $\angle KBC = 25°$. *Знайсці адлегласць ад пункта K да прамой AB.*

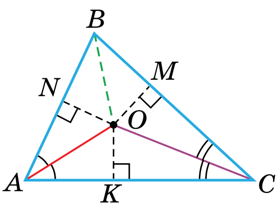


Рыс. 273

Рашэнне. Шуканая адлегласць роўна даўжыні перпендыкуляра KM да прамой AB. Паколькі $\angle ABC = 90° - \angle A = 90° - 40° = 50°$, то $\angle ABK = 50° - 25° = 25°$. Значыць, BK — бісектрыса вугла ABC. Паколькі любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла, то $KM = KC = 6$ см.

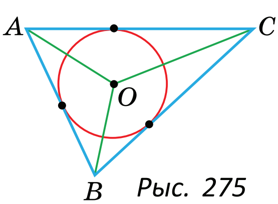
Адказ: 6 см.

Задача 2 (2-і адметны пункт трохвугольніка). *Даказаць, што бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.*



Рыс. 274

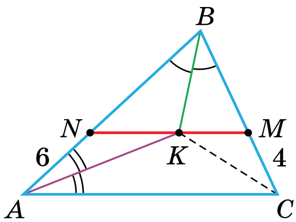
Доказ. Правядзём у $\triangle ABC$ бісектрысы вуглоў A і C. Няхай O — пункт іх перасячэння (рыс. 274). Паколькі пункт O ляжыць на бісектрысе AO вугла A, то ён роўнааддалены ад старон вугла A, г. зн. роўныя перпендыкуляры ON і OK да старон вугла A. Паколькі пункт O ляжыць на бісектрысе CO вугла C, ён роўнааддалены ад старон вугла C, г. зн. роўныя перпендыкуляры OK і OM да старон вугла C. Тады $OK = OM = ON$. Паколькі перпендыкуляры ON і OM роўныя, то пункт O роўнааддалены ад старон вугла B. Пункт, роўнааддалены ад старон вугла, ляжыць на бісектрысе гэтага вугла. Таму бісектрыса вугла B пройдзе праз пункт O, і, значыць, усе тры бісектрысы перасякуцца ў адным пункце.



Рыс. 275

Заўвага. Пункт перасячэння бісектрыс трохвугольніка з'яўляецца цэнтрам упісанай у яго акружнасці (рыс. 275), якая датыкаецца да ўсіх трох старон трохвугольніка (мае з кожнай са старон толькі адзін агульны пункт).

Задача 3. *У трохвугольніку ABC бісектрысы вуглоў A і B перасякаюцца ў пункце K. Праз пункт K праведзены адрэзак NM, паралельны старане AC з канцамі на старанах AB і BC адпаведна; AN = 6 см, MC = 4 см. Знайсці адрэзак NM.*



Рыс. 276

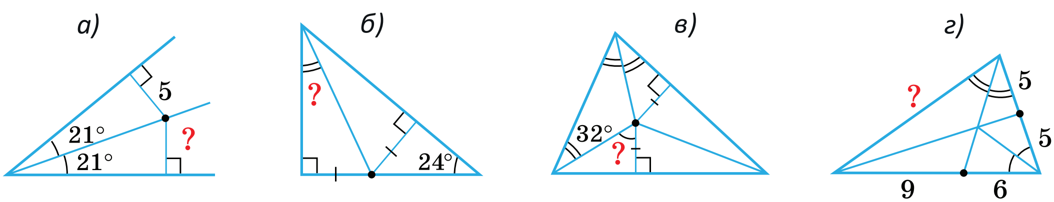
Рашэнне. Паколькі бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце, то CK — бісектрыса вугла C (рыс. 276). Разгледзім трохвугольнік ANK: $\angle NAK = \angle CAK$, паколькі AK — бісектрыса, $\angle CAK = \angle AKN$ як накрыжлеглыя пры паралельных прамых NM і AC і сякучай AK, адкуль $\angle NAK = \angle AKN$ і трохвугольнік ANK — раўнабедраны па прымеце раўнабедранага трохвугольніка. Тады $NK = AN = 6$ см. Аналагічна даказваем, што трохвугольнік KMC — раўнабедраны і $KM = MC = 4$ см. Шуканы адрэзак $NM = NK + KM = 6 + 4 = 10$ (см).

Адказ: 10 см.

Заўвага. З разважанняў, прыведзеных пры рашэнні задачы 3, вынікае, што калі $NM \parallel AC$ і адрэзак NM праходзіць праз пункт перасячэння бісектрыс, то перыметр трохвугольніка NBM роўны $AB + BC$.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

230. Знайдзіце адрэзак або вугал, абазначаныя пытальнікам (рыс. 277).



Рыс. 277

231. Пункт K знаходзіцца на роўнай адлегласці ад старон вугла BAC, роўнага $52°$. Знайдзіце вугал AKB, калі $KB \perp AB$.

232. Дадзены трохвугольнік ABC, у якога $AC = BC$. На яго старане AC адзначаны пункт M, роўнааддалены ад прамых AB і BC, $\angle ABM = 35°$. Знайдзіце вугал C.

233. У прамавугольным трохвугольніку ABC з вяршыні прамога вугла C праведзена бісектрыса CE. З пункта E на стораны CA і CB апушчаны адпаведна перпендыкуляры EK і EM. Знайдзіце перыметр чатырохвугольніка $KCME$, калі $EK = 7{,}5$ см.

234. Дакажыце, што адлегласці ад сярэдзіны асновы раўнабедранага трохвугольніка да прамых, якія праходзяць праз бакавыя стораны, роўныя паміж сабой.

235. У трохвугольніку ABC бісектрысы AK і CM перасякаюцца ў пункце O так, што $AO = CO$. Дакажыце, што прамыя BO і AC перпендыкулярныя.

236*. У трохвугольніку ABC бісектрысы, праведзеныя з вяршынь B і C, і медыяна, праведзеная з вяршыні A, перасякаюцца ў пункце O, $\angle BOC = 130°$. Знайдзіце $\angle ABC$.

237*. Дадзены вугал BAC, AK — яго бісектрыса. Пункт M ляжыць унутры вугла BAK. Дакажыце, што адлегласць ад пункта M да прамой AB меншая за адлегласць ад пункта M да прамой AC.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

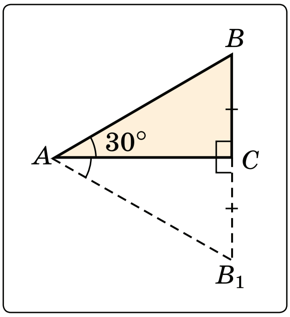
1. Пяць прымет роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
2. Тэарэму аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла.

Умеем

1. Даказваць прыметы роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці пунктаў бісектрысы вугла.

§ 25. Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°

Тэарэма (аб катэце, які ляжыць супраць вугла ў 30°). **Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палове гіпатэнузы.**



Рыс. 278

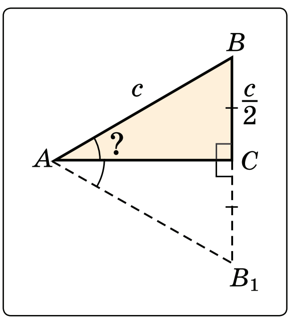
Д а д з е н а: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рыс. 278).

Д а к а з а ц ь: $BC = \frac{1}{2}AB$.

Д о к а з. На прамені BC адкладзём адрэзак CB_1, роўны адрэзку BC. Паколькі $\triangle AB_1C = \triangle ABC$ па двух катэтах (катэт AC — агульны), то $\angle B_1AC = \angle BAC = 30°$, $\angle BAB_1 = 60°$. Але $\angle B = \angle B_1 = 60°$ (з $\triangle ABC$ і $\triangle AB_1C$). Вядома (гл. задачу 89), што калі ў трохвугольніка ўсе вуглы роўныя, то ён роўнастаронні. Адсюль $\triangle ABB_1$ — роўнастаронні, $AB = BB_1$, $BC = \frac{1}{2}BB_1 = \frac{1}{2}AB$. Тэарэма даказана.

Правільнае і сцверджанне, адваротнае дадзенаму. Дакажам яго.

Тэарэма. **Калі ў прамавугольным трохвугольніку катэт роўны палове гіпатэнузы, то гэты катэт ляжыць супраць вугла ў 30°.**



Рыс. 279

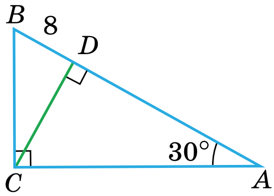
Д о к а з. Няхай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $AB = c$, $BC = \frac{c}{2}$ (рыс. 279). Дакажам, што $\angle BAC = 30°$. Прадоўжым катэт BC на яго даўжыню: $CB_1 = BC$. З роўнасці прамавугольных трохвугольнікаў ACB_1 і ACB (па двух катэтах) вынікае, што $AB_1 = AB = BB_1 = c$. Значыць, $\triangle ABB_1$ — роўнастаронні, усе яго вуглы роўны па 60°, а яго вышыня AC з'яўляецца бісектрысай. Таму $\angle BAC = 30°$. Што і трэба было даказаць.

Заданні да § 25

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У прамавугольным трохвугольніку ABC, у якога* $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, *праведзена вышыня CD. Знайсці адрэзак AD, калі BD = 8 см.*



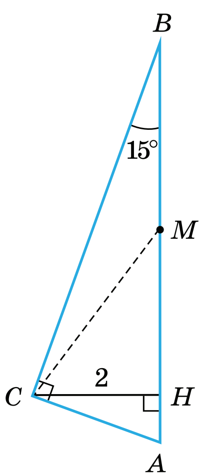
Рыс. 280

Р а ш э н н е. Паколькі вугал A і вугал BCD дапаўняюць вугал B да 90°, то $\angle BCD =$ $= \angle A = 30°$ (рыс. 280). У прамавугольным трохвугольніку CDB катэт BD ляжыць супраць вугла ў 30°. Таму $CB = 2BD = 16$ см. У трохвугольніку ABC катэт BC ляжыць супраць вугла ў 30°. Таму $AB = 2BC = 32$ см. Адсюль $AD = AB - BD = 32 - 8 = 24$ (см).

А д к а з: 24 см.

Заўвага. Мы даказалі, што $BC = 2BD$, $AB = 2BC = 4BD$, $AD = AB -$ $- BD = 3BD$, г. зн. у прамавугольным трохвугольніку з вуглом 30° вышыня дзеліць гіпатэнузу ў адносіне 1 : 3.

Задача 2. *Дадзены прамавугольны трохвугольнік з вуглом* 15°. *Вышыня, праведзеная да гіпатэнузы, роўна* 2 *см. Знайсці гіпатэнузу.*



Рыс. 281

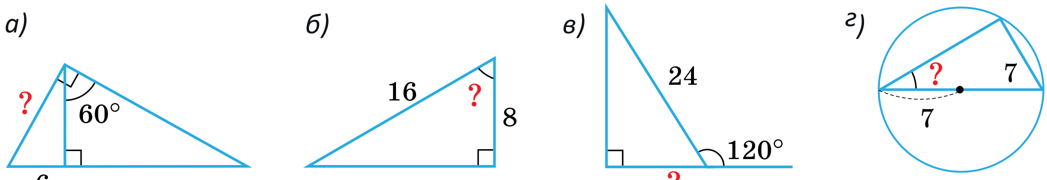
Р а ш э н н е. Няхай у трохвугольніку ABC $\angle ACB = 90°$, $\angle B = 15°$, $CH = 2$ см — вышыня (рыс. 281). Трэба знайсці AB.

Правядзём медыяну CM трохвугольніка ABC. Паколькі ў прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы, то $CM = MB$. Трохвугольнік CMB — раўнабедраны, $\angle MCB = \angle CBM = 15°$, $\angle AMC$ — яго знешні вугал. Па ўласцівасці знешняга вугла $\angle AMC = \angle MCB + \angle MBC = 15° + 15° = 30°$. У прамавугольным трохвугольніку CHM катэт CH ляжыць супраць вугла ў 30°, таму ён роўны палове гіпатэнузы CM. Адсюль $CM = 2CH = 4$ см, $AB = 2CM = 8$ см.

А д к а з: 8 см.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

238. Знайдзіце адрэзак або вугал, абазначаныя пытальнікам (рыс. 282). Адказ растлумачце.



Рыс. 282

239. У прамавугольным трохвугольніку ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB + BC = 111$ см. Знайдзіце AB.

240. У трохвугольніку ABC праведзена бісектрыса BK. Сума адлегласцей ад пункта K да прамых BA і BC роўна 19 см, $\angle C = 30°$. Знайдзіце KC.

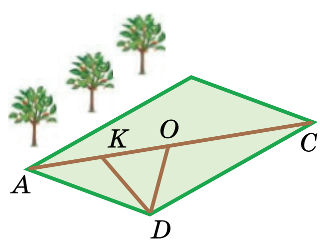
241. У прамавугольным трохвугольніку ABC да гіпатэнузы AB праведзена медыяна CM. Знайдзіце вугал паміж прамымі CM і AB, калі $BC = 7{,}5$ см, $AB = 15$ см.

242. У раўнабедраным трохвугольніку ABC ($AB = BC$) $\angle B = 120°$, вышыня AH роўна 16 см. Знайдзіце аснову AC.

243. У трохвугольніку ABC праведзены вышыня BH і медыяна BM, $BM = \frac{1}{2}AC$, $\angle A = 60°$, $HM = 24$ см. Знайдзіце HC.

244. Сума двух вуглоў трохвугольніка роўна трэцяму, а два меншыя вуглы адносяцца як 1 : 2. Большая старана роўна 48 см. Знайдзіце даўжыні адрэзкаў, на якія вышыня, апушчаная з вяршыні большага вугла трохвугольніка, дзеліць процілеглую старану.

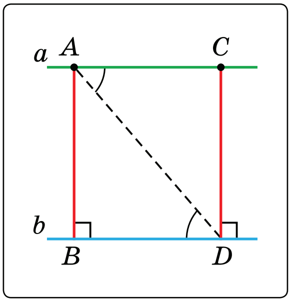
245*. Зялёны газон мае форму прамавугольніка (рыс. 283). Дарожка AC утварае вугал 30° са стараной DC, дарожка DO праходзіць праз сярэдзіну дарожкі AC. Дарожка DK перпендыкулярна дарожцы AC, $KO = 8$ м. Знайдзіце даўжыню дэкаратыўнага плота, які агароджвае трохвугольны ўчастак AOD.



Рыс. 283

§ 26. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі

Тэарэма (аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі).
Усе пункты адной з дзвюх паралельных прамых роўнааддалены ад другой прамой.



Рыс. 284

Дадзена: $a \parallel b$, $A \in a$, $C \in a$, $AB \perp b$, $CD \perp b$ (рыс. 284).
Даказаць: $AB = CD$.
Доказ. Па ўласцівасці паралельных прамых $\angle ACD = 90°$. Правядзём адрэзак AD. Вуглы CAD і BDA роўныя як унутраныя накрыжлеглыя пры паралельных прамых a і b і сякучай AD. Прамавугольныя трохвугольнікі ABD і ACD роўныя па гіпатэнузе (AD — агульная) і вострым вугле ($\angle CAD = \angle BDA$). Адкуль $AB = CD$. Тэарэма даказана.

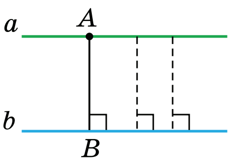
Вынік.

Усе пункты, якія ляжаць у адной паўплоскасці адносна дадзенай прамой і роўнааддалены ад гэтай прамой, ляжаць на прамой, паралельнай дадзенай.

Доказ. Няхай перпендыкуляры AB і CD да прамой b роўныя (гл. рыс. 284). Прамая a, якая праходзіць праз пункт A паралельна прамой b, будзе перасякаць прамень DC у некаторым пункце C_1. Па тэарэме аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі $C_1D = AB$. Але $CD = AB$ па ўмове. Значыць, пункт C супадае з пунктам C_1 і ляжыць на прамой a, паралельнай прамой b. Сцверджанне даказана.

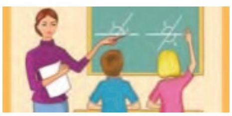
З прычыны таго што прамая, перпендыкулярная да адной з дзвюх паралельных прамых, будзе перпендыкулярна і да другой прамой, перпендыкуляр AB да прамой b будзе перпендыкулярам і да прамой a (гл. рыс. 285). Таму такі перпендыкуляр называюць *агульным перпендыкулярам* дзвюх паралельных прамых.

Азначэнне. **Адлегласцю паміж паралельнымі прамымі** называецца адлегласць ад любога пунта адной з гэтых прамых да другой прамой.



Рыс. 285

Калі $a \parallel b$, $A \in a$ і $AB \perp b$, то адлегласць паміж прамымі a і b роўна даўжыні перпендыкуляра AB (рыс. 285). Даказаная тэарэма гарантуе, што адлегласць ад усіх пунктаў адной з паралельных прамых да другой прамой аднолькавая.

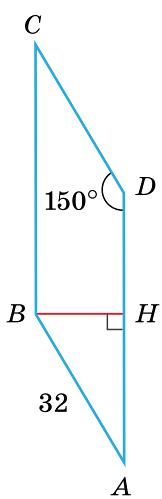


Заданні да § 26

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *У чатырохвугольніку $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AB = 32$ см, $\angle ADC = 150°$. Знайсці адлегласць паміж прамымі AD і BC.*



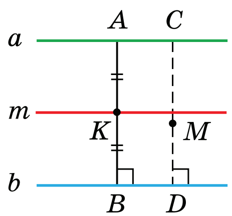
Рыс. 286

Рашэнне. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$ як сума ўнутраных аднастаронніх вуглоў пры паралельных прамых AB і CD і сякучай AD (рыс. 286). Тады $\angle BAD = 180° - 150° = 30°$.

Адлегласць паміж паралельнымі прамымі вымяраецца даўжынёй перпендыкуляра, апушчанага з любога пункта адной з прамых на другую прамую. Апусцім перпендыкуляр BH на прамую AD. У прамавугольным трохвугольніку ABH катэт BH ляжыць супраць вугла ў 30°. Таму ён роўны палове гіпатэнузы. Значыць, $BH = \frac{1}{2}AB = 16$ см.

Адказ: 16 см.

Задача 2. *Знайсці геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад дзвюх дадзеных паралельных прамых.*



Рыс. 287

Рашэнне. 1) Няхай a і b — дадзеныя паралельныя прамыя (рыс. 287). Праз сярэдзіну K перпендыкуляра AB правядзём прамую m, паралельную прамой a. Па тэарэме аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі ўсе пункты прамой m роўнааддалены ад прамых a і b на адлегласць $\frac{1}{2}AB$.

2) Няхай некаторы пункт M (гл. рыс. 287) роўнааддалены ад прамых a і b. Правядзём праз пункт M прамую CD, перпендыкулярную b, дзе CD — агульны перпендыкуляр прамых a і b. Пункт M ляжыць унутры паласы, абмежаванай прамымі a і b (дакажыце гэта самастойна). Паколькі $CM = MD$, то $MD = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}AB = KB$. Па выніку з тэарэмы аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі пункты K і M ляжаць на прамой KM, паралельнай прамой b. Але праз пункт K праходзіць адзіная прамая m, паралельная b. Значыць, пункт M належыць прамой m.

Такім чынам, усе пункты прамой m роўнааддалены ад прамых a і b. І любы роўнааддалены ад іх пункт ляжыць на прамой m. Прамая m, якая праходзіць праз сярэдзіну агульнага перпендыкуляра прамых a і b, — шуканае геаметрычнае месца пунктаў.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

246. Прамая a паралельна прамой b, прамая c паралельна прамой b. Адлегласць паміж a і b роўна 3 см, а паміж b і c — 5 см. Чаму можа быць роўна адлегласць паміж прамымі a і c? Разгледзьце ўсе варыянты.

247. Дзве паралельныя прамыя перасякаюцца сякучай у пунктах A і B. Прамая AB утварае з адной з паралельных прамых вугал 30°. Адлегласць паміж гэтымі паралельнымі прамымі роўна 8,5 см. Знайдзіце даўжыню адрэзка AB.

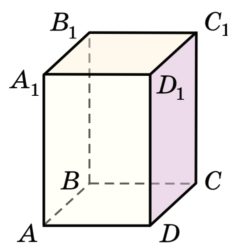
248. Дакажыце, што прамая, роўнааддаленая ад дзвюх дадзеных паралельных прамых, дзеліць папалам любы адрэзак з канцамі на гэтых паралельных прамых.

249. Праз вяршыню B раўнабедранага трохвугольніка ABC праведзена прамая b, паралельная аснове AC. Знайдзіце адлегласць паміж прамой b і прамой AC, калі вядома, што $\angle ABC = 120°$, $AB + BC = 64$ см.

250. Праз вяршыню A раўнабедранага трохвугольніка ABC з асновай AC праведзена прамая a, паралельная бакавой старане BC. Знайдзіце бакавую старану трохвугольніка ABC, калі адлегласць паміж прамымі a і BC роўна 19 см і $\angle BAC = 15°$.

251. У акружнасці з цэнтрам у пункце O і радыусам 8,1 см праведзены дыяметры AB і CD. Вугал AOC роўны 60°. Дакажыце, што прамыя AD і CB паралельныя, і знайдзіце адлегласць паміж імі.

252*. Аб'ём прамавугольнага паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ роўны 120 дм^3, $AD = 5$ дм, $DC = 4$ дм (рыс. 288). Знайдзіце адлегласць паміж прамымі DC і D_1C_1.

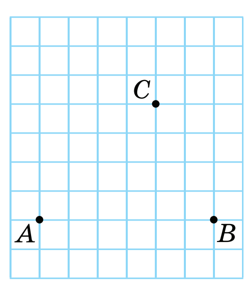


Рыс. 288

253*. Дакажыце, што сума адлегласцей ад пункта, адзначанага на аснове раўнабедранага трохвугольніка, да прамых, якія змяшчаюць яго бакавыя стораны, роўна вышыні трохвугольніка, праведзенай да бакавой стараны.

254*. Пры дапамозе лінейкі з паралельнымі краямі падзяліце дадзены вугал папалам.

255*. У сшытку адзначце пункты A, B і C (рыс. 289). Пры дапамозе чарцёжнага трохвугольніка правядзіце праз гэтыя пункты тры папарна паралельныя прамыя так, каб адлегласці ад сярэдняй прамой да дзвюх крайніх былі роўныя.



Рыс. 289

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

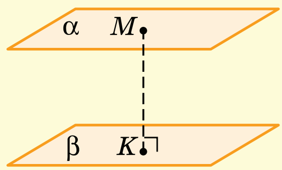
1. Уласцівасць катэта прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°.
2. Як вызначаецца адлегласць паміж паралельнымі прамымі.

Умеем

1. Даказваць тэарэму аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі.
2. Даказваць тэарэму аб уласцівасці катэта, які ляжыць супраць вугла ў 30°.

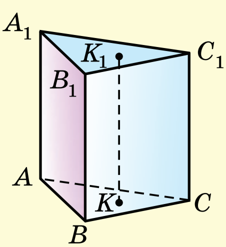
Геаметрыя 3D

Адлегласцю паміж паралельнымі плоскасцямі называецца даўжыня перпендыкуляра, апушчанага з пункта, які належыць адной з плоскасцей, на другую плоскасць (рыс. 290). У вашым класе падлога і столь — часткі паралельных плоскасцей. Адлегласць паміж імі роўна вышыні класнага пакоя.



Рыс. 290

Вышынёй прамой прызмы называецца адлегласць паміж плоскасцямі асноў. Адрэзак KK_1 — перпендыкуляр да плоскасці ABC, роўны яе вышыні. У прамой прызмы бакавыя канты перпендыкулярны плоскасцям асноў. Таму вышыня прызмы роўна даўжыні бакавога канта, г. зн. $AA_1 = KK_1$ (рыс. 291).



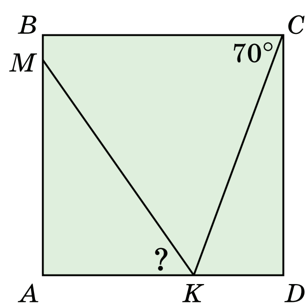
Рыс. 291

Задача. *Знайдзіце вышыню прамой трохвугольнай прызмы* $ABCA_1B_1C_1$, *калі трохвугольнік* ABC — *роўнастаронні з перыметрам* 48 *см, а ўсе бакавыя грані прызмы — квадраты (гл. рыс.* 291*).*

Рэальная геаметрыя

Задача 1. Квадратны аркуш кардону, паказаны на рысунку, разразаюць па прамых CK і KM. Пры гэтым прамая CK утварае з верхняй стараной квадрата вугал 70°, а разрэз KM дзеліць вугал AKC папалам.

1) Вызначыце, пад якім вуглом да ніжняй стараны квадрата трэба зрабіць разрэз KM.



2) Вызначыце вуглы атрыманых трохвугольнікаў.
3) Знайдзіце вуглы чатырохвугольніка $KMBC$.

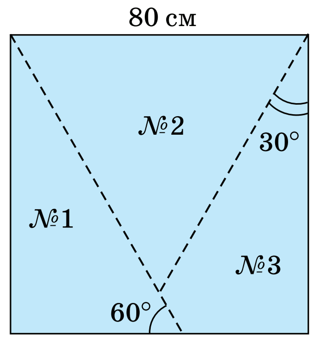
Задача 2. Квадратны адрэз тканіны са стараной 80 см трэба раскроіць на 3 часткі, як паказана на рысунку.

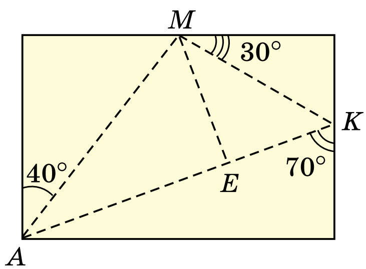
1) Складзіце алгарытм выканання задання.

2) Выражце з паперы квадрат у маштабе 1 : 10 да дадзенага адрэза тканіны і зрабіце раскрой гэтага квадрата згодна з умовай.

3) Знайдзіце шляхам разлікаў і непасрэдным вымярэннем вуглы кожнай фігуры.

4) Вылічыце перыметр фігуры № 2.



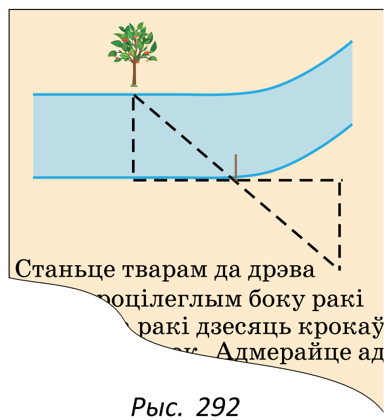


Задача 3. З прамавугольнага ліста фанеры выразалі трохвугольнік AMK, як паказана на рысунку. Затым яго разрэзалі па вышыні ME. Знайдзіце ўсе вуглы трохвугольніка AMK, трохвугольніка AME і трохвугольніка KME.

Мадэляванне

Дзеці знайшлі схему прыкладнага вызначэння шырыні ракі ў паходных умовах (рыс. 292). Аднак сама інструкцыя аказалася абарванай.

Дапамажыце дзецям аднавіць тэкст інструкцыі. Змадэлюйце матэматычнае рашэнне гэтай практычнай задачы. Паспрабуйце выкарыстаць дадзены метад на практыцы, які вызначае, напрыклад, шырыню бегавой дарожкі ці школьнага стадыёна.



Рыс. 292

ЗАПАМІНАЕМ

1. Сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°.
2. Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.
3. Катэт меншы за гіпатэнузу. Перпендыкуляр меншы за нахіленую, праведзеную з таго ж пункта да адной прамой.
4. Прамавугольныя трохвугольнікі могуць быць роўныя: 1) па двух катэтах; 2) па катэце і прылеглым вострым вугле; 3) па катэце і

процілеглым вострым вугле; 4) па гіпатэнузе і вострым вугле; 5) па катэце і гіпатэнузе.

5. Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палове гіпатэнузы. Калі катэт роўны палове гіпатэнузы, то ён ляжыць супраць вугла ў 30°.

6. У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, а супраць большага вугла — большая старана.

7. У трохвугольніку любая старана меншая за суму дзвюх іншых яго старон (няроўнасць трохвугольніка).

8. Любы пункт бісектрысы роўнааддалены ад старон вугла. Калі пункт унутры вугла роўнааддалены ад старон вугла, то ён ляжыць на бісектрысе гэтага вугла.

9. Медыяна прамавугольнага трохвугольніка, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы. Калі ў трохвугольніку медыяна роўна палове стараны, да якой яна праведзена, то трохвугольнік прамавугольны.

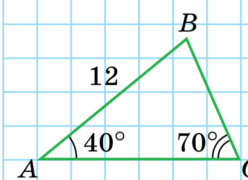
10. Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце (2-і адметны пункт).

11. Адлегласць ад любога пункта адной з паралельных прамых да другой прамой ёсць велічыня пастаянная.

Правяраем сябе

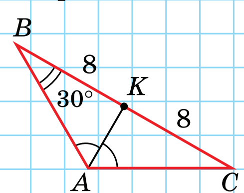
Заданне 1

У $\triangle ABC$ знайдзіце старану AC.



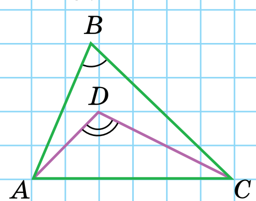
Заданне 2

Знайдзіце адлегласць ад пункта B да прамой AC.



Заданне 3

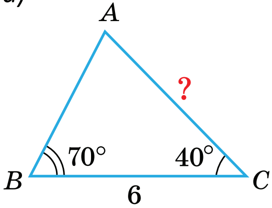
Дакажыце, што $\angle ABC$ меншы за $\angle ADC$.



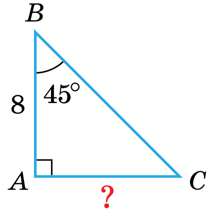
Падрыхтоўка да кантрольнай работы 4

1. Знайдзіце AC на рысунках *а)—в)*.

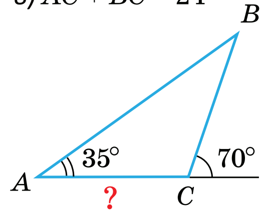
а)



б)

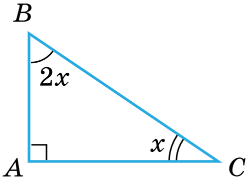


в) $AC + BC = 24$

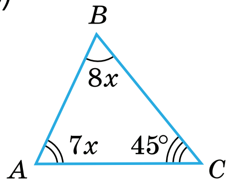


2. Па даных на рысунках знайдзіце найбольшы вугал трохвугольніка ABC.

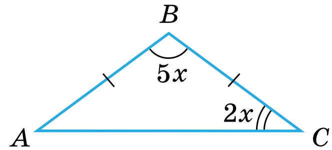
а)



б)

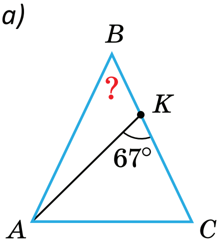


в)

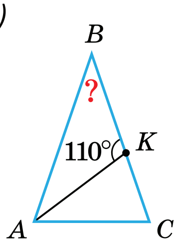


3. Знайдзіце вугал B, калі $AB = BC$, $AK = AC$.

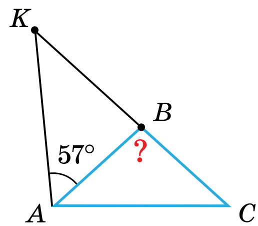
а)



б)

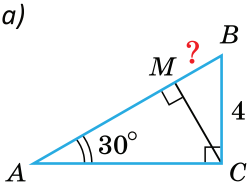


в)

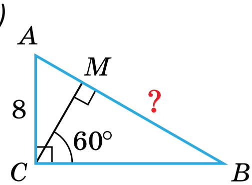


4. $\angle C = \angle M = 90°$. Знайдзіце даўжыню адрэзка MB.

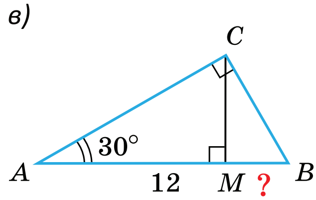
а)



б)

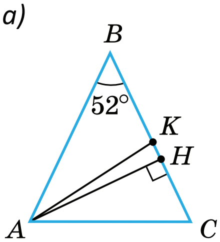


в)

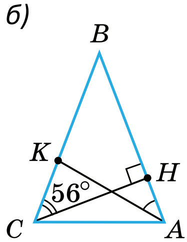


5. $AB = BC$, AK — бісектрыса трохвугольніка ABC. Знайдзіце вугал KAH.

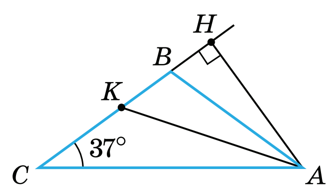
а)



б)



в)

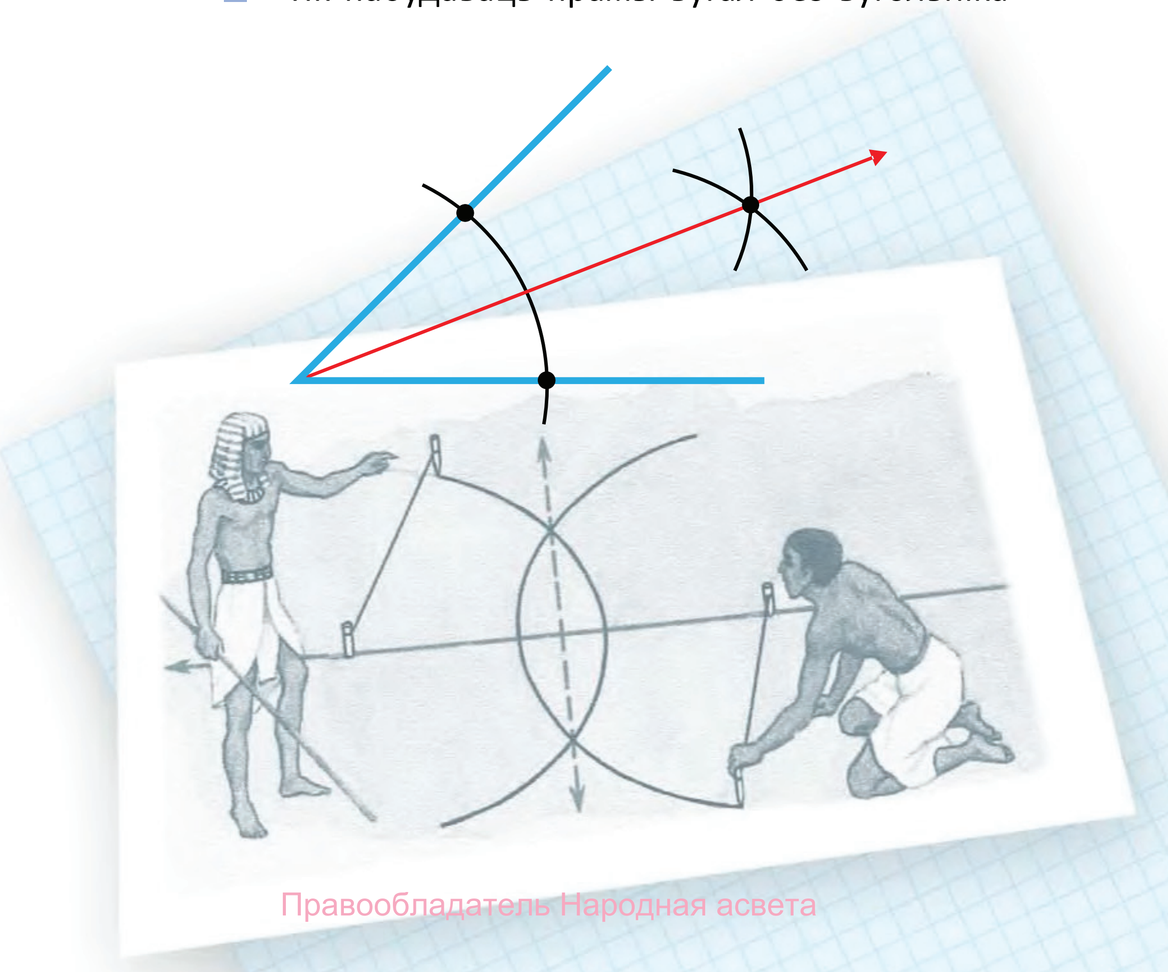


Глава V

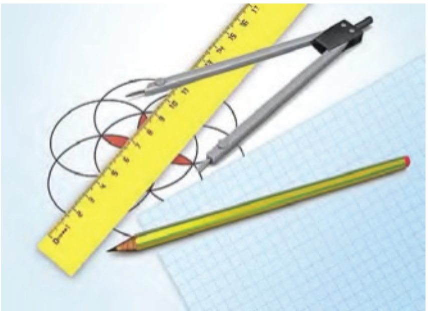
Задачы на пабудову

У гэтай главе вы даведаецеся:

- У чым сутнасць задачы на пабудову
- Як пабудаваць трохвугольнік па трох старанах
- Як пабудаваць прамы вугал без вугольніка



§ 27. Аб задачах на пабудову



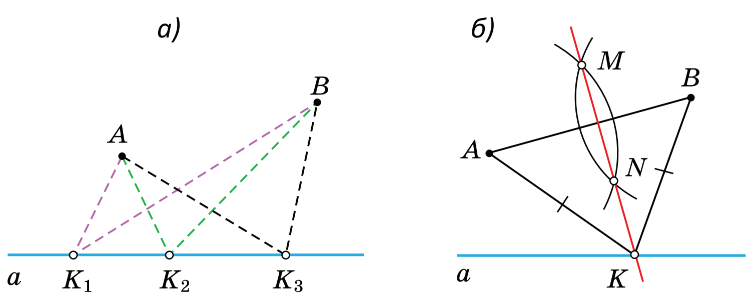
Раней мы выконвалі пабудовы на плоскасці пры дапамозе лінейкі з дзяленнямі, чарцёжнага трохвугольніка, транспарціра і цыркуля.

Матэматыкаў заўсёды цікавілі пабудовы геаметрычных фігур, якія можна выканаць толькі пры дапамозе цыркуля і лінейкі. У геаметрыі спецыяльна вылучаюць задачы на пабудову, якія можна рашыць з дапамогай гэтых двух інструментаў.

Напрыклад, пры дапамозе цыркуля і лінейкі можна пабудаваць трохвугольнік, стораны якога роўны тром дадзеным адрэзкам. Або пабудаваць вугал, роўны дадзенаму вуглу.

Разгледзім адну з такіх задач на пабудову. На прамой a трэба знайсці пункт, які знаходзіцца на аднолькавай адлегласці ад пунктаў A і B, што ляжаць па адзін бок ад прамой a (рыс. 293, *а*).

Знайсці пункт — гэта значыць пабудаваць яго пры дапамозе цыркуля і лінейкі. Калі перамяшчаць некаторы пункт па прамой a (становішчы K_1, K_2, K_3), то адлегласці ад гэтага пункта да пунктаў A і B будуць мяняцца. Калі гэтыя адлегласці стануць роўнымі, пункт на прамой будзе роўнааддалены ад канцоў адрэзка AB. Значыць, ён будзе ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да адрэзка AB. Гэта і ёсць ідэя пабудовы: трэба пабудаваць сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB і знайсці пункт яго перасячэння з прамой a.



Рыс. 293

Каб пабудаваць сярэдзінны перпендыкуляр, трэба пабудаваць дзве перасякальныя акружнасці роўных радыусаў з цэнтрамі ў пунктах A і B (рыс. 293, *б*). Затым правесці прамую MN праз пункты перасячэння гэтых акружнасцей (ніжэй мы абгрунтуем гэту пабудову). У перасячэнні сярэдзіннага перпендыкуляра MN да адрэзка AB і прамой a атрымаем шуканы пункт K.

Разгледжаная задача можа мець і практычны сэнс. Дапусцім, ёсць два населеныя пункты і шаша побач з імі. На шашы трэба знайсці месца для прыпынку, каб шлях для жыхароў абодвух населеных пунктаў да прыпынку быў аднолькавым. Усе пабудовы будуць зроблены на карце населенага пункта.

Пры рашэнні задач на пабудову лінейка лічыцца *аднабаковай* і *без дзяленняў*. Пры дапамозе такой лінейкі нельга пабудаваць дзве паралельныя прамыя, правёўшы лініі па краях лінейкі, нельга вымяраць і адкладаць адрэзкі, нельга будаваць перпендыкуляры, выкарыстоўваючы прамавугольную форму лінейкі. Разгледзім, якія аперацыі *можна* выконваць лінейкай, а якія цыркулем.

Аперацыі лінейкі

Пры дапамозе *лінейкі* можна правесці (пабудаваць):

а) адвольную прамую;

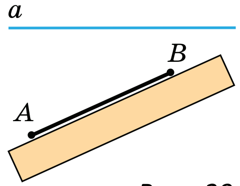
б) прамую, якая праходзіць праз два пункты (рыс. 294).

Аперацыі цыркуля

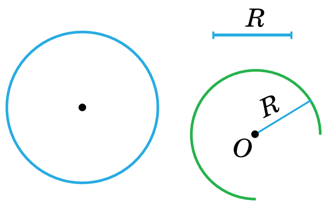
Пры дапамозе *цыркуля* можна:

а) пабудаваць адвольную акружнасць і акружнасць (дугу акружнасці) з дадзеным цэнтрам і радыусам, роўным дадзенаму адрэзку (рыс. 295);

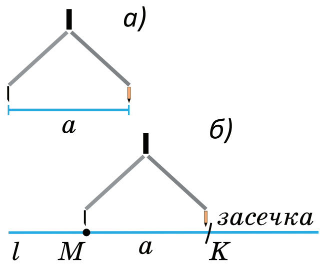
б) адкласці адрэзак, роўны дадзенаму адрэзку, на некаторай прамой.



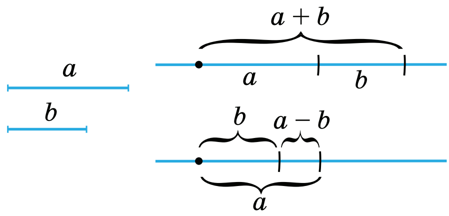
Рыс. 294



Рыс. 295



Рыс. 296



Рыс. 297

Адкладанне адрэзка

Для адкладання адрэзка, роўнага дадзенаму адрэзку a (рыс. 296, *а*) на прамой l (рыс. 296, *б*), неабходна: 1) адзначыць на прамой l пункт M; 2) радыусам, роўным a, правесці дугу акружнасці з цэнтрам у пункце M (зрабіць засечку на прамой l). У перасячэнні дугі і прамой l атрымаем пункт K і адрэзак MK, роўны a.

Аперацыя адкладання адрэзка на прамой дазваляе пабудаваць суму і рознасць двух адрэзкаў (рыс. 297): у першым выпадку на адвольнай прамой адкладаюць паслядоўна два адрэзкі, у другім — на большым адрэзку ад любога яго канца адкладаюць меншы адрэзак.

У далейшым пры рашэнні задач на пабудову мы не будзем апісваць працэдуру адкладання адрэзка на прамой, лічачы яе элементарнай аперацыяй.

Пералічым 5 *асноўных задач на пабудову*, да якіх зводзяцца іншыя задачы. Рашаючы складаныя задачы, будзем спасылацца на гэтыя асноўныя, не апісваючы тую частку рашэння, што звязана з адной з асноўных задач.

Задача I. Пабудова трохвугольніка па трох старанах.

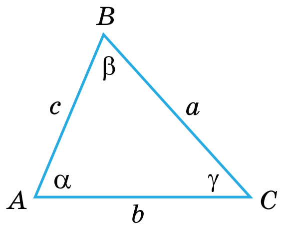
Задача II. Пабудова вугла, роўнага дадзенаму.

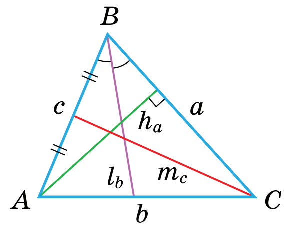
Задача III. Пабудова бісектрысы вугла.

Задача IV. Пабудова сярэдзіны адрэзка.

Задача V. Пабудова прамой, перпендыкулярнай да дадзенай.

У некаторым сэнсе «лінейка» і «цыркуль» — гэта два ідэальныя робаты, якія могуць выконваць пэўны набор аперацый. І наша задача — скласці алгарытм з паслядоўнасці такіх аперацый — камандаў для гэтых робатаў, што прывядзе да





Рыс. 298

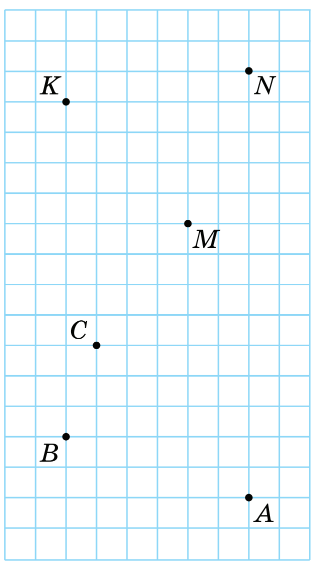
пабудовы неабходнай фігуры. Фактычна трэба напісаць праграму для «цыркуля» і «лінейкі».

Заўвага. У трохвугольніку ABC стораны, процілеглыя вуглам A, B і C, будзем адпаведна абазначаць a, b і c, а самі гэтыя вуглы — α, β і γ (рыс. 298). Медыяны, праведзеныя да старон a, b і c, будзем абазначаць m_a, m_b і m_c, вышыні — h_a, h_b і h_c, бісектрысы — l_a, l_b і l_c.

Заданні да § 27

Перанясіце ў сшытак пункты A, B, C, M, N, K (рыс. 299) і выканайце заданні 1—5.

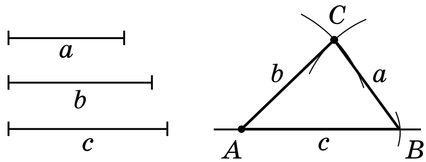
1. Пры дапамозе лінейкі пабудуйце прамую AN, прамень BA, адрэзак CM.
2. На прамой AN пры дапамозе цыркуля адкладзіце адрэзак AQ, роўны адрэзку CM; на прамені BA ад яго вяршыні адкладзіце адрэзак BE, роўны патроенаму адрэзку BC.
3. Пры дапамозе цыркуля пабудуйце акружнасць з цэнтрам у пункце M і радыусам, роўным адрэзку BC.
4. Знайдзіце пункты L і T перасячэння пабудаванай акружнасці і прамой AN.
5. Знайдзіце пункты D і F перасячэння пабудаванай акружнасці з акружнасцю з цэнтрам у пункце K і радыусам, роўным адрэзку BC; пабудуйце пункт G перасячэння хорды DF і адрэзка MK.



Рыс. 299

§ 28. Пабудова трохвугольніка па трох старанах. Пабудова вугла, роўнага дадзенаму

Задача I. *Пабудаваць трохвугольнік са старанамі a, b і c.*



Рыс. 300

Р а ш э н н е. Няхай дадзены адрэзкі a, b і c. На адвольнай прамой адкладаем адрэзак $AB = c$ (рыс. 300). Будуем акружнасць з цэнтрам у пункце A радыусам b. Будуем акружнасць з цэнтрам у пункце B радыусам a. Знаходзім пункт C перасячэння гэтых акружнасцей. Праводзім адрэзкі AC і BC. Трохвугольнік ABC — шуканы, паколькі ў яго $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ па пабудове.

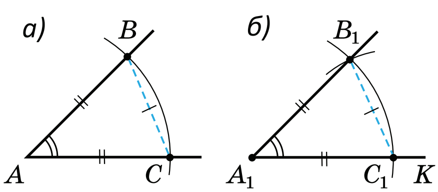
Задача мае рашэнне, калі для дадзеных адрэзкаў a, b і c выконваецца няроўнасць трохвугольніка: $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Калі рашэнне існуе, то яно адзінае, паколькі ўсе пабудаваныя трохвугольнікі будуць роўныя па 3-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў.

Вынік.

Калі для лікаў a, b і c выконваецца няроўнасць трохвугольніка, то існуе, і прычым адзіны, трохвугольнік са старанамі, роўнымі a, b і c.

Заўвага. Пры рашэнні задач на пабудову пад колькасцю рашэнняў разумеецца колькасць фігур рознай формы, якія задавальняюць умову. У дадзеным выпадку рашэнне адно.

Задача II. *Пабудаваць вугал, роўны дадзенаму вуглу.*



Рыс. 301

Р а ш э н н е. Няхай дадзены вугал A (рыс. 301, *а*). Трэба пабудаваць вугал A_1, роўны вуглу A. Ідэя рашэння заключаецца ў тым, каб пабудаваць некаторы трохвугольнік ABC з вуглом A і роўны яму трохвугольнік $A_1B_1C_1$.

Будуем адвольны прамень A_1K (рыс. 301, *б*). Адвольным, але адным і тым жа радыусам будуем дугі з цэнтрамі ў пунктах A і A_1. Атрымліваем $AB = AC = A_1C_1$. Будуем дугу акружнасці з цэнтрам у пункце C_1 радыусам, роўным CB, да перасячэння яе з ужо пабудаванай дугой у пункце B_1. Будуем прамень A_1B_1. Вугал A_1 — шуканы. Сапраўды, паколькі $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ па трох старанах ($AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ па пабудове), то $\angle A_1 = \angle A$ як адпаведныя ў двух роўных трохвугольніках.

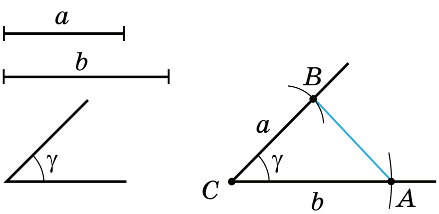
Заўвага. Пабудова вугла, роўнага дадзенаму, дае магчымасць будаваць суму і рознасць двух вуглоў.

Заданні да § 28

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Пабудаваць трохвугольнік па дзвюх старанах і вугле паміж імі.*

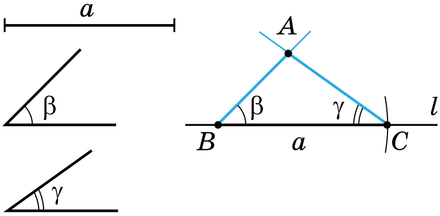


Рыс. 302

Р а ш э н н е. Няхай дадзены адрэзкі a і b і вугал γ (рыс. 302). Трэба пабудаваць трохвугольнік са старанамі a і b і вуглом γ паміж імі. Спачатку будуем вугал C, роўны дадзенаму вуглу γ (асноўная задача). На старанах вугла C адкладаем адрэзкі $CB = a$ і $CA = b$ і праводзім адрэзак AB. Трохвугольнік ABC — шуканы, паколькі задавальняе ўмову задачы: $CB = a$, $CA = b$, $\angle C = \gamma$ па пабудове.

Заўважым, што рашэнне існуе, калі $\gamma < 180°$, і яно адзінае, таму што ўсе пабудаваныя трохвугольнікі будуць роўныя па 1-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў.

Задача 2. *Пабудаваць трохвугольнік па старане і двух прылеглых да яе вуглах.*



Рыс. 303

Р а ш э н н е. Няхай дадзена старана a і вуглы β і γ (рыс. 303). Трэба пабудаваць трохвугольнік са старанoй a і прылеглымі да яе вугламі β і γ.

На адвольнай прамой l адкладаем адрэзак $BC = a$.

Ад праменяў BC і CB у адну паўплоскасць адкладаем вуглы, роўныя вуглу β і вуглу γ (асноўная задача). Адзначаем пункт A, у якім перасякаюцца стораны вуглоў B і C. Трохвугольнік ABC — шуканы.

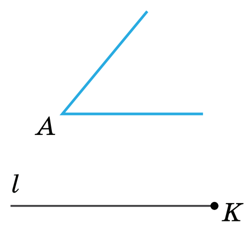
Рашэнне існуе, калі $\beta + \gamma < 180°$, і яно адзінае, паколькі ўсе пабудаваныя трохвугольнікі будуць роўныя па 2-й прымеце роўнасці трохвугольнікаў.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

256. Пабудуйце ў сшытку тры адрэзкі, роўныя 6, 8 і 10 клетачкам. Пабудуйце трохвугольнік са старанамі, роўнымі пабудаваным адрэзкам.

257. Нарысуйце ў сшытку адвольны трохвугольнік ABC і прамую l, якая не перасякае трохвугольнік. Пабудуйце трохвугольнік MNK, роўны трохвугольніку ABC, у якога старана MK ляжыць на прамой l і $NK = BC$, а $MN = AB$.

258. Нарысуйце ў сшытку адвольны тупы вугал. Пабудуйце вугал, роўны дадзенаму вуглу.



Рыс. 304

259. Нарысуйце ў сшытку вугал A і прамень l з пачаткам у пункце K (рыс. 304). Пабудуйце вугал, роўны вуглу A, з вяршыняй у пункце K, размешчаны ў ніжняй паўплоскасці адносна прамой l.

260. Нарысуйце два няроўныя вуглы. Пабудуйце вугал, роўны:

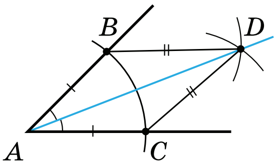
а) суме дадзеных вуглоў;
б) рознасці дадзеных вуглоў.

261. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах a і b і медыяне m_b, праведзенай да стараны b.

262*. Пабудуйце трохвугольнік па дзвюх старанах і медыяне, праведзенай да трэцяй стараны.

§ 29. Пабудова бісектрысы вугла. Пабудова сярэдзіны адрэзка

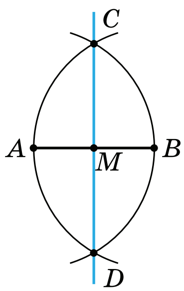
Задача III. *Пабудаваць бісектрысу дадзенага вугла.*



Рыс. 305

Р а ш э н н е. Няхай дадзены вугал A (рыс. 305). Трэба пабудаваць яго бісектрысу. Адвольным радыусам будуем дугу акружнасці з цэнтрам у пункце A, якая перасякае стораны вугла A ў пунктах B і C. Далей аднолькавым радыусам (большым за BC) будуем дзве дугі з цэнтрамі ў пунктах B і C да іх перасячэння ў пункце D. Будуем прамень AD, які з'яўляецца шуканай бісектрысай. Доказ вынікае з таго, што $\triangle ABD = \triangle ACD$ па трох старанах ($AB = AC$, $BD = CD$ як радыусы, старана AD — агульная), адкуль $\angle BAD = \angle CAD$.

Задача IV. *Пабудаваць сярэдзіну адрэзка* (*падзяліць дадзены адрэзак папалам*).



Рыс. 306

Р а ш э н н е. Няхай AB — дадзены адрэзак. Радыусам, роўным AB, будуем дзве дугі з цэнтрамі ў пунктах A і B да іх перасячэння ў пунктах C і D (рыс. 306).

Праз пункты C і D праводзім прамую. У перасячэнні прамых CD і AB атрымліваем пункт M — сярэдзіну адрэзка AB. Дакажам гэта. Паколькі пункты C і D роўнааддалены ад канцоў адрэзка AB ($CA = CB = DA = DB$ як радыусы), то яны ляжаць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка. Паколькі два пункты задаюць адзіную прамую, то CD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка AB. Такім чынам, $AM = MB$.

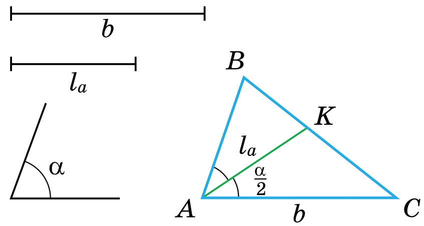
Заўвага. Дадзены спосаб пабудовы сярэдзіны адрэзка з'яўляецца таксама спосабам пабудовы сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка.

Заданні да § 29

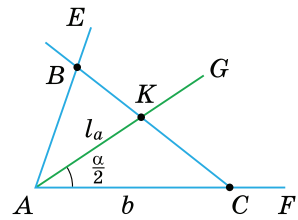
РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Пабудаваць трохвугольнік па старане b, прылеглым вугле α і бісектрысе l_a.*



Рыс. 307



Рыс. 308

Р а ш э н н е. Дапусцім, што задача рэшана, і зробім чарцёж шуканага трохвугольніка ABC (рыс. 307). Няхай $AC = b$, $\angle A = \alpha$, бісектрыса $AK = l_a$. Паколькі AK — бісектрыса, то $\angle KAC = \frac{\alpha}{2}$. Трохвугольнік AKC можна пабудаваць па дзвюх старанах і вугле паміж імі: $AC = b$, $AK = l_a$, $\angle KAC = \frac{\alpha}{2}$. Далей трохвугольнік AKC лёгка дабудаваць да шуканага трохвугольніка ABC. Апішам пабудову (рыс. 308).

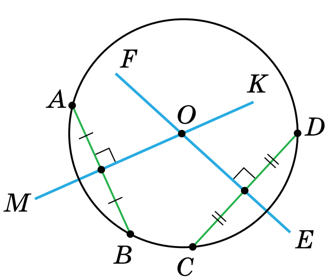
1) Будуем $\angle EAF = \alpha$ (асноўная задача).

2) Будуем бісектрысу AG вугла EAF (асноўная задача). Атрымліваем $\angle GAF = \frac{\alpha}{2}$.

3) Будуем трохвугольнік AKC па дзвюх старанах і вугле паміж імі: на прамені AF адкладаем адрэзак $AC = b$, на прамені AG — адрэзак $AK = l_a$.

4) Знаходзім пункт B перасячэння праменя CK і праменя AE. Трохвугольнік ABC — шуканы.

Задача 2. *Пабудаваць цэнтр дадзенай акружнасці.*



Рыс. 309

Р а ш э н н е. Мы ведаем, што сярэдзінны перпендыкуляр да хорды праходзіць праз цэнтр акружнасці. Сярэдзінныя перпендыкуляры да дзвюх хорд акружнасці будуць перасякацца ў яе цэнтры. Адсюль пабудова.

Будуем хорду AB (рыс. 309) і да яе сярэдзінны перпендыкуляр MK (асноўная задача). Будуем хорду CD (не паралельную AB) і да яе сярэдзінны перпендыкуляр EF. Пункт O перасячэння прамых MK і EF — цэнтр акружнасці.

Заўвага. Другім спосабам рашэння будзе пабудова аднаго сярэдзіннага перпендыкуляра MK да хорды AB, знаходжанне пунктаў T і P перасячэння MK з акружнасцю і пабудова сярэдзіны O дыяметра TP.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

263. Падзяліце дадзены адрэзак на чатыры роўныя часткі.

264. Пабудуйце вугал, роўны $\frac{3}{4}$ дадзенага вугла.

265. Нарысуйце востравугольны трохвугольнік ABC. Для яго пабудуйце:
а) бісектрысу AK; б) медыяну BM.

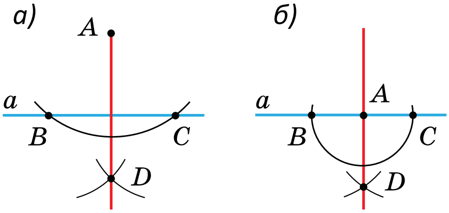
266. Пабудуйце пункт перасячэння сярэдзінных перпендыкуляраў да старон трохвугольніка і акружнасць, якая праходзіць праз усе вяршыні трохвугольніка.

267. У адной паўплоскасці адносна прамой m ляжаць два пункты A і B. На прамой m пабудуйце пункт M, роўнааддалены ад пунктаў A і B.

268*. Дадзены нераўнабедраны трохвугольнік ABC. На бісектрысе вугла B знайдзіце пункт, які знаходзіцца на роўнай адлегласці ад вяршынь A і C.

§ 30. Пабудова прамой, перпендыкулярнай дадзенай

Задача V. *Пабудаваць прамую, якая перпендыкулярна прамой a і праходзіць праз дадзены пункт A.*



Рыс. 310

Рашэнне. Алгарытм пабудовы аднолькавы для выпадку, калі пункт A не належыць прамой a (рыс. 310, *а*) і калі пункт A належыць прамой a (рыс. 310, *б*).

Пабудова. Праводзім дугу з цэнтрам у пункце A, якая перасякае прамую a ў пунктах B і C. З пунктаў B і C як з цэнтраў адным і тым жа радыусам (большым

або роўным BC) праводзім дугі да перасячэння іх у пункце D. Будуем прамую AD. Атрымліваем $AD \perp a$.
Доказ. Паколькі пункты A і D роўнааддалены ад канцоў адрэзка BC ($AB = AC$, $BD = CD$ як радыусы), то AD — сярэдзінны перпендыкуляр да адрэзка BC. Значыць, $AD \perp a$.

Этапы рашэння задачы на пабудову

У рашэнні задачы на пабудову вылучаюць 4 этапы.

1. Аналіз.

На гэтым этапе мяркуюць, што задача рэшана, робяць чарцёж з выявай шуканай фігуры і фармулююць *ідэю рашэння* задачы.

2. Пабудова.

На гэтым этапе даюць *апісанне паслядоўнасці крокаў*, якія прыводзяць да пабудовы шуканай фігуры, г. зн. алгарытм пабудовы. Часам на гэтым этапе праводзяць і самі аперацыі пабудовы на адвольна ўзятых адрэзках, вуглах і іншых фігурах. У складаных задачах звычайна называюць толькі крокі пабудовы, спасылаючыся на асноўныя і ключавыя задачы.

3. Доказ.

На гэтым этапе даказваюць, што *пабудаваная фігура задавальняе патрабаванне задачы*. Часам гэта вынікае непасрэдна з пабудовы.

4. Даследаванне.

На дадзеным этапе вызначаюць, пры якой велічыні зададзеных ва ўмове адрэзкаў і вуглоў існуе рашэнне і якая колькасць рашэнняў.

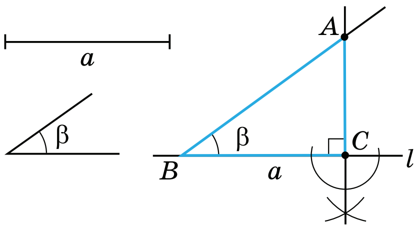
Пры запісе рашэння задачы на пабудову этапы аналізу і даследавання ў школе *неабавязковыя*, калі ва ўмове задачы няма спецыяльных указанняў.

Заданні да § 30

РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Пабудаваць прамавугольны трохвугольнік па катэце і прылеглым вострым вугле.*



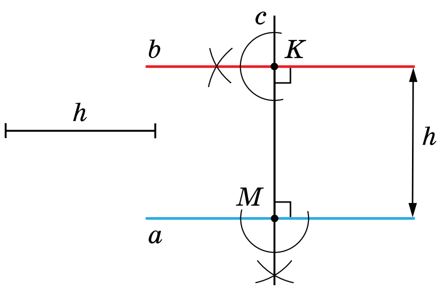
Рыс. 311

Рашэнне. Няхай дадзены катэт a і прылеглы да яго востры вугал β. Трэба пабудаваць прамавугольны трохвугольнік з катэтам a і вуглом β (рыс. 311).

Пабудова. 1) Будуем прамы вугал. Для гэтага праводзім адвольную прамую l і будуем перпендыкулярную ёй прамую, што праходзіць праз адвольна ўзяты на прамой l пункт C (асноўная задача). Атрымліваем прамы вугал C.
2) На адной старане прамога вугла C ад яго вяршыні адкладаем адрэзак $CB = a$.
3) Будуем $\angle B = \beta$ (асноўная задача).
4) У перасячэнні стараны вугла B са старанай прамога вугла атрымліваем пункт A.
Доказ. Трохвугольнік ABC — шуканы, паколькі па пабудове $\angle C = 90°$, $BC = a$ — катэт, $\angle B = \beta$ — прылеглы востры вугал.

Заўвага. Мы не апісваем пабудову прамой, перпендыкулярнай дадзенай, і пабудову вугла, роўнага дадзенаму, паколькі гэта асноўныя задачы. На рысунку 311 пабудова прамога вугла C паказана для нагляднасці.

Задача 2. *Пабудаваць прамую, паралельную дадзенай прамой, калі адлегласць паміж гэтымі прамымі роўна зададзенаму адрэзку.*



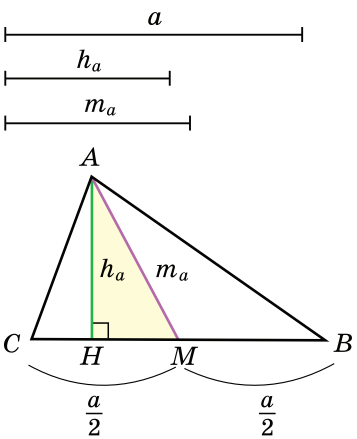
Рыс. 312

Рашэнне. Няхай дадзена прамая a і адрэзак h, роўны адлегласці паміж паралельнымі прамымі a і b (рыс. 312). Трэба пабудаваць прамую b, паралельную прамой a і змешчаную ад прамой a на адлегласці h. Выкарыстаем тэарэму аб тым, што на плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой.

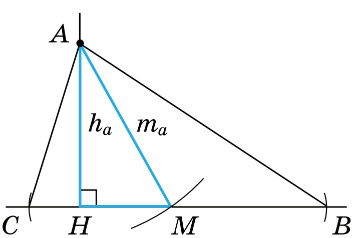
Пабудова. 1) Адзначаем на прамой a пункт M і будуем прамую c, якая перпендыкулярна да прамой a і праходзіць праз пункт M (асноўная задача).

2) Адкладаем на прамой c перпендыкуляр $MK = h$.
3) Будуем прамую b, якая перпендыкулярна да прамой c і праходзіць праз пункт K (асноўная задача). Атрымліваем $b \parallel a$.
Доказ. Паколькі $a \perp c$ і $b \perp c$ і на плоскасці дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой, то $a \parallel b$. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі роўна даўжыні перпендыкуляра, апушчанага з любога пункта адной з прамых на другую прамую: $KM \perp a$, $KM = h$.

Задача 3. *Пабудаваць трохвугольнік па аснове a, вышыні h_a і медыяне m_a, праведзеных да гэтай асновы.*



Рыс. 313



Рыс. 314

Рашэнне.
Аналіз. Няхай у трохвугольніка ABC $BC = a$, вышыня $AH = h_a$ і медыяна $AM = m_a$ (рыс. 313). Заўважым, што $\triangle AHM$ можа быць пабудаваны па катэце і гіпатэнузе, а затым дабудаваны да шуканага трохвугольніка ABC шляхам адкладання ад пункта M улева і ўправа адрэзкаў $MC = MB = \frac{a}{2}$.

Пабудова. 1) Будуем прамы вугал H (рыс. 314). На адной яго старане адкладаем адрэзак $AH = h_a$, з пункта A як з цэнтра робім засечку на другой старане вугла радыусам m_a — атрымліваем пункт M.
2) Дзелім адрэзак a папалам (асноўная задача) і на прамой HM адкладаем па розныя бакі ад пункта M адрэзкі $MB = \frac{a}{2}$ і $MC = \frac{a}{2}$. Праводзім адрэзкі CA і BA. Атрымліваем шуканы $\triangle ABC$.

Доказ. $\triangle ABC$ — шуканы, паколькі ў яго вышыня $AH = h_a$, медыяна $AM = m_a$, старана $BC = a$ па пабудове.
Даследаванне*. Паколькі катэт меншы за гіпатэнузу, то вышыня h_a павінна быць меншай або роўнай медыяне m_a. Таму рашэнне існуе, калі $h_a \leqslant m_a$, і яно адзінае. Калі $h_a = m_a$, атрымаем раўнабедраны трохвугольнік.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

269. Нарысуйце востравугольны трохвугольнік ABC. Пабудуйце: а) вышыню AH; б) пункт перасячэння вышынь трохвугольніка ABC.

270. Нарысуйце вугал α. Пабудуйце вугал β, калі вядома, што $\alpha + \beta = 90°$.

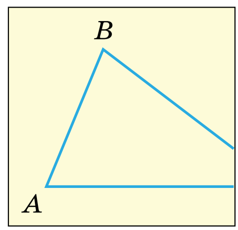
271. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік:
а) па двух катэтах;
б) па катэце і процілеглым вострым вугле;
в) па гіпатэнузе і вострым вугле.

272. Пабудуйце раўнабедраны трохвугольнік па вышыні і аснове.

273. Пабудуйце прамавугольнік па дзвюх старанах a і b.

274. Пабудуйце трохвугольнік ABC па старане b, вышыні h_a і медыяне m_a, праведзеных да стараны a.

275*. Пабудуйце аснову H вышыні CH трохвугольніка ABC, у якога вяршыня C недаступная (рыс. 315).



Рыс. 315

§ 31. Геаметрычнае месца пунктаў

Азначэнне. **Геаметрычным месцам пунктаў (ГМП)** называецца мноства ўсіх пунктаў, якія валодаюць агульнай уласцівасцю.

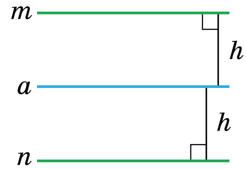
Прыклады геаметрычных месцаў пунктаў на плоскасці

1. *Акружнасць* — гэта геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад дадзенага пункта.

2. *Сярэдзінны перпендыкуляр* — гэта геаметрычнае месца пунктаў плоскасці, роўнааддаленых ад канцоў адрэзка.

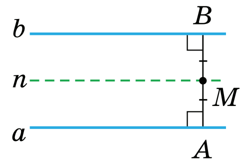
3. *Бісектрыса* — геаметрычнае месца пунктаў унутры вугла, роўнааддаленых ад старон вугла.

4. Геаметрычнае месца пунктаў, якія знаходзяцца на зададзенай адлегласці h ад дадзенай прамой a, — дзве прамыя m і n, паралельныя дадзенай, змешчаныя ў розных паўплоскасцях ад гэтай прамой на зададзенай адлегласці ад яе (рыс. 316).



Рыс. 316

5. Геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад дзвюх дадзеных паралельных прамых a і b, ёсць паралельная ім прамая n, якая праходзіць праз сярэдзіну M іх агульнага перпендыкуляра AB (рыс. 317).



Рыс. 317

У прасторы геаметрычным месцам пунктаў, роўнааддаленых ад дадзенага пункта, з'яўляецца *сфера*.

Метад геаметрычных месцаў пунктаў

Адным з метадаў рашэння задач на пабудову з'яўляецца *метад перасячэння двух геаметрычных месцаў пунктаў*. Сутнасць яго заключаецца ў наступным. Няхай шуканы пункт задавальняе, напрыклад, некаторыя дзве ўмовы: геаметрычнае месца пунктаў, што задавальняюць першую ўмову, — гэта некаторая фігура F_1 (акружнасць, бісектрыса вугла, сярэдзінны перпендыкуляр і г. д.), а геаметрычнае месца пунктаў, што задавальняюць другую ўмову, — гэта фігура F_2. Шуканы пункт, які належыць і фігуры F_1, і фігуры F_2, з'яўляецца пунктам іх перасячэння. У прыватнасці, метадам перасячэння двух геаметрычных месцаў пунктаў рэшана асноўная задача аб пабудове трохвугольніка па трох старанах.

Заданні да § 31

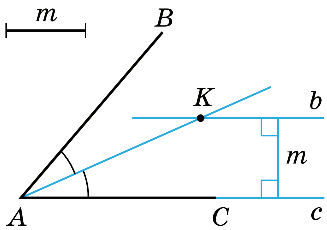
РАШАЕМ РАЗАМ

ключавыя задачы

Задача 1. *Пабудаваць унутры дадзенага вугла пункт, роўнааддалены ад старон вугла на зададзеную адлегласць m.*

Рашэнне.

Аналіз. Няхай дадзены вугал BAC і адрэзак даўжынёй m (рыс. 318). Усе пункты, роўнааддаленыя ад старон вугла, ляжаць на бісектрысе вугла. Таму шуканы пункт ляжыць на



Рыс. 318

бісектрысе вугла. З іншага боку, усе пункты, аддаленыя ад стараны вугла на адлегласць m, ляжаць на дзвюх прамых, паралельных старане вугла і змешчаных ад яе на адлегласці m. Шуканы пункт будзе знаходзіцца на перасячэнні названых двух геаметрычных месцаў пунктаў.

Пабудова. 1) Будуем прамую b, паралельную прамой AC, з іх агульным перпендыкулярам, роўным m (ключавая задача 2 § 30).

2) Будуем бісектрысу вугла BAC (асноўная задача).

3) У перасячэнні бісектрысы і прамой b атрымліваем шуканы пункт K.

Доказ. Адлегласць паміж паралельнымі прамымі b і AC роўна m. Значыць, і адлегласць ад пункта K да стараны AC вугла BAC роўна m. Усе пункты бісектрысы роўнааддалены ад старон вугла, у тым ліку і пункт K. Пункт K задавальняе патрабаванне задачы.

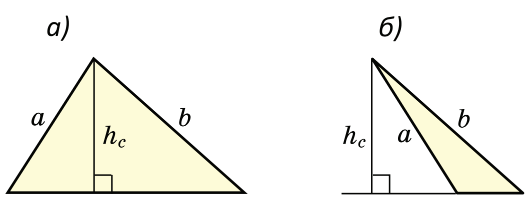
Задача 2. *Пабудаваць трохвугольнік па дзвюх старанах a і b і вышыні h_c, апушчанай на старану c.*

Рашэнне. Заўважым, што ў агульным выпадку існуе два трохвугольнікі са старанамі a, b і вышынёй h_c (рыс. 319, *а*, *б*).

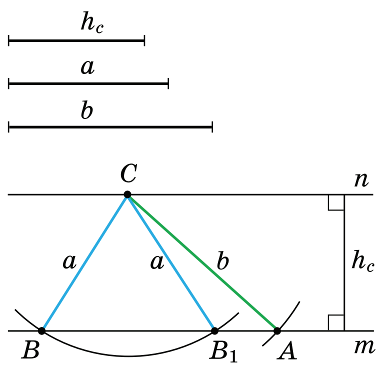
Пабудова (рыс. 320). 1) Будуем паралельныя прамыя m і n з адлегласцю h_c паміж імі (ключавая задача 2 § 30).

2) Будуем дугу з цэнтрам у пункце C і радыусам a, якая перасякае прамую m у пунктах B і B_1.

3) Будуем дугу з цэнтрам у пункце C радыусам b, якая перасякае прамую m у пункце A. Трохвугольнікі ABC і AB_1C — шуканыя.



Рыс. 319



Рыс. 320

Доказ вынікае з пабудовы і тэарэмы аб адлегласці паміж паралельнымі прамымі.

Даследаванне. Паколькі перпендыкуляр меншы за нахіленую, праведзеную з таго ж пункта да адной прамой, то задача можа мець рашэнне, толькі калі $h \leqslant a$ і $h \leqslant b$. Калі $h < a$, $h < b$ і $a \neq b$, то задача мае два рашэнні. Калі $a = h$ і $a < b$, то трохвугольнік прамавугольны, і задача мае адно рашэнне. Калі $h < a$ і $a = b$, то задача мае адно рашэнне — раўнабедраны трохвугольнік. Калі $h > a$ або $h > b$, то задача не мае рашэнняў.

РАШАЕМ САМАСТОЙНА

276. На плоскасці дадзены пункты A і B. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў M плоскасці, для якіх:

а) адрэзак AB з'яўляецца асновай раўнабедранага трохвугольніка AMB;

б) адрэзак AB з'яўляецца бакавой стараной раўнабедранага трохвугольніка AMB.

277. На плоскасці дадзены пункты A і B. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў M плоскасці, для якіх:

а) $AM = MB$; б) $AM < BM$.

278. Дадзены дзве перасякальныя прамыя. Знайдзіце геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад гэтых прамых.

279. Знайдзіце геаметрычнае месца цэнтраў акружнасцей, кожная з якіх праходзіць праз два дадзеныя пункты.

280. Пабудуйце трохвугольнік ABC:

а) па старане a, вышыні h_a і вугле β;

б) па старане a, вышыні h_a і старане b.

281*. Дадзены адрэзак AB. Знайдзіце геаметрычнае месца вяршынь прамавугольных трохвугольнікаў з гіпатэнузай AB.

282*. Пабудуйце прамавугольны трохвугольнік па гіпатэнузе c і вышыні h_c.

ПАДВОДЗІМ ВЫНІКІ

Ведаем

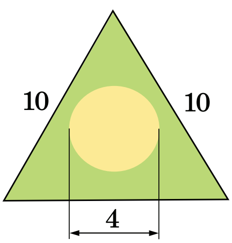
1. Якія аперацыі пры рашэнні задач на пабудову можна выконваць цыркулем, а якія — лінейкай.
2. Асноўныя задачы на пабудову.
3. Этапы рашэння задачы на пабудову.

Умеем

1. Рашаць асноўныя задачы на пабудову.
2. Будаваць трохвугольнік:
   а) па дзвюх старанах і вугле паміж імі;
   б) па старане і двух прылеглых да яе вуглах;
   в) па трох старанах.
3. Будаваць прамую, якая паралельна дадзенай і праходзіць праз дадзены пункт.

Рэальная геаметрыя

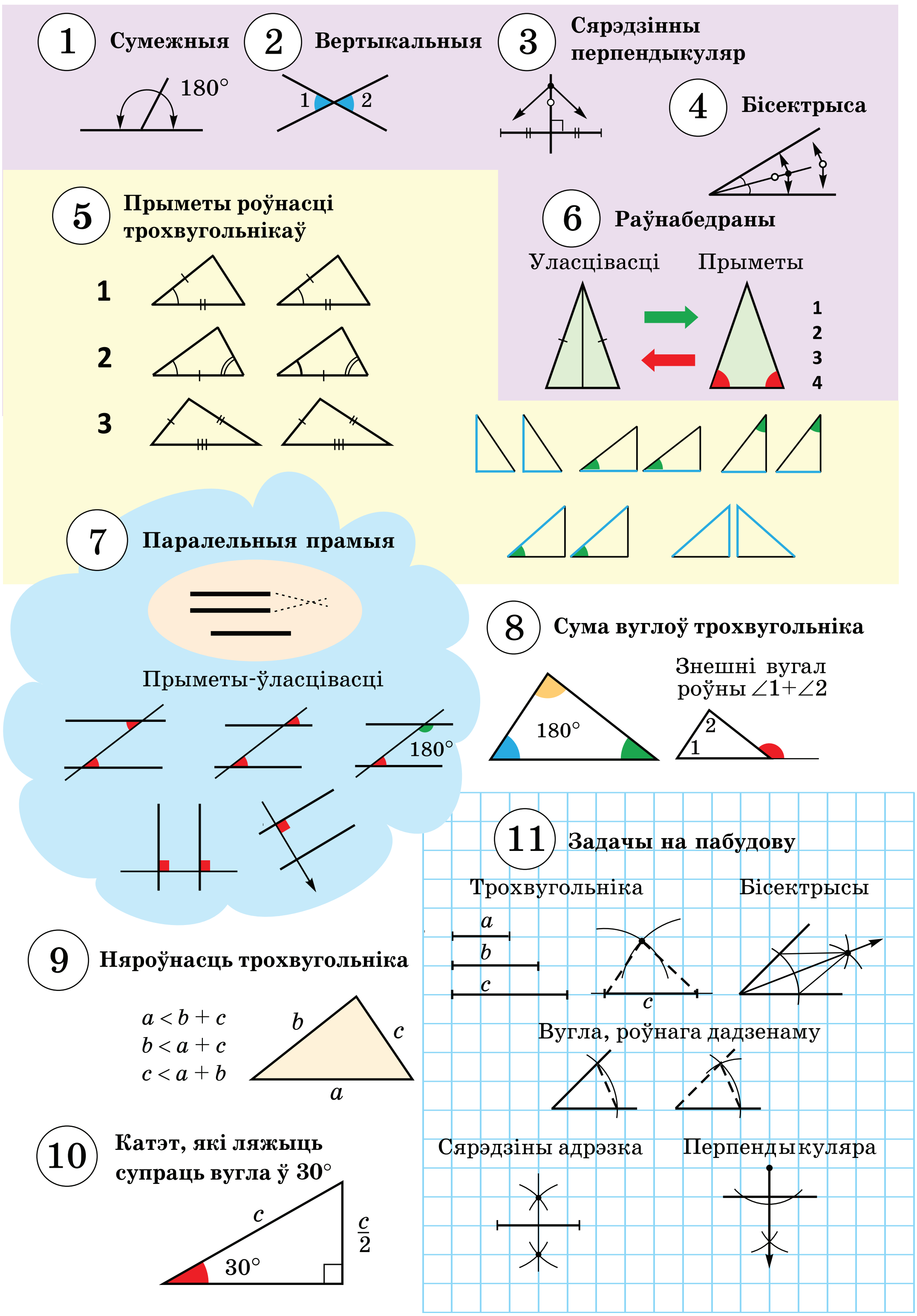
На практыцы пры адсутнасці цыркуля акружнасць будуюць пры дапамозе вяроўкі з прывязанымі да яе канцоў калкамі. Замацаваўшы адзін калок і нацягнуўшы вяроўку, другім калком прачэрчваюць акружнасць.



Рыс. 321

Задача. *Неабходна разбіць клумбу ў форме роўнастаронняга трохвугольніка са стараной* 10 *м, у цэнтры якой будзе размешчана круглая клумба дыяметрам* 4 *м* (рыс. 321). *У вас ёсць вяроўка даўжынёй* 15 *м, метровая лінейка і некалькі калкоў.*

Складзіце алгарытм рашэння гэтай практычнай задачы, зрабіце абгрунтаванне. Пры гэтым карыстайцеся тым фактам, што цэнтр роўнастаронняга трохвугольніка знаходзіцца ў пункце перасячэння яго медыян (вышынь, бісектрыс).


1 Сумежныя
180°
2 Вертыкальныя
1
2
3 Сярэдзінны перпендыкуляр
4 Бісектрыса
5 Прыметы роўнасці трохвугольнікаў
1
2
3
6 Раўнабедраны
Уласцівасці
Прыметы
1
2
3
4
7 Паралельныя прамыя
Прыметы-ўласцівасці
180°
8 Сума вуглоў трохвугольніка
180°
Знешні вугал роўны ∠1+∠2
2
1
9 Няроўнасць трохвугольніка
a < b + c
b < a + c
c < a + b
b
c
a
10 Катэт, які ляжыць супраць вугла ў 30°
c
c/2
30°
11 Задачы на пабудову
Трохвугольніка
Бісектрысы
a
b
c
c
Вугла, роўнага дадзенаму
Сярэдзіны адрэзка
Перпендыкуляра

База ведаў па геаметрыі
7 клас

Ведаць і ўмець даказваць

1. Сума сумежных вуглоў роўна 180°.

2. Вертыкальныя вуглы роўныя.

3. Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў гэтага адрэзка.

4. Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла.

5. Трохвугольнікі роўныя:
1) па дзвюх старанах і вугле паміж імі;
2) па старане і двух прылеглых да яе вуглах;
3) па трох старанах.

Прамавугольныя трохвугольнікі роўныя:
1) па двух катэтах;
2) па катэце і прылеглым вострым вугле;
3) па катэце і процілеглым вострым вугле;
4) па гіпатэнузе і вострым вугле;
5) па катэце і гіпатэнузе.

6. У раўнабедраным трохвугольніку вуглы пры аснове роўныя, а бісектрыса, праведзеная з вяршыні да асновы, з’яўляецца яго вышынёй і медыянай. Калі ў трохвугольніка два вуглы роўныя, то ён раўнабедраны.

7. Дзве прамыя, паралельныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой. Калі накрыжлеглыя вуглы роўныя, або адпаведныя вуглы роўныя, або сума аднастаронніх вуглоў роўна 180°, то прамыя паралельныя і наадварот.

Дзве прамыя, перпендыкулярныя да трэцяй, паралельныя паміж сабой. Прамая, перпендыкулярная да адной з паралельных прамых, перпендыкулярная і да другой прамой.

8. Сума вуглоў трохвугольніка роўна 180°. Знешні вугал трохвугольніка роўны суме двух унутраных вуглоў, не сумежных з ім.

9. Любая старана трохвугольніка меншая за суму дзвюх іншых яго старон.

10. Катэт прамавугольнага трохвугольніка, які ляжыць супраць вугла ў 30°, роўны палове гіпатэнузы.

Ведаць і выкарыстоўваць

1. Бісектрысы сумежных вуглоў узаемна перпендыкулярныя.

2. Любы пункт сярэдзіннага перпендыкуляра да адрэзка роўнааддалены ад канцоў гэтага адрэзка. Калі пункт роўнааддалены ад канцоў адрэзка, то ён ляжыць на сярэдзінным перпендыкуляры да гэтага адрэзка. Сярэдзінны перпендыкуляр — геаметрычнае месца пунктаў, роўнааддаленых ад канцоў адрэзка.

3. Любы пункт бісектрысы вугла роўнааддалены ад старон вугла. Калі пункт унутры вугла роўнааддалены ад старон вугла, то ён ляжыць на бісектрысе вугла. Бісектрыса — геаметрычнае месца пунктаў унутры вугла, роўнааддаленых ад старон вугла.

4. Знешні вугал трохвугольніка большы за любы ўнутраны вугал, не сумежны з ім.

5. У трохвугольніку супраць большай стараны ляжыць большы вугал, супраць большага вугла — большая старана.

6. Сярэдзінныя перпендыкуляры да старон трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце. Гэты пункт з'яўляецца цэнтрам апісанай каля трохвугольніка акружнасці.

7. Калі ў трохвугольніка вышыня з'яўляецца бісектрысай, або вышыня з'яўляецца медыянай, або медыяна з'яўляецца бісектрысай, то трохвугольнік раўнабедраны.

8. Бісектрысы трохвугольніка перасякаюцца ў адным пункце.

9. Катэт прамавугольнага трохвугольніка меншы за гіпатэнузу. Для нахіленых і перпендыкуляра, праведзеных з аднаго пункта да адной прамой, справядліва: перпендыкуляр і праекцыя нахіленай на прамую меншыя за нахіленую; большай праекцыі адпавядае большая нахіленая, роўным праекцыям адпавядаюць роўныя нахіленыя.

10. У прамавугольным трохвугольніку медыяна, праведзеная да гіпатэнузы, роўна палове гіпатэнузы. Калі медыяна роўна палове стараны, да якой яна праведзена, то трохвугольнік прамавугольны.

11. Упісаны вугал, які абапіраецца на дыяметр, — прамы.

12. Сума вуглоў чатырохвугольніка роўна 360°.

13. Асноўныя задачы на пабудову:

1) пабудова трохвугольніка па трох старанах;
2) пабудова бісектрысы вугла;
3) пабудова вугла, роўнага дадзенаму;
4) пабудова сярэдзіны адрэзка;
5) пабудова прамой, перпендыкулярнай да дадзенай.

АДКАЗЫ

Глава 1

2. A. **3.** а) 30 см; б) 21 дм. **4.** 90 см. **5.** а) Не могуць; б) могуць. **8.** 96 см. **9.** а) 48 см; б) 144 см. **10*.** а) 22 см; б) $\frac{1}{2}(a+b)$. **12*.** Прамая EG перасякае AM і AD. **15.** 70 см. **16.** 14 см. **17.** 24 см. **18*.** 49 поўных абаротаў. **19*.** 3 см. **21.** а) 4 вострыя; б) 3 тупыя. **22.** 51°. **23.** 30°. **25.** 50°. **26.** 33°. **27.** 66°. **28*.** 115°. **29*.** а) 100°; б) $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$. **30.** а) 140°; б) 105°; в) 39°40′. **31.** 125°. **32.** 75°. **33.** 130°. **34.** 120°. **35.** а) 20°, 160°, 160°; б) 110°, 70°, 70°; в) 90°, 90°, 90°. **36.** $\angle 1 = \angle 4 = 99°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 36°$. **37.** $\angle 1 = \angle 3 = 125°$, $\angle 2 = \angle 4 = 55°$. **38.** 243°. **39.** 60°. Улічыце, што $3\beta + 3\gamma = 3 \cdot 180°$ і $\alpha = \gamma$. **40.** а) 104°; б) 140°; в) 72°; г) 105°. **41.** в). **42*.** 180°. **43*.** 108°, 72°. **44*.** 15°, 15°, 30°, 30°, 45°, 45°, 90°, 90°. **45.** а) 42°; б) 138°. **46.** 65°. **47.** 4. **48.** 80°.

Глава 2

51. $MN = 6$ см, $NK = 7$ см, $MK = 5$ см. **52.** $\angle K = 30°$, $\angle E = 90°$, $\angle D = 60°$. **53.** Усе стораны па 12 дм. **54.** а) 32; б) 58; в) 30; г) 46. **55.** 8 см. **56.** 20 см. **57.** 22 см, 24 см, 44 см. **58.** 4 : 5. **59.** 8 м, 12 м, 16 м. **60.** 144 см. **62*.** $P_1 = ka + kb + kc = k(a + b + c) = k \cdot P$. **65.** 36 дм. **67.** 42 см. **68.** 6 см, 5 см. **75.** 21 см. **76.** 30 см. **79.** 56 см. **81*.** 6 см. **84.** 20 см. **85.** 4 м. **86.** 45 см. **90.** 18 см. **91.** 64 см. **95*.** 26 см. **98*.** 20 м. **100.** г) 61°. **101.** 14,4 см. **102.** 42 см. **104.** 26 см. **106*.** 20 см. **107*.** 12 см. **111.** 84°. **113.** 17 дм. **119.** 7,5 м. **120.** 42°. **121.** 12 см. **122.** 56 см.

Глава 3

129. $c \parallel e$ (рыс. 175). **134.** Не перасякаюцца. **139.** $a \parallel c$, $b \parallel d$. **142.** $c \parallel d$, $c \parallel e$, $d \parallel e$. **144*.** 18. **145.** а) 125°; б) 118°; в) 38°; г) 97°. **146.** 235°. **147.** 120°. **148.** 50 см. **149.** 4 см. **150.** 108°. **151.** 70°. **154.** а) 124°; б) 142°; в) 84°. **155.** 72°. **158.** 24 см.

159*. 8 см. **160*.** Пабудуйце прамую, паралельную адной са старон вугла. **163.** 120°. **164.** 32°. **165.** На 100°. **166.** 69°. **169.** Дакажыце, што $\triangle AOB = \triangle CKD$, $K(4; -4)$, прадоўжыце CD да перасячэння з воссю Ox. **170*.** Не, няправільнае. **171*.** Не, няправільнае.

Глава 4

172. а) 70°; б) 70°; в) 60°; г) 30°. **173.** а) 80°; б) 8; в) 12; г) 28°. **174.** 100°. **175.** 150°. **176.** 10°. **178.** 40°, 50°. **179.** 24 см. **182.** 36°, 72°, 72°. **183.** 70°. **184.** 122° (гл. ключавую задачу № 2 на с. 120). **186*.** 66°. **187*.** 26°. **188*.** 360°. **189*.** 15°, 15°, 150°. **193.** б) 36°30′; в) $\frac{1}{2}\alpha$. **194.** 7 : 6 : 5. **195.** 72°, 72°, 36°. **196.** 130°. **199*.** 130°. **200*.** 60°. **201*.** 36°, 36°, 108°. **202*.** 23°. **204.** 60°. **207.** 12 см. **211.** а) З'яўляюцца; б) не з'яўляюцца; в) не з'яўляюцца. **212.** а) 25 см; б) 9 см, 9 см. **213.** а) Нельга; б) нельга. **216*.** 15 м. **217*.** а) У пункце C; б) на адрэзку AB. **223.** 8 см. **225.** 32 см. **227*.** 264 см^2. **231.** 64°. **232.** 40°. **233.** 30 см. **236*.** 50°. **239.** 74 см. **240.** 19 см. **241.** 60°. **242.** 32 см. **243.** 72 см. **244.** 36 см, 12 см. **245*.** 48 м. **246.** 2 см або 8 см. **247.** 17 см. **249.** 16 см. **250.** 38 см. **251.** 8,1 см. **252*.** 6 дм.

ЗМЕСТ

Глава V. Задачы на пабудову

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Казакоў Валерый Уладзіміравіч

ГЕАМЕТРЫЯ

Вучэбны дапаможнік для 7 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання

2-е выданне, выпраўленае і дапоўненае

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева.* Рэдактар *Д. І. Сімановіч.* Мастак *А. А. Жданоўская.* Мастацкі рэдактар *А. А. Жданоўская.* Тэхнічнае рэдагаванне і камп’ютарная вёрстка *Г. А. Дудко.* Карэктары *В. С. Казіцкая, А. П. Тхір, Г. В. Алешка.*

Падпісана да друку 31.05.2022. Фармат $70\times100^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 14,95 + 0,33 форз. Ул.-выд. арк. 9,6 + 0,4 форз. Тыраж 13 013 экз. Заказ .

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь.
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013.
Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа».
Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 от 10.09.2018.
Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.