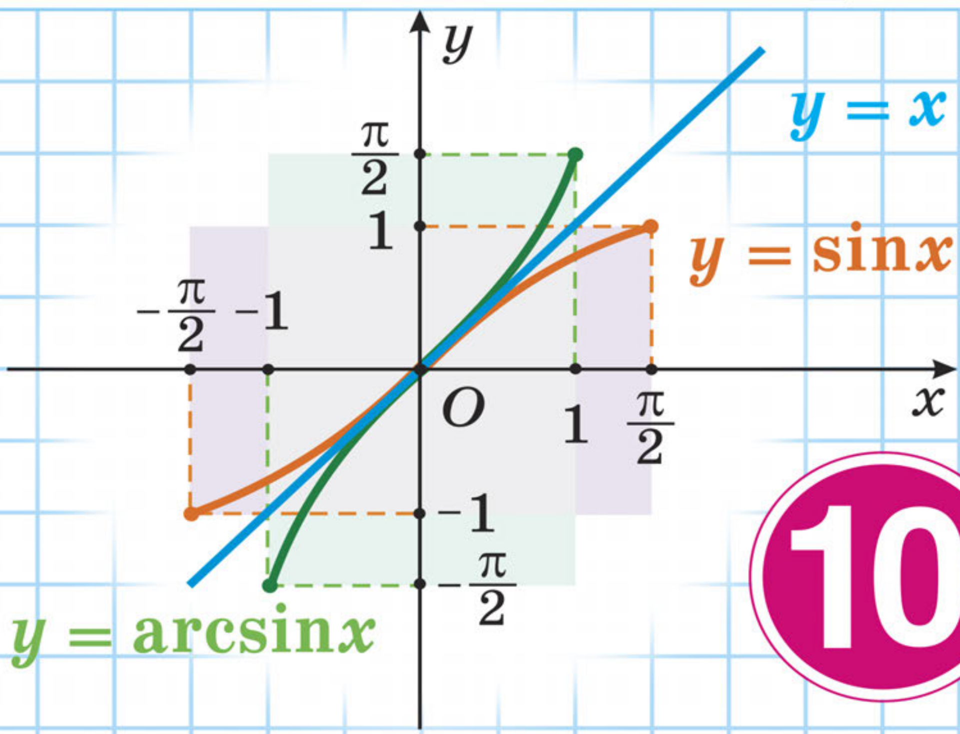
І. Г. Арэф'ева В. М. Пірутка

ЗБОРНІК ЗАДАЧ
па алгебры



10

І. Г. Арэф'ева   В. М. Пірутка

ЗБОРНІК ЗАДАЧ
па алгебры

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Дапушчана
Міністэрствам адукацыі
Рэспублікі Беларусь

Мінск «Народная асвета» 2020

УДК 512(075.3=161.3)
ББК 22.14я721
А89

Пераклад з рускай мовы *Н. М. Алганавай*

Рэцэнзенты:
кафедра вышэйшай алгебры і абароны інфармацыі механіка-матэматычнага факультэта Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта (доктар фізіка-матэматычных навук, прафесар, загадчык кафедры *В. В. Беняш-Крывец*);
настаўнік матэматыкі кваліфікацыйнай катэгорыі «настаўнік-метадыст» ліцэя Беларускага нацыянальнага тэхнічнага ўніверсітэта *А. Я. Цыбулька*

ISBN 978-985-03-3253-0

Шаноўныя дзесяцікласнікі!

Гэты дапаможнік спатрэбіцца вам для падрыхтоўкі да ўрокаў, экзаменаў і ўступных іспытаў па матэматыцы, а таксама для паглыблення ведаў па алгебры.

Кніга складаецца з 6 раздзелаў, кожны з якіх падзелены на параграфы.

У раздзелах 3, 4 і 5 размешчаны заданні па тэмах, якія адпавядаюць вучэбнаму дапаможніку «Алгебра, 10». Сярод іх сустрэнуцца таксама і заданні з нестандартнымі ўмовамі.

Раздзелы 1, 2 і 6 прапануюцца для вывучэння матэматыкі на павышаным узроўні. Кожны параграф у гэтых раздзелах уключае:

- новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення; алгарытмы;
- важныя правілы і асноўныя прыклады з рашэннямі і падрабязным апісаннем паслядоўнасці дзеянняў;
- трэніровачныя практыкаванні і ўзоры прымянення тэорыі ў заданнях з нестандартнымі ўмовамі.

У кнізе вы сустрэнеце наступныя ўмоўныя абазначэнні:

 — новы тэарэтычны матэрыял і метады яго прымянення;

 — алгарытмы;

 — матэрыял павышанага ўзроўню;

 — трэніровачныя практыкаванні;

 — дадатковы матэрыял для паглыблення матэматычных ведаў.

Для абагульнення вывучанага раней матэрыялу ў вучэбным дапаможніку размешчаны раздзел «Паўтарэнне. Тэматычныя тэсты».

Дадатковыя матэрыялы да кнігі, а таксама адказы да трэніровачных практыкаванняў можна знайсці на сайце http://e-vedy.adu.by, курс «Матэматыка».

Жадаем поспехаў!

§ 1. Складаная функцыя

Пры вывучэнні ўласцівасцей функцый і пабудове графікаў часта неабходна вылічваць значэнні функцыі для розных значэнняў аргумента.

Напрыклад, для таго каб вылічыць значэнне функцыі $y=f(x)=\sqrt{x^2-4}$ па зададзеным значэнні аргумента, спачатку трэба вылічыць значэнне функцыі $t=g(x)=x^2-4$, а затым для знойдзенага значэння t вылічыць значэнне функцыі $y=h(t)=\sqrt{t}$.

Функцыю $t=g(x)=x^2-4$ называюць прамежкавай функцыяй, а функцыю $y=f(x)=\sqrt{x^2-4}$ — складанай функцыяй і запісваюць у выглядзе $y=f(x)=h(g(x))$.

Азначэнне

Няхай зададзены функцыі $h(x)$ і $g(x)$ такія, што $E(g(x))\subset D(h(x))$, тады функцыя $y=f(x)=h(g(x))$ называецца складанай функцыяй або кампазіцыяй функцый $h(x)$ і $g(x)$: $f=h\circ g$.

Прыклад 1. Зададзены функцыі $f(x)=\sin x$ і $g(x)=2x+3$. З дапамогай формул задайце функцыі:

а) $y=f(g(x))$; б) $y=g(f(x))$.

Рашэнне.

а) Паколькі для складанай функцыі $y=f(g(x))$ функцыя $g(x)$ з'яўляецца прамежкавай, то заменім у формуле $f(x)=\sin x$ зменную x на $2x+3$. Атрымаем складаную функцыю $y=f(g(x))=\sin(2x+3)$.

б) Паколькі для складанай функцыі $y=g(f(x))$ функцыя $y=f(x)$ з'яўляецца прамежкавай, то заменім у формуле $g(x)=2x+3$ зменную x на $\sin x$. Атрымаем складаную функцыю $y=g(f(x))=2\sin x+3$.

Прыклад 2. Запішыце функцыі, з дапамогай якіх зададзена кампазіцыя (складаная функцыя):

а) $y = f(g(x)) = \sqrt{2x+7}$; б) $y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5$.

Рашэнне.

а) Установім парадак дзеянняў пры вылічэнні значэнняў дадзенай функцыі: $x \xrightarrow{t = g(x)} 2x + 7 \xrightarrow{y = f(t)} \sqrt{t}$.

Такім чынам, складаная функцыя $y = f(g(x)) = \sqrt{2x+7}$ зададзена ў выглядзе кампазіцыі дзвюх функцый: $t = g(x) = 2x + 7$ і $y = f(t) = \sqrt{t}$, $y = f \circ g$.

б) Установім парадак дзеянняў пры вылічэнні значэнняў дадзенай функцыі: $x \xrightarrow{t = g(x)} 2x^2 - 1 \xrightarrow{y = f(t)} t^5$.

Такім чынам, складаная функцыя $y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5$ зададзена ў выглядзе кампазіцыі дзвюх функцый: $t = g(x) = 2x^2 - 1$ і $y = f(t) = t^5$, $y = f \circ g$.

1.1. Зададзены функцыі $f(x) = \frac{x}{x+1}$; $g(x) = \sin x$; $h(x) = \sqrt[3]{x}$. З дапамогай формул задайце функцыі:

$y = f(g(x))$; $y = g(f(x))$; $y = h(g(x))$;
$y = h(f(x))$; $y = f(h(x))$; $y = g(h(x))$.

1.2. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y = \sqrt{1 - x^2}$; б) $y = \frac{1}{x^4 - 1}$; в) $y = \sqrt{x - 8}$; г) $y = \frac{2x}{\sqrt{1-x}}$.

Запішыце функцыі, з дапамогай якіх зададзена кампазіцыя.

1.3. Зададзены функцыі $f(x) = 4 - x^3$ і $g(x) = \sqrt{x}$. Знайдзіце: $f(g(4))$; $f(g(1))$; $g(f(0))$; $g(f(-2))$.

1.4. Дакажыце, што кампазіцыя дзвюх нарастальных функцый — нарастальная функцыя.

1.5. Дакажыце, што кампазіцыя дзвюх спадальных функцый — спадальная функцыя.

1.6. Дакажыце, што кампазіцыя спадальнай і нарастальнай функцый ёсць спадальная функцыя.

1.7. Дакажыце, што кампазіцыя нарастальнай і спадальнай функцый ёсць спадальная функцыя.

1.8. Запоўніце ў сшытку табліцу.

$h(x)$	$p(x)$	$h(p(x))$	$p(h(x))$
$\sqrt{x}$	$4x^3$		
		$\sqrt{3-x}$	
			$(4x-1)^5$
		$(2x+1)^3$	

1.9. Функцыі f і g зададзены табліцамі.

Значэнні аргумента	1	3	−2	0	−3
Значэнні функцыі f	4	2	−1	2	−4

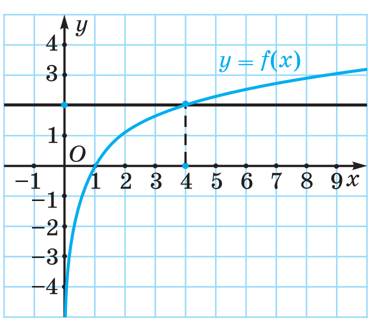
Значэнні аргумента	1	3	−2	0	−3
Значэнні функцыі g	0	−3	1	−2	3

Знайдзіце значэнні функцыі $f(g(x))$.

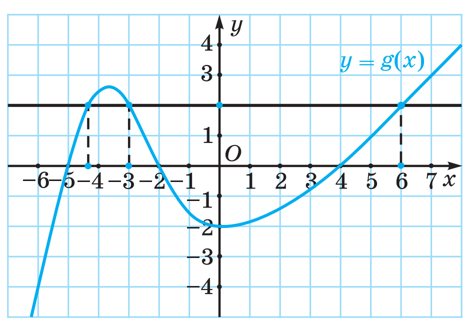
Значэнні аргумента	1	3	−2	0	−3
Значэнні функцыі $f(g(x))$					

§ 2. Адваротная функцыя

Разгледзім функцыі $y = f(x)$ і $y = g(x)$, відарысы якіх паказаны адпаведна на рысунках 1 і 2. Заўважым, што функцыя $y = f(x)$ кожнае сваё значэнне прымае толькі пры адным значэнні аргумента, а функцыя



Рыс. 1



Рыс. 2

$y = g(x)$ некаторыя свае значэнні прымае больш чым пры адным значэнні аргумента. Графічна гэта азначае, што любая прамая, паралельная восі абсцыс, перасякае графік функцыі $y = f(x)$ не больш чым у адным пункце. Функцыя $y = g(x)$ такой уласцівасці не мае.

Азначэнне 1

Функцыя, якая кожнае сваё значэнне прымае толькі пры адным значэнні аргумента, называецца **абарачальнай**.

Прыклад 1. Вызначце, ці абарачальная функцыя, зададзеная аналітычна: а) $y = 3x - 2$; б) $y = x^2$.

Рашэнне. Каб праверыць, ці з'яўляецца функцыя абарачальнай, рэшым ураўненне, якое задае функцыю, адносна аргумента.

а) $y = 3x - 2 \Leftrightarrow 3x = y + 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$.

Кожнаму значэнню y у гэтым лінейным ураўненні адпавядае адзінае значэнне x, г. зн. залежнасць x ад y з'яўляецца функцыяй, значыць, функцыя $y = 3x - 2$ абарачальная.

б) $y = x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{y}, \\ x = -\sqrt{y} \end{array}\right.$ пры $y \geqslant 0$.

Заўважым, што кожнаму значэнню $y > 0$ адпавядаюць два значэнні x, значыць, функцыя $y = x^2$ не з'яўляецца абарачальнай.

Алгарытм вызначэння абарачальнасці функцыі, зададзенай формулай

Няхай функцыя зададзена аналітычна, г. зн. формулай $y = f(x)$.

① Рашыць ураўненне $y = f(x)$ адносна x.

② Вызначыць, ці абарачальная функцыя: калі формула, якая выражае x праз y, задае функцыю зменнай x ад зменнай y, то дадзеная функцыя абарачальная.

Азначэнне 2

Няхай зададзена абарачальная функцыя $y = f(x)$ з абсягам вызначэння $D(f)$ і мноствам значэнняў $E(f)$.

Функцыя $g(x)$ з абсягам вызначэння $D(g) = E(f)$ і мноствам значэнняў $E(g) = D(f)$, якая кожнаму значэнню зменнай y з $E(f)$ ставіць у адпаведнасць адзінае значэнне зменнай x з $D(f)$ так, што $x = g(y)$, называецца адваротнай для функцыі $y = f(x)$.

Аргументам адваротнай функцыі з'яўляецца зменная y, а значэннем функцыі з'яўляецца зменная x. Звычайна зменныя пераабазначаюць традыцыйным чынам: аргумент адваротнай функцыі абазначаюць праз x, а значэнні функцыі — праз y.

Прыклад 2. Вызначце, ці з'яўляецца функцыя $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$ абарачальнай. Знайдзіце адваротную да яе функцыю, калі яна існуе.

Рашэнне. Разгледзім функцыю $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$. $D(f) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$. Выразім зменную x праз y, атрымаем $x = \frac{2}{y} + 3$. Гэта формула кожнаму значэнню $y \neq 0$ ставіць у адпаведнасць адзінае значэнне x, значыць, функцыя $y = f(x) = \frac{2}{x-3}$ абарачальная.

У формуле $x = \frac{2}{y} + 3$ пераабазначым зменныя: $y = g(x) = \frac{2}{x} + 3$ — атрымалі функцыю, адваротную да дадзенай. $D(g) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; $E(g) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Алгарытм запісу функцыі, адваротнай да дадзенай абарачальнай функцыі, зададзенай аналітычна

Няхай зададзена абарачальная функцыя $y = f(x)$ з абсягам вызначэння $D(f)$ і мноствам значэнняў $E(f)$.

① З роўнасці $y = f(x)$ выразіць x праз y, г. зн. рашыць ураўненне $y = f(x)$ адносна зменнай x.

② У атрыманай формуле адваротнай функцыі $x = g(y)$ абазначыць аргумент функцыі праз x, а значэнне функцыі праз y.

③ Запісаць функцыю $y = g(x)$.

④ Пазначыць абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі $y = g(x)$: $D(g) = E(f)$; $E(g) = D(f)$.

Тэарэма 1

Калі функцыя з'яўляецца нарастальнай (спадальнай) на некаторым прамежку, то яна абарачальная на гэтым прамежку, г. зн. існуе адваротная да яе функцыя.

Доказ. Няхай функцыя $y = f(x)$ нарастае (спадае) на некаторым прамежку. Гэта значыць, што для любых двух значэнняў аргумента x_1 і x_2 з гэтага прамежку такіх, што $x_1 > x_2$, вынікае, што $f(x_1) > f(x_2)$, калі функцыя нарастае ($f(x_1) < f(x_2)$, калі функцыя спадае). Значыць, розным значэнням аргумента адпавядаюць розныя значэнні функцыі, і, такім чынам, функцыя абарачальная.

Заўвага. Калі дадзеная функцыя з'яўляецца нарастальнай (спадальнай), то адваротная функцыя таксама з'яўляецца нарастальнай (спадальнай).

Прыклад 3. Вызначце, ці з'яўляецца функцыя $y = x^2 - 4x + 5$ для $x \in (2; +\infty)$ абарачальнай. Калі функцыя абарачальная, то знайдзіце адваротную да яе функцыю.

x	$-\infty$ 2 $+\infty$
f $a > 0$	↘ ↗

Рашэнне. Вызначым прамежкі манатоннасці функцыі $y = x^2 - 4x + 5$.

Для $x \in (2; +\infty)$ квадратычная функцыя $y = x^2 - 4x + 5$ з'яўляецца нарастальнай, значыць, яна абарачальная на пазначаным прамежку.

Знойдзем адваротную функцыю па алгарытме.

Заўважым, што $D(f) = (2; +\infty)$, а $E(f) = (1; +\infty)$.

① З роўнасці $y = x^2 - 4x + 5$ выразім x праз y, г. зн. рэшым ураўненне $y = x^2 - 4x + 5$ адносна зменнай x:

$x^2 - 4x + 5 - y = 0$, $D = \sqrt{4y - 4}$, $x_1 = 2 + \sqrt{y - 1}$, $x_2 = 2 - \sqrt{y - 1}$, паколькі $x \in (2; +\infty)$, то выбіраем $x = 2 + \sqrt{y - 1}$.

② Пераабазначым зменныя: $y = 2 + \sqrt{x - 1}$.

③ Атрымаем адваротную функцыю

$g(x) = y = 2 + \sqrt{x - 1}$.

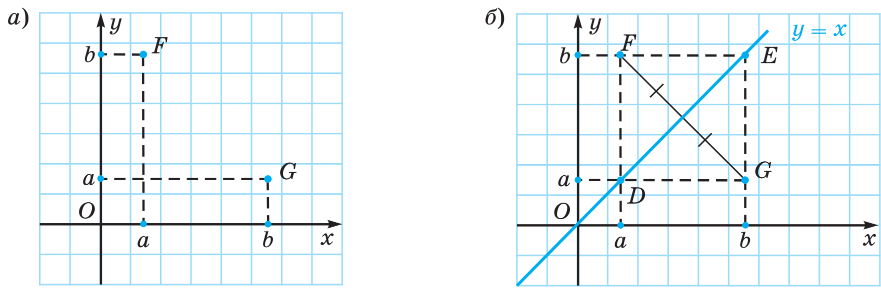
④ $D(g) = (1; +\infty)$, $E(g) = (2; +\infty)$.

Заўвага. Калі функцыя $y = g(x)$ з'яўляецца адваротнай да функцыі $y = f(x)$, то функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца адваротнай да функцыі $y = g(x)$. Гэтыя функцыі называюцца ўзаемна адваротнымі.

Тэарэма 2

Графікі ўзаемна адваротных функцый сіметрычныя адносна прамой $y = x$.

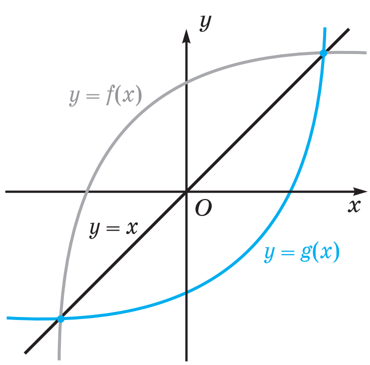
Доказ. Няхай пункт $F(a; b)$ належыць графіку абарачальнай функцыі $y = f(x)$, тады для адваротнай функцыі $y = g(x)$ справядлівая роўнасць $a = g(b)$, г. зн. пункт $G(b; a)$ належыць графіку адваротнай функцыі (рыс. 3, *а*).



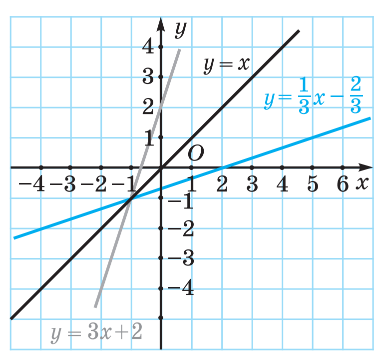
Рыс. 3

Прамавугольнік $FEGD$ (рыс. 3, *б*) з'яўляецца квадратам, паколькі яго сумежныя стораны роўныя. Вяршыні квадрата $FEGD$ — пункты $D(a; a)$ і $E(b; b)$ — належаць прамой $y = x$. Паколькі дыяганалі квадрата перпендыкулярныя і падзяляюцца пунктам перасячэння напалам, то пункты F і G сіметрычныя адносна дыяганалі DE, г. зн. адносна прамой $y = x$. Такім чынам, графікі ўзаемна адваротных функцый сіметрычныя адносна прамой $y = x$ (рыс. 4).

Напрыклад, паказаныя на рысунку 5 графікі ўзаемна адваротных функцый $y = 3x + 2$ і $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$ сіметрычныя адносна прамой $y = x$.



Рыс. 4



Рыс. 5

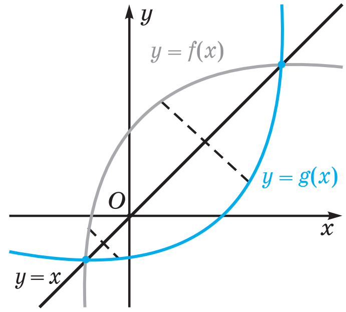
Алгарытм пабудовы графіка функцыі, адваротнай да дадзенай абарачальнай функцыі

① Для дадзенай функцыі $y = f(x)$ пазначыць на восі абсцыс абсяг вызначэння, а на восі ардынат — мноства значэнняў.

② Для адваротнай функцыі пазначыць на восі абсцыс $D(g) = E(f)$, а на восі ардынат — $E(g) = D(f)$.

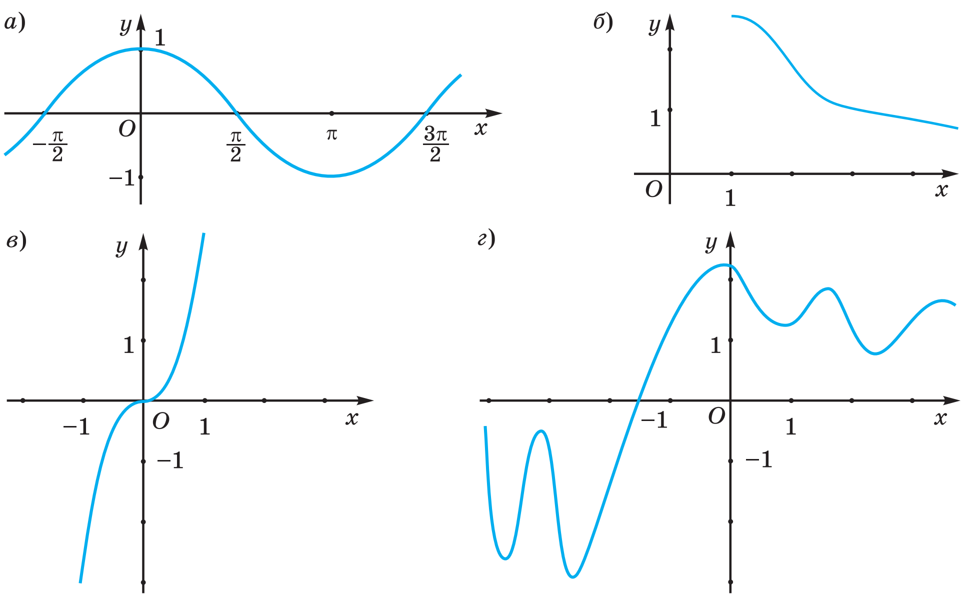
③ Пабудаваць прамую $y = x$.

④ Пабудаваць графік функцыі $y = g(x)$, сіметрычны графіку функцыі $y = f(x)$ адносна прамой $y = x$ (рыс. 6).

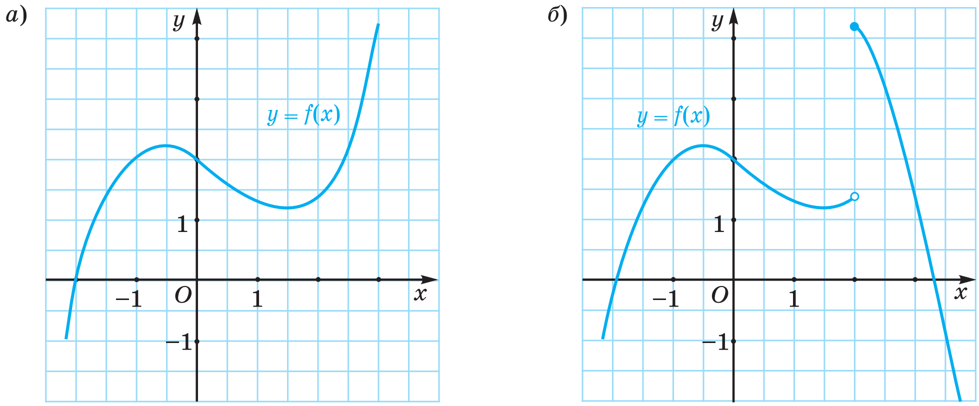


Рыс. 6

2.1. Сярод рысункаў 7, *а*—*г* выберыце тыя, на якіх паказаны відарысы графікаў абарачальных функцый.



Рыс. 7



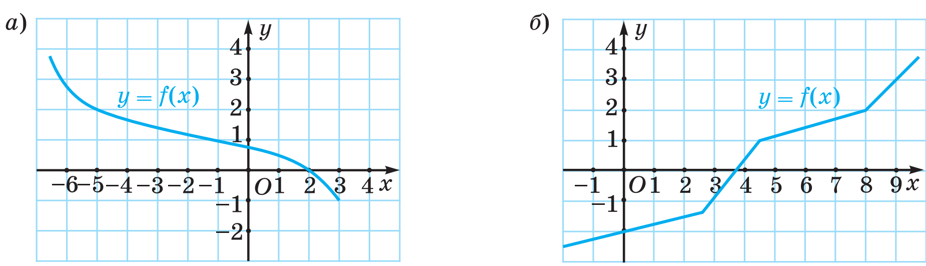
Рыс. 8

2.2. На рысунку 8 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Дакажыце, што яна не мае адваротнай функцыі.

2.3. На рысунку 9 паказаны відарыс графіка абарачальнай функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце значэнні адваротнай да яе функцыі пры значэннях аргумента, роўных:

а) 2; 0; 1; −1; б) 0; −1; 2; 3.

Назавіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў адваротнай функцыі.



Рыс. 9

2.4. Знайдзіце функцыю, адваротную лінейнай функцыі $y = f(x)$:

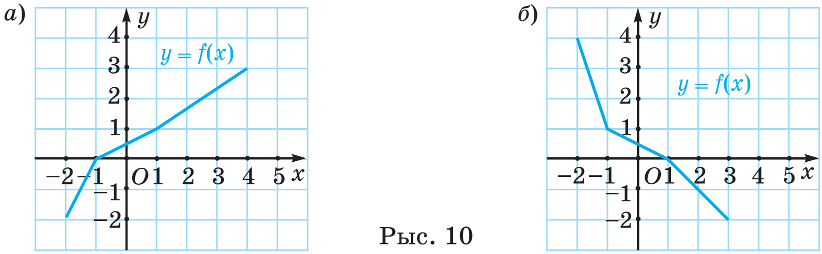
а) $y = 4x - 1$; б) $y = -x + 1$; в) $y = 5x - 3$;
г) $y = 0{,}5x - 2$; д) $y = -0{,}5x - 1$; е) $y = -0{,}1x$.

2.5. Прывядзіце прыклады графікаў дзвюх узаемна адваротных функцый $y = f(x)$ і $y = g(x)$ такіх, што $f(2) = 3$; $g(-2) = 1$.

2.6. Пабудуйце ў адной сістэме каардынат графік дадзенай функцыі і графік функцыі, адваротнай да яе:

а) $y = -3x + 1$; б) $y = \sqrt{x-4}$.

2.7. Функцыя $y = f(x)$ зададзена графікам (рыс. 10). Пабудуйце графік адваротнай да яе функцыі.



Рыс. 10

2.8. Вызначце, ці з'яўляецца функцыя $y = -x^2 - 4x - 3$ пры $x \in (-2; +\infty)$ абарачальнай. Калі функцыя абарачальная, то знайдзіце адваротную да яе функцыю.

2.9. Функцыя $y = f(x)$ мае больш за адзін нуль. Ці мае яна адваротную функцыю?

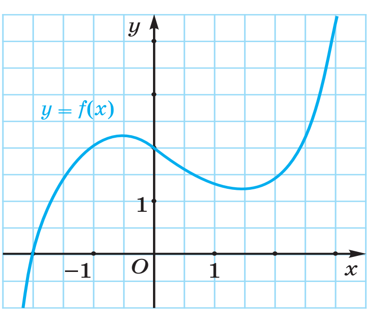
§ 3. Пабудова графікаў функцый $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ з дапамогай пераўтварэнняў графіка функцыі $y = f(x)$

Пабудова графіка функцыі $y = f(|x|)$

Няхай зададзены графік некаторай функцыі $y = f(x)$ (рыс. 11). Вызначым, якія пераўтварэнні графіка гэтай функцыі трэба выканаць, каб атрымаць графік функцыі $y = f(|x|)$.

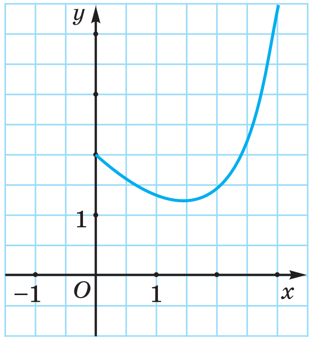
Паколькі $|x| = \begin{cases} x, \text{ калі } x \geqslant 0; \\ -x, \text{ калі } x < 0, \end{cases}$ то

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), \text{ калі } x \geqslant 0; \\ f(-x), \text{ калі } x < 0. \end{cases}$$

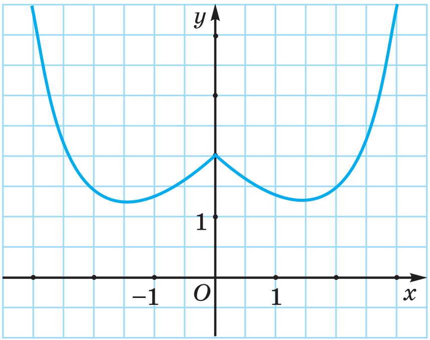


Рыс. 11

Таму, каб атрымаць графік функцыі $y = f(|x|)$, ведаючы графік функцыі $y = f(x)$ (гл. рыс. 11), можна разгледзець яго пабудову для $x \geqslant 0$ і $x < 0$.



Рыс. 12



Рыс. 13

Калі $x \geqslant 0$, то графік функцыі $y = f(|x|)$ супадае з графікам функцыі $y = f(x)$ (рыс. 12).

Калі $x < 0$, то значэнні функцыі $y = f(|x|)$ пры адмоўных значэннях аргумента супадаюць са значэннямі функцыі пры адваротных ім дадатных значэннях аргумента. Гэта значыць, што пункты графіка функцыі $y = f(|x|)$ для $x < 0$ сіметрычны пунктам графіка функцыі $y = f(|x|)$ для $x \geqslant 0$ адносна восі ардынат. Таму выдалім частку графіка функцыі $y = f(x)$, што ляжыць злева ад восі ардынат, і адлюструем сіметрычна адносна восі ардынат частку графіка функцыі $y = f(|x|)$, размешчаную справа ад восі ардынат.

На рысунку 13 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(|x|)$.

Адзначым, што функцыя $y = f(|x|)$ цотная, таму для яе пабудовы можна выкарыстоўваць уласцівасць графіка цотнай функцыі.

Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = f(|x|)$

① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.

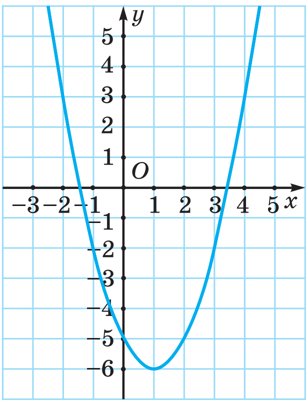
② Выдаліць частку графіка $y = f(x)$, размешчаную злева ад восі ардынат.

③ Адлюстраваць сіметрычна адносна восі ардынат частку графіка, размешчаную справа ад восі ардынат.

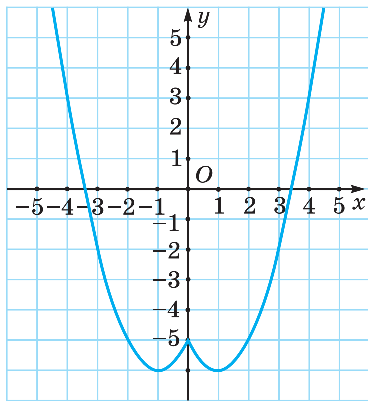
Прыклад 1. Пабудуйце графік функцыі $y = x^2 - 2|x| - 5$.

Рашэнне. Паколькі $|x|^2 = x^2$, то функцыю $y = x^2 - 2|x| - 5$ можна разглядаць як $y = f(|x|)$, дзе $f(x) = x^2 - 2x - 5$.

① 1) $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.



Рыс. 14



Рыс. 15

2) Каардынаты вяршыні парабалы: $x_{\text{в}} = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $y_{\text{в}} = 1^2 - 2 - 5 = -6$, $(1; -6)$. Вось сіметрыі парабалы $x = 1$.

3) Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс: $x^2 - 2x - 5 = 0$, $x_1 = 1 + \sqrt{6} \approx 3{,}4$; $x_2 = 1 - \sqrt{6} \approx -1{,}4$.

4) Пункт перасячэння графіка з воссю ардынат $(0; -5)$.

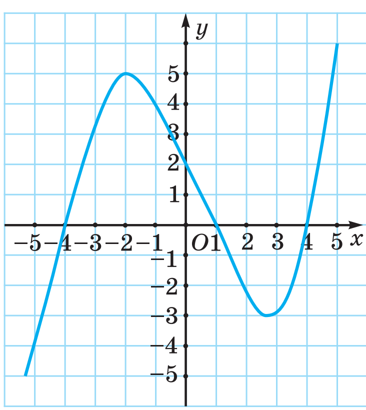
5) Пабудуем графік функцыі $f(x) = x^2 - 2x - 5$ (рыс. 14).

② Выдалім частку графіка, размешчаную злева ад восі ардынат.

③ Адлюструем сіметрычна адносна восі ардынат частку графіка, размешчаную справа ад восі ардынат (рыс. 15).

Пабудова графіка функцыі $y = |f(x)|$

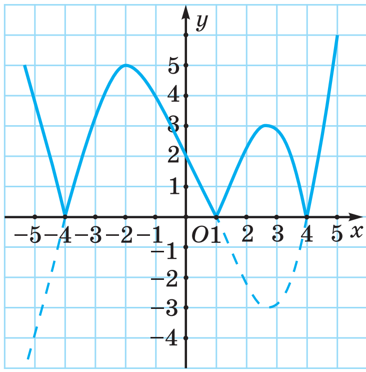
Няхай зададзены графік некаторай функцыі $y = f(x)$ (рыс. 16). Вызначым, якія пераўтварэнні графіка гэтай функцыі трэба выканаць, каб атрымаць графік функцыі $y = |f(x)|$.



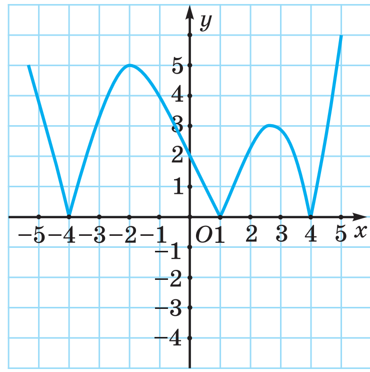
Рыс. 16

Паколькі

$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ калі } f(x) \geqslant 0; \\ -f(x), \text{ калі } f(x) < 0, \end{cases}$ то частка графіка функцыі $y = |f(x)|$, што ляжыць вышэй восі абсцыс, супадае з графікам функ-



Рыс. 17



Рыс. 18

цыі $y = f(x)$. Таксама застануцца без змен пункты перасячэння графіка функцыі $y = f(x)$ з воссю абсцыс (рыс. 17). Частка графіка $y = f(x)$, што ляжыць ніжэй восі абсцыс, заменіцца на сіметрычную ёй адносна восі абсцыс (рыс. 18).

Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = |f(x)|$

① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.
② Адлюстраваць сіметрычна адносна восі абсцыс частку графіка, размешчаную ніжэй восі абсцыс.
③ Выдаліць частку графіка, размешчаную ніжэй восі абсцыс.

Прыклад 2. Пабудуйце графік функцыі $f(x) = |x^2 - 2x|$.
Рашэнне.
① Для атрымання парабалы $y = x^2 - 2x$ выкарыстаем алгарытм пабудовы графіка квадратычнай функцыі.

1) $a = 1 > 0$, значыць, галіны парабалы накіраваны ўверх.

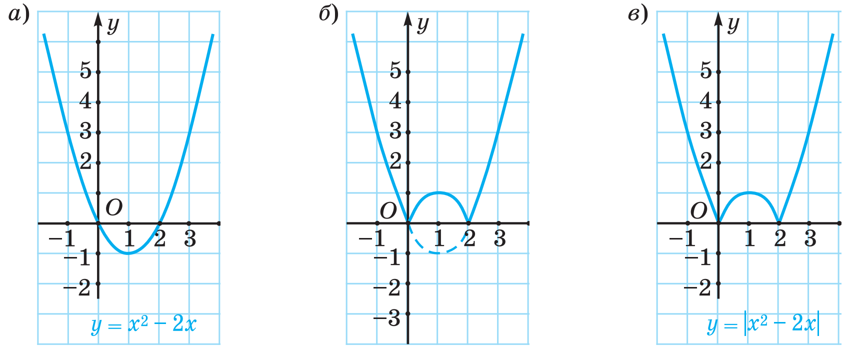
2) Каардынаты вяршыні парабалы:

$x_в = -\frac{-2}{2 \cdot 1} = 1$, $y_в = 1^2 - 2 = -1$, $(1; -1)$. Вось сіметрыі парабалы $x = 1$.

3) Пункты перасячэння графіка з воссю абсцыс: $x^2 - 2x = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 2$.
4) Пункт перасячэння графіка з воссю ардынат $(0; 0)$.

5) Пабудуем графік функцыі $f(x) = x^2 - 2x$ (рыс. 19, *а*).

② Адлюструем сіметрычна адносна восі абсцыс частку графіка, размешчаную ніжэй восі абсцыс (рыс. 19, *б*).



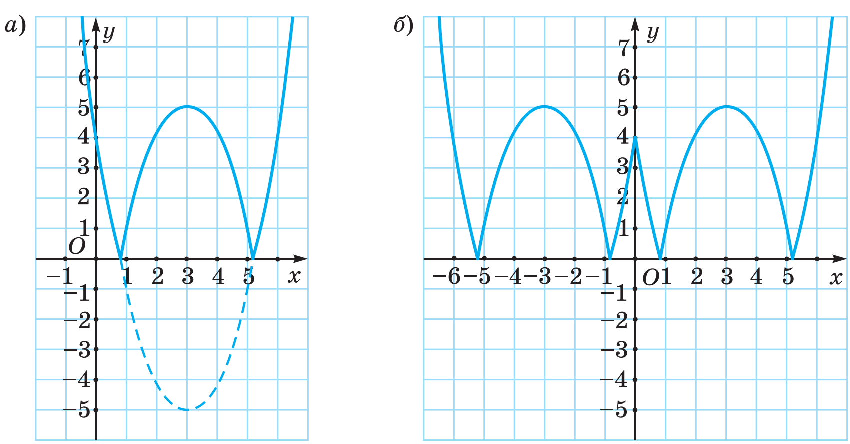
Рыс. 19

③ Выдалім частку графіка, размешчаную ніжэй восі абсцыс (рыс. 19, *в*).

Прыклад 3. Пабудуйце графік функцыі $y = \left| x^2 - 6|x| + 4 \right|$.

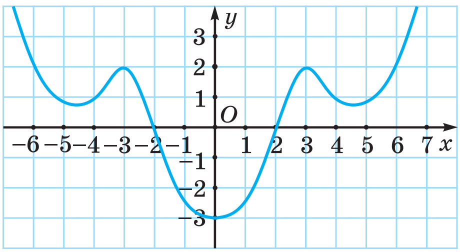
Рашэнне.

Паколькі функцыя $y = \left| x^2 - 6|x| + 4 \right|$ цотная, то пабудуем спачатку графік функцыі $y = \left| x^2 - 6x + 4 \right|$ (рыс. 20, *а*). Адлюструем правую частку пабудаванага графіка сіметрычна адносна восі ардынат і атрымаем графік функцыі $y = \left| x^2 - 6|x| + 4 \right|$ (рыс. 20, *б*).

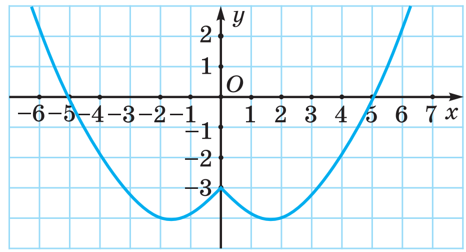


Рыс. 20

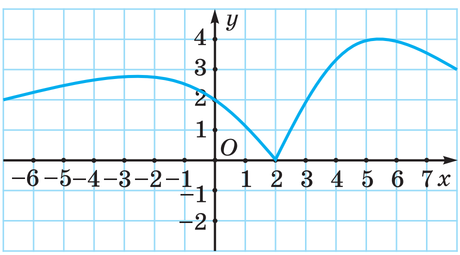
3.1. Якія з графікаў, паказаных на рысунках 21—24, можа быць графікам функцыі: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$?



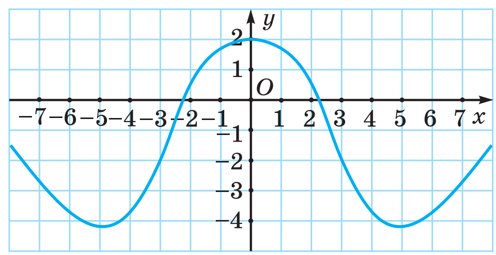
Рыс. 21



Рыс. 22

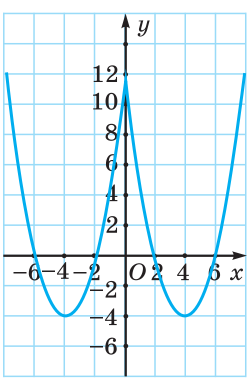


Рыс. 23

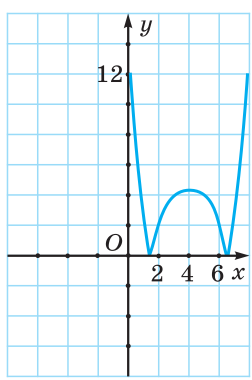


Рыс. 24

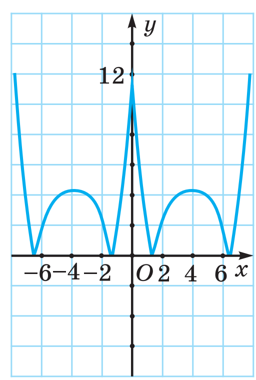
3.2. Якія з графікаў, паказаных на рысунках 25—27, можа быць графікам функцыі: а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$; в) $y = |f(|x|)|$?



Рыс. 25



Рыс. 26

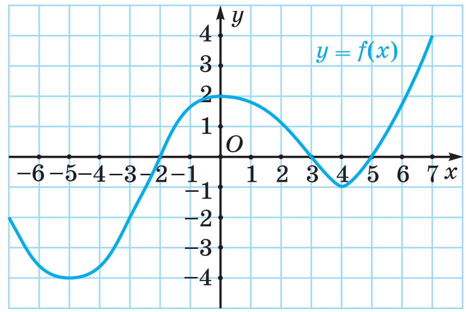


Рыс. 27

3.3. На рысунку 28 паказаны відарыс графіка функцыі $y = f(x)$. Перанясіце рысунак у сшытак і пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$;

в) $y = |f(|x|)|$.



Рыс. 28

3.4. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = f(|x|)$;

в) $y = |f(|x|)|$, калі:

1) $f(x) = x^2 - 6x - 7$; 2) $f(x) = -x^2 - 6x + 5$.

3.5. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \left|\sqrt{x} - 4\right|$; б) $y = \sqrt{|x|} - 4$; в) $y = \left|\sqrt{|x|} - 4\right|$.

3.6. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \left|\frac{6}{x-1}\right|$; б) $y = \frac{6}{|x|-1}$; в) $y = \left|\frac{6}{|x|-1}\right|$.

3.7. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |x^2 - 4|$; б) $y = \left|\sqrt{x+3} - 1\right|$;

в) $y = |2x - 3|$; г) $y = \left|-\frac{8}{x}\right|$.

3.8. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = x^2 - 4|x| + 3$; б) $y = \sqrt{|x| - 2} + 1$;

в) $y = -3|x| + 4$; г) $y = \frac{12}{|x|}$.

3.9. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \left|-x^2 - 2|x| + 8\right|$; б) $y = \left|\sqrt{|x| + 4} - 3\right|$;

в) $y = \left|0{,}5|x| + 2\right|$; г) $y = \left|-\frac{4}{|x|+3}\right|$.

§ 4. Функцыі $y = [x]$, $y = \{x\}$ і іх уласцівасці

Азначэнне 1

Цэлай часткай ліку называецца найбольшы цэлы лік, які не перавышае дадзены лік.

Напрыклад, цэлая частка ліку 2,3 роўна 2, а цэлая частка ліку −3,4 роўна −4. Для абазначэння цэлай часткі ўводзяць сімвал $[a]$, чытаюць «цэлая частка ліку *a*, або анцье ад *a*» (ад фр. *antier* — цэлы). Разгледжаныя прыклады запісваюць у выглядзе: $[2{,}3] = 2$; $[-3{,}4] = -4$.

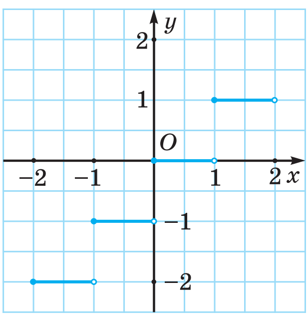
Паколькі кожнаму рэчаіснаму ліку адпавядае яго адзіная цэлая частка, то на мностве ўсіх рэчаісных лікаў вызначана функцыя $y = [x]$.

Уласцівасці функцыі $y = [x]$

1. Абсяг вызначэння функцыі $y = [x]$. $D([x]) = \boldsymbol{R}$.

2. Мноства значэнняў функцыі $y = [x]$. $E([x]) = \boldsymbol{Z}$ па азначэнні цэлай часткі ліку.

3. Нулі функцыі $y = [x]$. $x \in [0;\, 1)$, паколькі цэлая частка ліку $0 \leqslant a < 1$ роўна нулю.



Рыс. 29

4. Прамежкі знакапастаянства функцыі $y = [x]$. $y > 0,\ x \in [1;\, +\infty)$, $y < 0,\ x \in (-\infty;\, 0)$.

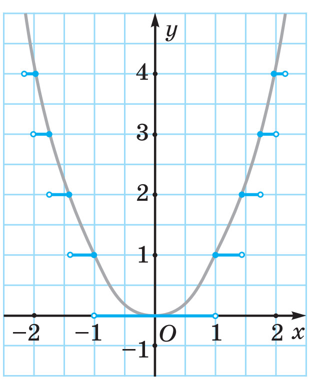
5. Функцыя $y = [x]$ не спадальная, паколькі для любых сапраўдных значэнняў аргумента такіх, што $x_1 > x_2$, вынікае $[x_1] \geqslant [x_2]$.

6. Калі $n \leqslant x < n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $[x] = n$.

Відарыс графіка функцыі $y = [x]$ паказаны на рысунку 29.

Прыклад 1. Пабудуйце графік функцыі $y = [x^2]$.

Рашэнне.



Рыс. 30

1. Пабудуем графік функцыі $y = x^2$.
2. Правядзём прамыя $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. Адзначым пункты перасячэння гэтых прамых з графікам функцыі $y = x^2$, што належаць графіку $y = [x^2]$.
4. Кожную частку графіка паміж прамымі $y = n$ і $y = n + 1$ заменім яе праекцыяй на прамую $y = n$.

Атрымаем графік функцыі $y = [x^2]$ — ступеньчатую фігуру, якая складаецца з частак прамых $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 30).

Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = [f(x)]$

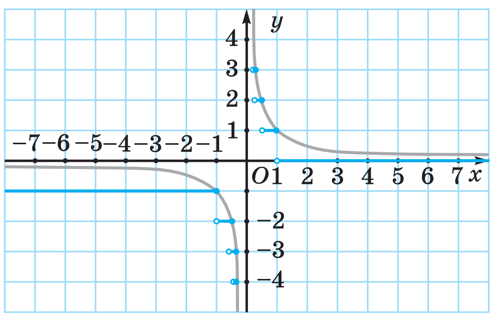
① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.

② Правесці прамыя $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Адзначыць пункты перасячэння гэтых прамых з графікам $y = f(x)$. Кожную частку графіка паміж прамымі $y = n$ і $y = n + 1$ замяніць яе праекцыяй на прамую $y = n$.

Прыклад 2. Пабудуйце графік функцыі $y = \left[\frac{1}{x}\right]$.

Рашэнне. Відарыс графіка функцыі $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ паказаны на рысунку 31.



Рыс. 31

Прыклад 3. Пабудуйце графік функцыі $y = [x]^2$.

Рашэнне.

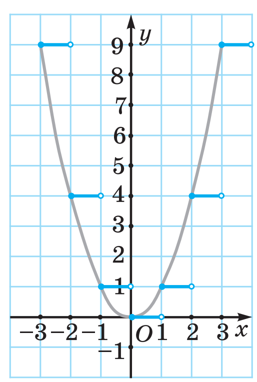
① Пабудуем графік функцыі $y = x^2$.

② Правядзём прамыя $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Адзначым пункты перасячэння гэтых прамых з графікам функцыі $y = x^2$, што належаць графіку функцыі $y = [x]^2$.

Часткі графіка паміж прамымі $x = n$ і $x = n + 1$ заменім іх праекцыямі на прамую $y = n^2$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Атрымаем графік функцыі $y = [x]^2$ — ступеньчатую фігуру, якая складаецца з частак прамых $y = n^2$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 32).



Рыс. 32

Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = f([x])$

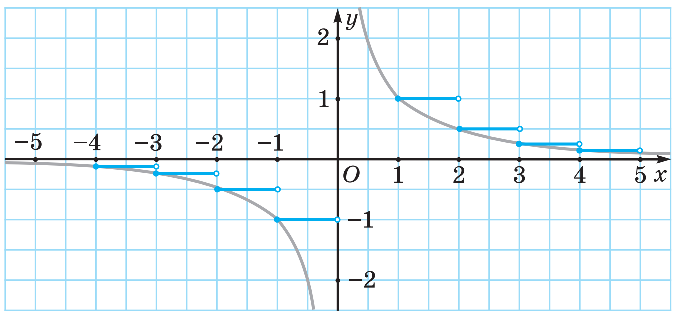
① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.

② Правесці прамыя $x = n$, $n \in \mathbf{Z}$.

③ Адзначыць пункты перасячэння гэтых прамых з графікам $y = f(x)$. Кожную частку графіка паміж прамымі $x = n$ і $x = n + 1$ замяніць яе праекцыяй на прамую $y = f([n])$.

Прыклад 4. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{1}{[x]}$.

Рашэнне. Відарыс графіка функцыі $y = \frac{1}{[x]}$ паказаны на рысунку 33.



Рыс. 33

Азначэнне 2

Дробавай часткай ліку a называецца рознасць паміж лікам a і яго цэлай часткай: $\{a\} = a - [a]$.

Напрыклад, $\{2,4\} = 2,4 - 2 = 0,4$; $\{-2,4\} = -2,4 - (-3) = 0,6$.

Паколькі кожнаму рэчаіснаму ліку адпавядае яго адзіная цэлая частка, то на мностве ўсіх рэчаісных лікаў вызначана функцыя $y = \{x\}$.

Уласцівасці функцыі $y = \{x\}$

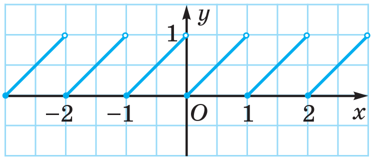
1. Абсяг вызначэння функцыі $y = \{x\}$. $D(\{x\}) = \mathbf{R}$.

2. Мноства значэнняў функцыі $y = \{x\}$. $E(\{x\}) = [0; 1)$ па азначэнні дробавай часткі ліку.

3. Нулі функцыі $y = \{x\}$. $x = n$, $n \in \mathbf{Z}$, паколькі дробавая частка цэлага ліку роўна нулю.

4. Прамежкі знакапастаянства функцыі $y = \{x\}$. $\{x\} > 0$ для ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

5. Функцыя $y = \{x\}$ нарастае на кожным з прамежкаў $[n; n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.



Рыс. 34

6. Калі $n \in \boldsymbol{Z}$, то $\{n\} = 0$.

7. Функцыя перыядычная з найменшым дадатным перыядам, роўным 1, паколькі $\{x\} = \{x+1\}$.

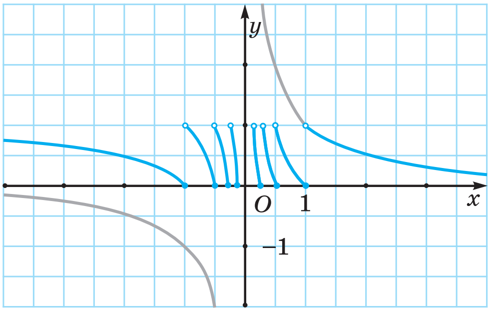
Відарыс графіка функцыі $y = \{x\}$ паказаны на рысунку 34.

Прыклад 5. Пабудуйце графік функцыі $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$.

Рашэнне.

1. Пабудуем графік функцыі $y = \frac{1}{x}$.
2. Правядзём прамыя $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. Частку графіка паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$ пакінем без змен.
4. Кожную частку графіка паміж прамымі $y = n$ і $y = n + 1$ перанясём на $|n|$ адзінак уніз, калі $n > 0$, або ўверх, калі $n < 0$.

Атрымаем графік функцыі $y = \left\{\frac{1}{x}\right\}$, ён размешчаны ў паласе паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$, не перасякае прамую $y = 1$ (рыс. 35).



Рыс. 35

Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = \{f(x)\}$

① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.

② Правесці прамыя $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Частку графіка $y = f(x)$ паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$ пакінуць без змен.

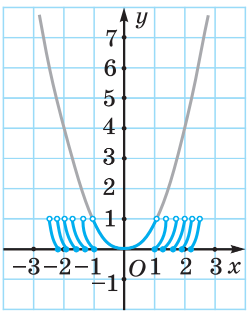
④ Кожную частку графіка $y = f(x)$ паміж прамымі $y = n$ і $y = n + 1$ перанесці на $|n|$ адзінак уніз, калі $n > 0$, або ўверх, калі $n < 0$.

Атрыманы графік функцыі $y = \{f(x)\}$ размешчаны ў паласе паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$ і не перасякае прамую $y = 1$.

Прыклад 6. Пабудуйце графік функцыі $y = \{x^2\}$.

Рашэнне.

1. Пабудуем графік функцыі $y = x^2$.



Рыс. 36

2. Правядзём прамыя $y = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Частку графіка $y = \{x^2\}$ паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$ пакінем без змен.

4. Часткі графіка паміж прамымі $y = n$ і $y = n + 1$ перанясём на n адзінак уніз $(n > 0)$.

Атрыманы графік функцыі $y = \{x^2\}$ размешчаны ў паласе паміж прамымі $y = 0$ і $y = 1$ і не перасякае прамую $y = 1$ (рыс. 36).

Прыклад 7. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{1}{\{x\}}$.

Рашэнне.

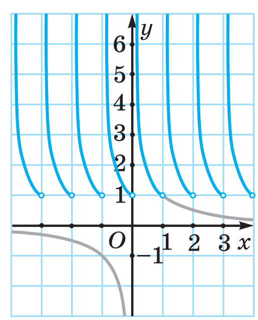
1. Пабудуем графік функцыі $y = \frac{1}{x}$.

2. Правядзём прамыя $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. Частку графіка паміж прамымі $x = 0$ і $x = 1$ пакінем без змен.

4. Кожную частку графіка паміж прамымі $x = n$ і $x = n + 1$ пераўтворым, выканаўшы зрух часткі графіка паміж прамымі $x = 0$ і $x = 1$ на $|n|$ адзінак уздоўж восі абсцыс управа, калі $n > 0$, і на $|n|$ адзінак уздоўж восі абсцыс улева, калі $n < 0$.

Відарыс графіка функцыі $y = \frac{1}{\{x\}}$ паказаны на рысунку 37.



Рыс. 37

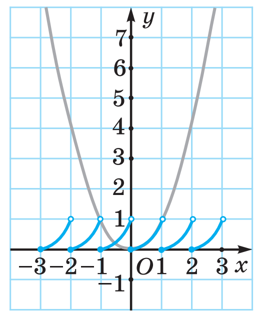
Алгарытм пабудовы графіка функцыі $y = f(\{x\})$.

① Пабудаваць графік функцыі $y = f(x)$.

② Правесці прамыя $x = n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

③ Частку графіка паміж прамымі $x = 0$ і $x = 1$ пакінуць без змен.

④ Кожную частку графіка $y = f(x)$ паміж прамымі $x = n$ і $x = n + 1$ пераўтварыць, выканаўшы зрух часткі графіка паміж прамымі $x = 0$ і $x = 1$ на $|n|$ адзінак уздоўж восі абсцыс управа, калі $n > 0$, і на $|n|$ адзінак уздоўж восі абсцыс улева, калі $n < 0$.



Рыс. 38

Прыклад 8. Пабудуйце графік функцыі $y = \{x\}^2$.

Рашэнне. Відарыс графіка функцыі $y = \{x\}^2$ паказаны на рысунку 38.

4.1. Вылічыце цэлыя і дробавыя часткі лікаў:

а) 1,2; −1,2;   б) 0,9; −0,9;   в) $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$;

г) 10,01; −10,01;   д) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$.

4.2. Знайдзіце значэнне выразу $[2{,}252] - \left\{1\frac{2}{7}\right\} - \left\{-1\frac{2}{7}\right\} + [\pi]$.

4.3. Плата за багаж залежыць ад яго масы і вылічваецца па наступным законе: за першыя 30 кг яна складае 20 р., а за кожныя наступныя поўныя ці няпоўныя 10 кг нарастае на 10 р. Пабудуйце графік залежнасці кошту перавозкі багажа ад яго масы.

4.4. Кошт званка са стацыянарнага тэлефона на мабільны залежыць ад яго працягласці і складае 1,5 р. за кожную поўную ці няпоўную мінуту. Пабудуйце графік залежнасці кошту званка ад працягласці размовы.

4.5. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = [x^3]$;   б) $y = \{x^3\}$;

в) $y = [x]^3$;   г) $y = \{x\}^3$.

§ 5. Мнагачлены

Азначэнне мнагачлена

Цэлыя рацыянальныя выразы называюць мнагачленамі (паліномамі).
Мнагачлен уяўляе сабой суму адначленаў.
Ступенню мнагачлена называецца найбольшая ступень яго членаў.

Напрыклад, $P(x) = x^5 + 4x^2 - 2x + 3$ — мнагачлен пятай ступені, паколькі яго член x^5 мае найбольшую ступень, роўную пяці.

Аперацыі з мнагачленамі

Правілы дзеянняў з мнагачленамі

• Каб скласці мнагачлены, дастаткова паслядоўна запісаць усе іх члены з тымі ж знакамі і прывесці падобныя складаемыя.

• Каб адняць ад аднаго мнагачлена другі, дастаткова да аднаго мнагачлена дадаць мнагачлен, процілеглы другому (два мнагачлены называюцца *процілеглымі*, калі ўсе члены аднаго мнагачлена процілеглыя членам другога).

• Каб памножыць адзін мнагачлен на другі, дастаткова кожны член аднаго мнагачлена памножыць на кожны член другога мнагачлена і атрыманыя здабыткі скласці.

• Каб падзяліць мнагачлен на адначлен, дастаткова кожны член мнагачлена падзяліць на гэты адначлен і вынікі скласці.

Пры выкананні дзеянняў з мнагачленамі можна карыстацца формуламі скарочанага множання.

Формулы скарочанага множання

1. $(P_1 - P_2)(P_1 + P_2) = P_1^2 - P_2^2$.
2. $(P_1 \pm P_2)^2 = P_1^2 \pm 2P_1P_2 + P_2^2$.
3. $(P_1 \pm P_2)^3 = P_1^3 \pm 3P_1^2P_2 + 3P_1P_2^2 \pm P_2^3$.
4. $(P_1 \pm P_2)(P_1^2 \mp P_1P_2 + P_2^2) = P_1^3 \pm P_2^3$.
5. $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \ldots + b^{n-1})$, калі $n \in \boldsymbol{N}$.

Напрыклад, $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

6. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 - \ldots + b^{n-1})$, калі $n \in N$, n — няцотны.

Напрыклад, $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$.

Дзялімасць мнагачленаў. Прыёмы раскладання мнагачлена на множнікі

Дзялімасць мнагачленаў

Азначэнне

Мнагачлен $P(x)$ дзеліцца на мнагачлен $Q(x)$, калі існуе такі мнагачлен $T(x)$, што выконваецца роўнасць $P(x) = Q(x) \cdot T(x)$.

Падзяліць мнагачлен $M(x)$ на мнагачлен $P(x)$ з астачай $(P(x) \neq 0)$ — значыць знайсці такія мнагачлены $Q(x)$ і $R(x)$, што выконваецца роўнасць $M(x) = P(x)Q(x) + R(x)$, прычым ступень мнагачлена $R(x)$ меншая за ступень мнагачлена $P(x)$.

Дзяленне мнагачленаў можна выканаць «вугалком»:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 \\ \underline{x^4 - 3x^3 + 2x^2} \end{array} & \Big| \begin{array}{l} \underline{x^2 - 3x + 2} \\ x^2 + 6x + 20 \text{ — дзель} \end{array} \\
-\begin{array}{l} 6x^3 + 2x^2 - 5x \\ \underline{6x^3 - 18x^2 + 12x} \end{array} & \\
-\begin{array}{l} 20x^2 - 17x + 6 \\ \underline{20x^2 - 60x + 40} \end{array} & \\
43x - 34 \text{ — астача.} &
\end{array}
$$

Такім чынам,

$$x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6 = (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 6x + 20) + 43x - 34.$$

Прыёмы раскладання мнагачлена на множнікі

Прымяненне формул скарочанага множання

Напрыклад,

$$x^4 - 10x^2 + 169 = x^4 + 26x^2 + 169 - 36x^2 = (x^2 + 13)^2 - 36x^2 =$$
$$= (x^2 + 13 - 6x)(x^2 + 13 + 6x).$$

Прымяненне спосабу групоўкі

Напрыклад, раскладзём на множнікі мнагачлен $M(x) = x^3 - 3x + 2$:

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) =$$
$$= (x-1)(x^2 + x - 2) = (x-1)^2(x+2).$$

Прымяненне метаду нявызначаных каэфіцыентаў

Сутнасць метаду заключаецца ў тым, што вызначаецца ступень сумножнікаў (мнагачленаў), на якія раскладаецца дадзены мнагачлен, каэфіцыенты гэтых мнагачленаў вылічваюцца шляхам множання сумножнікаў і прыраўноўвання каэфіцыентаў пры аднолькавых ступенях зменнай.

Напрыклад, раскладзём на множнікі мнагачлен

$$M(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

Яго можна запісаць у выглядзе здабытку квадратных трохчленаў:

$M(x) = (x^2 + px + q)(x^2 + bx + c)$. Раскрыем дужкі ў запісаным выразе:

$M(x) = x^4 + (b+p)x^3 + (c + pb + q)x^2 + (cp + qb)x + qc$.

Два мнагачлены роўныя тады і толькі тады, калі роўныя іх адпаведныя каэфіцыенты. Запішам наступную сістэму роўнасцей:

$$\begin{cases} b + p = 5, \\ c + pb + q = 1, \\ cp + qb = -13, \\ qc = 6. \end{cases}$$

Рашыўшы гэту сістэму, знойдзем: $p = 2$, $q = -3$, $b = 3$, $c = -2$, значыць,

$$M(x) = x^4 + 5x^3 + x^2 - 13x + 6 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 3x - 2) =$$
$$= (x+3)(x-1)(x^2 + 3x - 2).$$

Прымяненне тэарэм аб каранях мнагачлена

Тэарэма Безу

Разгледзім адзін з прыватных выпадкаў дзялення з астачай — дзяленне мнагачлена $M(x)$ на двухчлен $x - c$.

Няхай дадзены мнагачлен

$$M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0.$$

Заменім у ім зменную x якім-небудзь яе значэннем — рэчаісным лікам c, атрымаем рэчаісны лік $d = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0$. Гэты лік называецца *значэннем мнагачлена* $M(x)$ *пры* $x = c$.

Эцьен Безу
(31.03.1730—27.09.1783)

Тэарэма Безу

Астача ад дзялення мнагачлена $M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ на двухчлен $x - c$ роўна значэнню гэтага мнагачлена пры $x = c$.

Доказ.

Падзелім мнагачлен $M(x)$ на двухчлен $x - c$ з астачай і запішам яго ў выглядзе

$$M(x) = (x-c)Q(x) + R(x). \qquad (1)$$

Паколькі ступень мнагачлена $R(x)$ меншая за ступень дзельніка, г. зн. двухчлена $x - c$, то ступень $R(x)$ роўна 0, значыць, $M(x) = (x-c)Q(x) + R$, дзе R — рэчаісны лік.

Вядома, што калі мнагачлены роўныя, то іх значэнні роўныя пры любым значэнні зменнай, у тым ліку і пры $x = c$.

Падставім $x = c$ у (1):

$M(c) = (c-c)Q(c) + R$, значыць, $M(c) = R$.

Напрыклад, астача ад дзялення мнагачлена $M(x) = x^3 - 3x + 2$ на двухчлен $x - 2$ роўна значэнню мнагачлена пры $x = 2$, г. зн.

$$M(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 2 = 4.$$

Схема Горнера

Дзяленне мнагачлена на двухчлен $x - c$ зручна выконваць з дапамогай спосабу, які называецца *схемай Горнера*.

Уільям Джордж Горнер (09.06.1786—22.09.1837)

Няхай дадзены мнагачлен

$$M(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 \qquad (2)$$

ступені n.

Падзелім яго на двухчлен $x - c$. Атрымаем:

$$M(x) = (x-c)P(x) + r, \qquad (3)$$

дзе мнагачлен $P(x)$ мае ступень $n - 1$, г. зн.

$$P(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0.$$

Тады роўнасць (3) можна запісаць у выглядзе:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 =$$

$$= (x-c)\left(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0\right) + r, \text{ г. зн.}$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = b_{n-1}x^n + \left(b_{n-2} - cb_{n-1}\right)x^{n-1} +$$

$$+ \left(b_{n-3} - cb_{n-2}\right)x^{n-2} + \ldots + \left(b_0 - cb_1\right)x + \left(r - cb_0\right).$$

Мнагачлены ад адной зменнай роўныя тады і толькі тады, калі роўныя каэфіцыенты пры аднолькавых ступенях зменнай, значыць,

$a_n = b_{n-1}$; $a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}$; ...; $a_1 = b_0 - cb_1$; $a_0 = r - cb_0$.

Выразім каэфіцыенты дзелі $P(x)$:

$b_{n-1} = a_n$; $b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$; ...; $b_0 = cb_1 + a_1$; $r = cb_0 + a_0$.

Гэтыя вылічэнні адлюструем у табліцы, якая называецца схемай Горнера.

У яе верхнім радку — каэфіцыенты мнагачлена $M(x)$, у першай ячэйцы другога радка — лік c, далей размяшчаюцца каэфіцыенты дзелі і астача ад дзялення $M(x)$ на $x - c$.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	...	a_1	a_0
c	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$	...	$b_0 = cb_1 + a_1$	$r = cb_0 + a_0$

Прыклад 1. Падзелім мнагачлен $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7$ на двухчлен $x - 2$ з астачай, выкарыстаўшы схему Горнера.

Рашэнне.

У першым радку табліцы запішам каэфіцыенты дадзенага мнагачлена.

У першай ячэйцы другога радка запішам нуль дадзенага двухчлена $(x = 2)$.

У кожнай наступнай ячэйцы запішам каэфіцыенты дзелі і астачу, вылічаныя па схеме Горнера:

	3	2	−6	1	−7
2	**3**	**8**	**10**	**21**	**35**

Няпоўнай дзеллю з’яўляецца мнагачлен трэцяй ступені

$$3x^3 + 8x^2 + 10x + 21,$$

астача ад дзялення мнагачлена $3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7$ на двухчлен $x - 2$ роўна 35, г. зн.

$$3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 7 = \left(3x^3 + 8x^2 + 10x + 21\right)(x - 2) + 35.$$

Тэарэмы аб каранях мнагачлена

Разгледзім выпадак, калі мнагачлен $M(x)$ дзеліцца на двухчлен $x - c$ без астачы.

Коранем мнагачлена называецца такое значэнне c зменнай x, пры якім значэнне мнагачлена роўна нулю.

Лік a называецца *коранем кратнасці* k мнагачлена $M(x)$, калі мнагачлен $M(x)$ дзеліцца на $(x-a)^k$, але не дзеліцца на $(x-a)^{k+1}$.

Тэарэма 2

Калі вядомы n каранёў мнагачлена $M(x)$ n-й ступені, то правільная тоеснасць $M(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$, дзе a_n — старшы каэфіцыент мнагачлена $M(x)$, x_1, x_2, ..., x_n — яго карані, сярод якіх могуць быць кратныя.

Вынік 1 з тэарэмы Безу. Рэчаісны лік c з'яўляецца коранем мнагачлена $M(x)$ тады і толькі тады, калі $M(x)$ дзеліцца на $x - c$ без астачы: $M(x) = Q(x)\cdot(x - c)$.

Вынік 2. Калі мнагачлен з цэлымі каэфіцыентамі мае цэлы корань, то гэты корань з'яўляецца дзельнікам свабоднага члена.

Прыклад 2. Знайдзіце цэлыя карані мнагачлена

$$M(x) = x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24$$

і раскладзіце мнагачлен на множнікі.

Рашэнне. Калі мнагачлен мае цэлыя карані, то яны знаходзяцца сярод дзельнікаў свабоднага члена, г. зн. сярод лікаў ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12, ±24.

Пачнём праверку з лікаў, меншых па модулі.

	1	−6	3	26	−24
1	1	−5	−2	24	0
−1	1	−6	4	20	
2	1	−3	−8	8	
−2	1	−7	12	0	

Знойдзены два карані мнагачлена $M(x)$: $x = 1$ і $x = -2$ — і вызначаны каэфіцыенты мнагачлена $Q(x)$, атрыманага пры дзяленні $M(x)$ на

$(x-1)(x+2)$. Яго ступень — другая, таму мнагачлен $M(x)$ можна запісаць у выглядзе $M(x)=(x-1)(x+2)\left(x^2-7x+12\right)$. Можна знайсці яшчэ два карані мнагачлена: $x=4$ і $x=3$, рашыўшы ўраўненне $x^2-7x+12=0$.

Такім чынам, мнагачлен $M(x)$ мае чатыры цэлыя карані: -2, 1, 3 і 4, а яго раскладанне на множнікі мае выгляд $M(x)=(x-1)(x+2)(x-3)(x-4)$.

Прыклад 3. Знайдзіце рацыянальныя карані мнагачлена

$$M(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1$$

і раскладзіце мнагачлен на множнікі.

Рашэнне. Цэлыя карані дадзенага мнагачлена знаходзяцца сярод дзельнікаў свабоднага члена, г. зн. 1 і -1.

Праверым лікі ±1, можна таксама праверыць дробавыя лікі з назоўнікам, роўным першаму каэфіцыенту: $\pm\frac{1}{2}$.

	2	−5	−1	3	1
1	2	−3	−4	−1	0
−1	2	−5	1	−2	
$\frac{1}{2}$	2	−2	−5	$-\frac{7}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	2	−4	−2	0	

$$M(x) = 2x^4 - 5x^3 - x^2 + 3x + 1 = (x-1)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x-2\right) =$$

$$=(x-1)(2x+1)\left(x^2-2x-1\right).$$

Такім чынам, мнагачлен $M(x)$ мае толькі два рацыянальныя карані: 1 і $-\frac{1}{2}$.

Прыклад 4. Знайдзіце кратнасць кораня $x=1$ мнагачлена

$$M(x)=x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1$$

і раскладзіце гэты мнагачлен на множнікі.

Рашэнне.

	1	−2	1	1	−2	1
1	1	−1	0	1	−1	0
1	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	
1	1	1	1	2		

Кратнасць кораня $x=1$ мнагачлена $M(x)$ роўна 2:

$$x^5-2x^4+x^3+x^2-2x+1=(x-1)^2\left(x^3+1\right).$$

5.1. Падзяліце «вугалком» мнагачлен $P(x)$ на мнагачлен $Q(x)$, назавіце дзель і астачу:

а) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 6,$ $\quad Q(x) = x - 2;$

б) $P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 - 7x + 1,$ $\quad Q(x) = x + 3;$

в) $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 11,$ $\quad Q(x) = x^2 + 1;$

г) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 17,$ $\quad Q(x) = x^2 + 2.$

5.2. Знайдзіце астачы ад дзялення мнагачлена $P(x)$ на x; $x + 1$; $x - 5$; $3x + 2$:

а) $P(x) = x^2 - 5x + 4;$

б) $P(x) = x^3 - 7x^2 + 2x + 1;$

в) $P(x) = x^4 + 2x^2 - 3x - 7;$

г) $P(x) = x^6 - 2x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2 - 2x + 1.$

5.3. Раскладзіце на множнікі мнагачлен:

а) $x^3 - x^2 - 8x + 12;$

б) $2x^3 + 7x^2 - 28x + 12;$

в) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16;$

г) $6x^4 - 11x^3 + 9x^2 - 11x + 3.$

5.4. Раскладзіце на множнікі мнагачлен:

а) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15;$

б) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24.$

5.5. Знайдзіце суму каэфіцыентаў мнагачлена

$$\left(2 - 5x + x^3\right)^{211}\left(3 - 7x + 9x^2 - 5x^3\right)^{135}.$$

5.6. Пры якіх значэннях a мнагачлен $x^3 + 6x^2 + ax + 5$ дзеліцца без астачы на $x^2 + x + 1$?

5.7. Вядома, што мнагачлен $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + ax + b$ дзеліцца на трохчлен $x^2 + 3x - 1$. Знайдзіце дзель ад дзялення першага мнагачлена на другі і значэнні каэфіцыентаў a і b.

5.8. Мнагачлен $P(x)$ пры дзяленні на $x - 1$ дае астачу 3, а пры дзяленні на $x - 2$ дае астачу 5. Знайдзіце астачу ад дзялення мнагачлена $P(x)$ на $x^2 - 3x + 2.$

5.9. Мнагачлен $P(x)$ дзеліцца на $x - 1$ без астачы, а пры дзяленні на $x + 2$ дае астачу 3. Знайдзіце астачу ад дзялення мнагачлена $P(x)$ на $x^2 + x - 2$.

5.10. Скараціце дроб:

а) $\frac{3x^2+12x+9}{x^6+6x^3+5}$; б) $\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3+x^2+x+1}$.

5.11. Рашыце ўраўненне:

а) $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$;

в) $x^5 - 5x^4 + 6x^3 + 18x^2 - 135x + 243 = 0$;

г) $16x^4 + 8x^3 - 7x^2 + 2x + 1 = 0$.

§ 6. Адзінкавая акружнасць. Градусная і радыянная мера адвольнага вугла

$$180^\circ = \pi \text{ рад}; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад}; \quad 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Прыклад 1. У прамавугольным трохвугольніку з вуглом 36° знайдзіце радыянную меру ўсіх яго вуглоў.

Рашэнне. Знойдзем другі востры вугал гэтага трохвугольніка:

$$90^\circ - 36^\circ = 54^\circ.$$

Знойдзем радыянную меру вуглоў па формуле $\alpha = n^\circ \frac{\pi}{180^\circ}$:

$$90^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}, \quad 36^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{5}, \quad 54^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{3\pi}{10}.$$

6.1. Запоўніце ў сшытку табліцу.

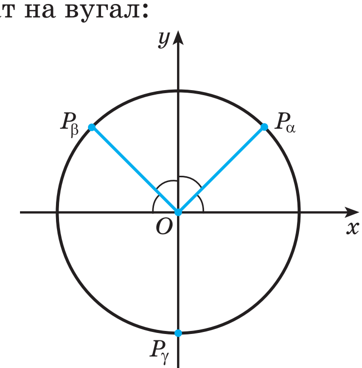
Градусная мера вугла	10°		-72°	225°			-450°		
Радыянная мера вугла		$\frac{\pi}{12}$			$-\frac{4\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{9}$		$1{,}5\pi$	$-1{,}2\pi$

6.2. Адзначце на адзінкавай акружнасці пункт, які атрымаецца пры павароце пункта $P_0(1;\ 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) 60°; -150°; 540°; -315°; 720°; -1110°;

б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{6}$; 5π; $-1{,}8\pi$; $3{,}5\pi$;

в) 1 рад; -2 рад; 3,5 рад; -4 рад; 6 рад; -10 рад.



Рыс. 39

6.3. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункты P_α, P_β і P_γ, якія адпавядаюць вуглам павароту α, β і γ (рыс. 39). Вызначце:

а) градусныя меры вуглоў α, β і γ, калі вядома, што яны знаходзяцца ў прамежку ад -360° да 0°;

б) радыянныя меры вуглоў α, β і γ, калі вядома, што яны знаходзяцца ў прамежку ад 2π да 4π;

в) градусныя і радыянныя меры ўсіх такіх вуглоў α, β і γ.

6.4. Запішыце вугал α, $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$, для якога пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{378°}$; б) $P_{-30°}$; в) $P_{450°}$; г) $P_{-540°}$.

6.5. Запішыце вугал β, $-2\pi \leqslant \beta \leqslant 0$, для якога пункт P_β супадае з пунктам:

а) P_π; б) $P_{\frac{2\pi}{3}}$; в) $P_{-2,5\pi}$; г) $P_{3,5\pi}$.

6.6. Запішыце ўсе вуглы α, для якіх пункт P_α супадае з пунктам:

а) $P_{0°}$; б) $P_{-135°}$; в) $P_{\frac{\pi}{6}}$; г) $P_{-\frac{\pi}{2}}$.

6.7. Вызначце, вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі:

а) $\alpha = 1081°$; б) $\alpha = -469°$; в) $\alpha = \frac{19\pi}{10}$;

г) $\alpha = -\frac{13\pi}{6}$; д) $\alpha = 3$; е) $\alpha = -5$.

6.8. Знайдзіце каардынаты пункта адзінкавай акружнасці, атрыманага паваротам пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат на вугал:

а) $90°$; $-180°$; $540°$; $-270°$; $450°$; $-720°$;

б) π; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; -7π; $2,5\pi$; $-5,5\pi$.

6.9. Запішыце ўсе вуглы α, пры павароце на якія пункта $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат будзе атрыманы пункт:

а) $P_\alpha(0; 1)$; б) $P_\alpha(1; 0)$; в) $P_\alpha(-1; 0)$; г) $P_\alpha(0; -1)$.

6.10. Запішыце некалькі вуглоў α, на якія трэба павярнуць пункт $P_0(1; 0)$ вакол пачатку каардынат, каб атрымаць пункт:

а) $P_\alpha\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $P_\alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

6.11. На адзінкавай акружнасці адзначаны пункт $P_{\frac{\pi}{4}}$. Вызначце вуглы, што адпавядаюць пункту, сіметрычнаму пункту $P_{\frac{\pi}{4}}$ адносна:

а) восі ардынат; б) восі абсцыс; в) пачатку каардынат.

6.12. Запішыце некалькі вуглоў α, што адпавядаюць пункту адзінкавай акружнасці, ардыната якога роўна:

а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) 0; г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.13. Запішыце ўсе вуглы α, што адпавядаюць пункту адзінкавай акружнасці, абсцыса якога роўна:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0; в) $-\frac{1}{2}$; г) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6.14. Вызначце колькасць старон правільнага многавугольніка, калі радыянная мера яго знешняга вугла роўна $\frac{2\pi}{15}$.

6.15. Колькі пунктаў атрымаецца, калі адзначыць на адзінкавай акружнасці ўсе пункты, што адпавядаюць вуглам выгляду $\frac{\pi n}{8}$, дзе n — цэлы лік?

6.16. У кожным радку адзін з лікаў — лішкавы, знайдзіце яго і растлумачце чаму:

а) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{5\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{6}$; $-\frac{10\pi}{3}$;

в) $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{19\pi}{4}$; г) π; −π; 3π; 0.

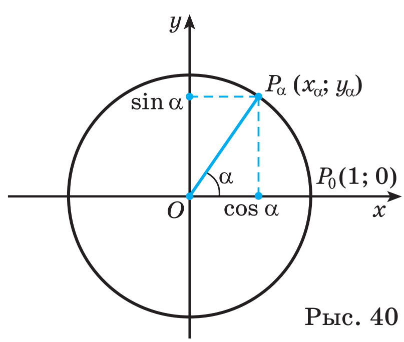
6.17. Слова «Вугал» закадзіравана: $\frac{\pi}{3}$ / $\frac{\pi}{21}$ / $\frac{\pi}{4}$ / π / $\frac{\pi}{13}$.

Разгадайце код. Расшыфруйце слова: 180° / 36° / 20° / 18° / 12°.

§ 7. Азначэнне сінуса і косінуса адвольнага вугла

Абсцыса пункта P_α, атрыманага паваротам пункта $P_0(1; 0)$ адзінкавай акружнасці вакол пачатку каардынат на вугал α (рыс. 40), называецца **косінусам** вугла α, а ардыната гэтага пункта — **сінусам** вугла α:

$$x_\alpha = \cos\alpha \qquad y_\alpha = \sin\alpha$$



Рыс. 40

Прыклад 1. Вызначце каардынаты пункта P_α адзінкавай акружнасці, што адпавядае вуглу α = 1920°.

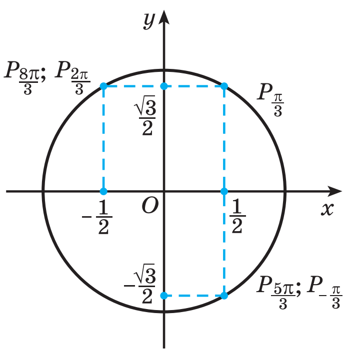
Рашэнне. Паколькі $1920° = 5 \cdot 360° + 120°$, то $\cos 1920° = \cos 120° = -\frac{1}{2}$, а $\sin 1920° = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Тады вуглу 1920° на адзінкавай акружнасці адпавядае пункт з каардынатамі $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Прыклад 2. Вылічыце:

а) $\sin\frac{8\pi}{3}$ і $\cos\frac{8\pi}{3}$; б) $\sin\frac{5\pi}{3}$ і $\cos\frac{5\pi}{3}$.

Рашэнне.

а) Паколькі $\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi + 2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$, то пункт $P_{\frac{8\pi}{3}}$ супадае з пунктам $P_{\frac{2\pi}{3}}$. Паколькі $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, то пункты $P_{\frac{\pi}{3}}$ і $P_{\frac{2\pi}{3}}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі ардынат, а значыць, іх ардынаты (сінусы вуглоў $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{3}$) роўныя, а абсцысы (косінусы вуглоў) процілеглыя, г. зн. $\sin\frac{8\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а $\cos\frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (рыс. 41).

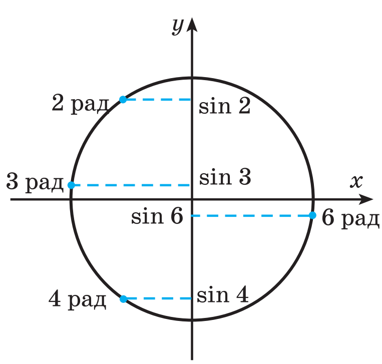


Рыс. 41

б) Паколькі $\frac{5\pi}{3} = \frac{6\pi - \pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$, то пункт $P_{\frac{5\pi}{3}}$ супадае з пунктам $P_{-\frac{\pi}{3}}$.

Значыць, $\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. Пункты $P_{-\frac{\pi}{3}}$ і $P_{\frac{\pi}{3}}$ адзінкавай акружнасці сіметрычныя адносна восі абсцыс, а значыць, іх ардынаты (сінусы вуглоў $\frac{\pi}{3}$ і $-\frac{\pi}{3}$) адрозніваюцца толькі знакам, а іх абсцысы (косінусы вуглоў $\frac{\pi}{3}$ і $-\frac{\pi}{3}$) роўныя. Паколькі $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ а } \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \text{ (гл. рыс. 41).}$$



Рыс. 42

Прыклад 3. Размясціце ў парадку нарастання лікі $\sin 2$; $\sin 3$; 1; $\sin 4$; $\sin 6$.

Рашэнне.

Адзначым вуглы 2 рад; 3 рад; 4 рад і 6 рад на трыганаметрычнай акружнасці (рыс. 42) і атрымаем, што $\sin 4 < \sin 6 < \sin 3 < \sin 2 < 1$.

Адказ: $\sin 4$; $\sin 6$; $\sin 3$; $\sin 2$; 1.

7.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos 270^\circ + \sin 180^\circ$; б) $\sin 90^\circ - 4\cos 0^\circ$;

в) $\cos(-360^\circ) - \sin 180^\circ$; г) $\sin(-270^\circ) - 3\sin(-450^\circ)$;

д) $-\sin 810^\circ + 3\cos 180^\circ$; е) $6\sin 0^\circ - 9\cos(-540^\circ)$;

ж) $\cos 720^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 30^\circ$; з) $3\cos(-450^\circ) + \sin^2 45^\circ$.

7.2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos\pi \cdot \cos(-2\pi)$; б) $\cos 7\pi - 2\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$;

в) $\sin\frac{3\pi}{2} \cdot 2\cos(-9\pi) + \cos\frac{\pi}{3}$; г) $2\sin(-3\pi) + \cos(-\pi) + \sin^2\frac{\pi}{4}$;

д) $\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right) \cdot \cos 6\pi - \cos^3\frac{\pi}{3}$; е) $\sin(-2{,}5\pi) - 3\cos(-7{,}5\pi) - \sin^2\frac{\pi}{3}$.

7.3. Параўнайце значэнні выразаў $\sin\alpha$ і $\sin 2\alpha$, калі вядома, што:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $\alpha = \frac{\pi}{2}$; г) $\alpha = 7\pi$.

7.4. Вядома, што $\beta = \frac{\pi}{4}$. Параўнайце значэнні выразаў:

а) $\cos\beta$ і $\cos 2\beta$; б) $\cos 4\beta$ і $\sin 4\beta$; в) $\sin 3\beta$ і $\sin 5\beta$.

7.5. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{24}\right) + 3\sin 12\alpha}$ пры $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

7.6. Вылічыце:

а) $\sqrt{\left(2\sin\frac{\pi}{4} - 1\right)^2} - \sqrt{\left(1 - 2\cos\frac{\pi}{4}\right)^2}$; б) $\sqrt{\left(2\cos\frac{\pi}{6} + 2\right)^2} + \sqrt{\left(2\sin\frac{\pi}{3} - 2\right)^2}$.

7.7. Ці праўда, што:

а) $\cos 45\pi = \cos(-\pi)$; б) $\sin 38{,}5\pi = \sin(-0{,}5\pi)$?

7.8. Выкарыстайце азначэнні сінуса і косінуса адвольнага вугла і назавіце два дадатныя і два адмоўныя вуглы, для якіх правільная роўнасць:

а) $\sin\alpha = 1$; б) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\cos\alpha = 0$; г) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7.9. Запішыце ўсе вуглы α, для якіх вядома, што:

а) $\sin\alpha = -1$; б) $\sin\alpha = 0$; в) $\cos\alpha = 1$; г) $\cos\alpha = -1$.

7.10. Ці магчымая роўнасць:

а) $\sin\alpha = 1{,}2$; б) $\sin\alpha = -\frac{8}{9}$; в) $\cos\alpha = 0{,}2$; г) $\cos\alpha = -\sqrt{3}$?

7.11. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

а) $3\sin\alpha + 8$; б) $5 - 2\cos\alpha$;

в) $4\sin^2\alpha - 1$; г) $2\cos^4\alpha + 9$.

7.12. Знайдзіце ўсе значэнні ліку a, пры якіх магчыма роўнасць:

а) $\sin\alpha = a - 5$; б) $\cos\alpha = a^2 - 8$;

в) $\sin\alpha = a^2 + a - 1$; г) $\cos\alpha = 5a - a^2 - 5$.

7.13. Параўнайце з нулём значэнні выразаў $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, калі вядома, што:

а) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; б) $-\frac{5\pi}{2} < \alpha < -2\pi$;

в) $2{,}5\pi < \alpha < 3\pi$; г) $-19{,}5\pi < \alpha < -19\pi$.

7.14. Вызначце знак выразу:

а) $\sin 115^\circ \sin 214^\circ \sin 313^\circ$; б) $\cos 219^\circ \cos 372^\circ \sin(-512^\circ)$;

в) $\sin\frac{\pi}{17}\sin\frac{35\pi}{8}\cos\frac{16\pi}{7}$; г) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right)\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\cos 2{,}4\pi$;

д) $\sin 3 \sin 5 \cos(-7)$; е) $\cos(-2)\sin(-10)\cos 5{,}5$.

7.15. Вядома, што $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; б) $\cos^2\alpha + \sin\alpha$; в) $\sin 2\alpha\cos\alpha$; г) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$.

7.16. Вядома, што $\pi < \alpha < 1{,}5\pi$. Спрасціце выраз:

а) $|\sin\alpha| - \sin\alpha$; б) $\cos\alpha + |\cos\alpha|$; в) $\frac{|\sin\alpha|}{\sin\alpha}$; г) $\frac{5\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$.

7.17. Параўнайце:

а) $\sin 340^\circ$ і $\sin 350^\circ$; б) $\sin 200^\circ$ і $\sin(-230^\circ)$;

в) $\cos 79^\circ$ і $\sin 337^\circ$; г) $\cos\frac{17\pi}{19}$ і $\cos\frac{39\pi}{19}$;

д) $\cos 3^\circ$ і $\cos 3$; е) $\cos 6{,}4$ і $\sin 4{,}9$.

7.18. Параўнайце значэнні выразаў $\sin\alpha$ і $\sin 2\alpha$, калі вядома, што:

а) $\alpha = 57^\circ$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$; в) $\alpha = 5$.

7.19. Запішыце ў парадку нарастання значэнні выразаў:

а) $\sin 41°$; $\sin 90°$; $\sin 225°$; $\sin 270°$; $\sin 292°$;

б) $\cos\frac{\pi}{12}$; $\cos 0$; $\cos\frac{\pi}{2}$; $\cos\frac{7\pi}{8}$; $\cos 2\pi$.

7.20. Ці магчымая роўнасць:

а) $\sin\alpha = 2\sin 31°$; б) $\cos\alpha = 2\cos 117°$?

7.21. а) На адзінкавай акружнасці адзначце пункты, што адпавядаюць вуглам α, роўным 0; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.

б) Адзначце пункты, сіметрычныя атрыманым пунктам адносна восі абсцыс; восі ардынат; пачатку каардынат.

в) Вызначце радыянную меру ўсіх вуглоў, якім адпавядаюць адзначаныя пункты.

г) Знайдзіце сінус і косінус кожнага з атрыманых вуглоў.

7.22. З дапамогай адзінкавай акружнасці і значэнняў сінусаў і косінусаў вуглоў $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ і $\frac{\pi}{3}$ вылічыце:

а) $\sin\frac{5\pi}{4}$; б) $\cos\frac{31\pi}{6}$; в) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; г) $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$.

7.23. Знайдзіце сінусы і косінусы вуглоў α, калі:

а) $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; б) $\alpha = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; г) $\alpha = -\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

7.24. Ці выконваецца роўнасць $\sin\alpha = \cos\alpha$ пры якім-небудзь α? Праілюструйце сваё рашэнне з дапамогай адзінкавай акружнасці.

7.25. Запішыце ўсе вуглы, для якіх выконваецца роўнасць $\sin\alpha = -\cos\alpha$. Праілюструйце сваё рашэнне з дапамогай адзінкавай акружнасці.

7.26. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі выраз $\sqrt{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$ мае сэнс?

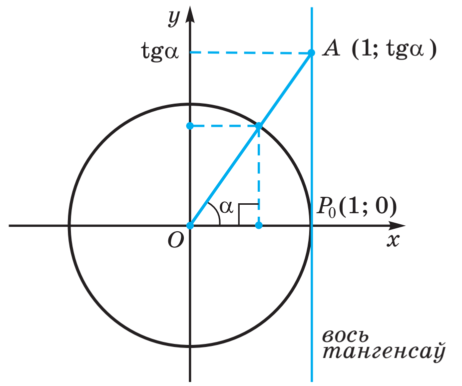
7.27. Вызначце, ці існуе такі рэчаісны лік x, для якога выконваюцца ўмовы $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і:

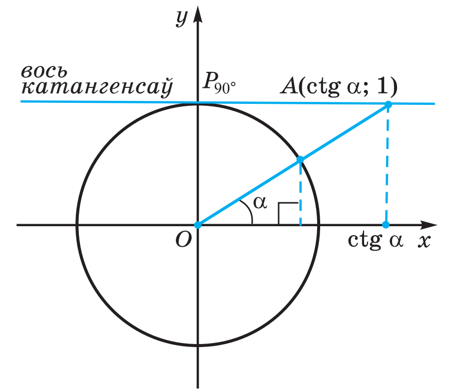
а) $x \in [\pi; 2\pi]$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

7.28. Вызначце, ці існуе такі рэчаісны лік x, для якога выконваюцца ўмовы $\sin x = -1$ і:

а) $x \in (-\pi; \pi]$; б) $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; \frac{37\pi}{2}\right]$.

§ 8. Азначэнне тангенса і катангенса адвольнага вугла





$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Прыклад. Выкарыстаўшы азначэнні тангенса і катангенса, вылічыце:

а) $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6}$; б) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Рашэнне. а) Па азначэнні тангенса $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \dfrac{\sin\frac{5\pi}{6}}{\cos\frac{5\pi}{6}}$. З дапамогай адзінкавай акружнасці атрымаем, што $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ і $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тады $\mathrm{tg}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Па азначэнні катангенса $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$. З дапамогай адзінкавай акружнасці атрымаем, што $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, а $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тады $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1$.

8.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{tg}\,180° - \mathrm{tg}\,45°$; б) $\mathrm{ctg}\,270° \cdot \mathrm{ctg}\,60°$; в) $\mathrm{tg}\,2\pi + \mathrm{tg}^2\,\frac{\pi}{6}$;

г) $\mathrm{ctg}^2\,\frac{\pi}{3} \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{4} - \mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{2}$; д) $\mathrm{tg}\,5\pi + \mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; е) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{7\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4}$.

8.2. Параўнайце значэнні выразаў $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{tg}2\alpha$, калі вядома, што:

а) $\alpha = \frac{\pi}{6}$; б) $\alpha = \pi$.

8.3. Вядома, што $\beta = \frac{\pi}{4}$. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{ctg}\beta$; б) $\operatorname{ctg}2\beta$; в) $\operatorname{ctg}6\beta$.

8.4. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)}$ пры $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

8.5. Вылічыце: $\sqrt{\left(3\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}-2\right)^2}+\sqrt{\left(2-3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2}$.

8.6. Назавіце два дадатныя і два адмоўныя вуглы α, для якіх не існуе $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$.

8.7. Вызначце ўсе значэнні α, пры якіх:

а) $\operatorname{ctg}\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$.

8.8. Параўнайце:

а) $\operatorname{tg}340^\circ$ і $\operatorname{tg}350^\circ$; б) $\operatorname{ctg}200^\circ$ і $\operatorname{ctg}(-230^\circ)$;

в) $\operatorname{ctg}79^\circ$ і $\operatorname{tg}337^\circ$; г) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{19}$ і $\operatorname{tg}\frac{39\pi}{19}$;

д) $\operatorname{ctg}4^\circ$ і $\operatorname{ctg}4$; е) $\operatorname{tg}6{,}4$ і $\operatorname{tg}4{,}9$.

8.9. Параўнайце значэнні выразаў $\operatorname{ctg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}2\alpha$, калі вядома, што:

а) $\alpha = 57^\circ$; б) $\alpha = \frac{5\pi}{7}$; в) $\alpha = 5$.

8.10. Запішыце ў парадку нарастання значэнні выразаў:

а) $\operatorname{tg}41^\circ$; $\operatorname{tg}110^\circ$; $\operatorname{tg}225^\circ$; $\operatorname{tg}360^\circ$; б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{11}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg}\frac{8\pi}{9}$; $\operatorname{ctg}2{,}1\pi$.

8.11. Параўнайце з нулём значэнні выразаў $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, калі вядома, што:

а) $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $-\frac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$;

в) $4{,}5\pi < \alpha < 5\pi$; г) $-13{,}5\pi < \alpha < -13\pi$.

8.12. Вызначце знак выразу:

а) $\operatorname{tg}165^\circ\operatorname{tg}314^\circ\operatorname{tg}353^\circ$; б) $\operatorname{ctg}229^\circ\operatorname{ctg}382^\circ\operatorname{tg}(-543^\circ)$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{19}\operatorname{ctg}\frac{43\pi}{8}\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{7}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{7}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{13\pi}{3}\right)\operatorname{tg}3{,}1\pi$;

д) $\operatorname{tg}2\operatorname{ctg}3\operatorname{tg}(-4)$; е) $\operatorname{ctg}(-1)\operatorname{tg}(-8)\operatorname{ctg}4{,}5$.

8.13. Вядома, што $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$ Параўнайце з нулём значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^3\alpha$.

8.14. Вядома, што $0{,}5\pi < \alpha < \pi$. Спрасціце выраз:

а) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha + |\operatorname{ctg}\alpha|$; в) $\frac{|\operatorname{tg}\alpha|}{\operatorname{tg}\alpha}$; г) $\frac{3\operatorname{ctg}\alpha}{|\operatorname{ctg}\alpha|}$.

8.15. Ці праўда, што:

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2}$?

8.16. Вылічыце:

а) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6}$; в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{6}\right)$;

д) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$; е) $\operatorname{ctg}\frac{19\pi}{6}$; ж) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7\pi}{3}\right)$; з) $\operatorname{ctg}\frac{21\pi}{4}$.

8.17. Ці выконваецца роўнасць $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$ пры якім-небудзь α? Праілюструйце сваё рашэнне з дапамогай адзінкавай акружнасці.

8.18. Запішыце ўсе вуглы, для якіх выконваецца роўнасць $\operatorname{ctg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha$. Праілюструйце сваё рашэнне з дапамогай адзінкавай акружнасці.

8.19. Вуглом якой чвэрці з'яўляецца вугал α, калі выраз $\sqrt{\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha}$ мае сэнс?

8.20. Вызначце, ці існуе такі рэчаісны лік x, для якога выконваюцца ўмовы $\operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ і:

а) $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; б) $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

8.21. Вызначце, ці існуе такі рэчаісны лік x, для якога выконваюцца ўмовы $\operatorname{tg}x = -1$ і:

а) $x \in (-\pi; 0]$; б) $x \in \left[\frac{35\pi}{2}; 18\pi\right]$.

8.22. Вызначце, ці існуе такі рэчаісны лік x, для якога выконваюцца ўмовы $\operatorname{tg}x = 3$ і $x \in [0; \pi]$.

§ 9. Суадносіны паміж сінусам, косінусам, тангенсам і катангенсам аднаго і таго ж вугла (трыганаметрычныя тоеснасці)

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$	$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$	$\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Прыклад 1. Ці могуць сінус і косінус аднаго вугла быць роўнымі адпаведна $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ і $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$?

Рашэнне. Для адказу на пытанне дастаткова праверыць справядлівасць роўнасці $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (г. зн. праверыць, ці выконваецца ўмова прыналежнасці пункта P_α адзінкавай акружнасці).

Паколькі $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$, то могуць.

Прыклад 2. Спрасціце выраз

$$\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Рашэнне.

$$\left(\sin\alpha - \frac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha - 2\sin\alpha \cdot \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha -$$

$$- 2\cos\alpha \cdot \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \sin^2\alpha - 2 + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha - 2 + \frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) - 2 + \left(\operatorname{ctg}^2\alpha + 1\right) - 2 + \left(\operatorname{tg}^2\alpha + 1\right) - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha =$$

$$= 1 - 2 + 1 - 2 + 1 = -1.$$

Прыклад 3. Знайдзіце найменшае значэнне выразу

$$5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha + 1.$$

Рашэнне. $5\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha + 1 = 5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + 1 =$

$$= (5\sin^2\alpha + 5\cos^2\alpha) + \cos^2\alpha + 1 = 5(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha + 1 =$$

$$= 5\cdot 1 + \cos^2\alpha + 1 = \cos^2\alpha + 6.$$

Паколькі найменшае значэнне $\cos^2\alpha$ роўна нулю, то найменшае значэнне выразу $\cos^2\alpha + 6$, а значыць, і дадзенага выразу роўна 6.

9.1. Ці могуць сінус і косінус аднаго і таго ж вугла адначасова быць роўнымі нулю?

9.2. Ці могуць адначасова выконвацца роўнасці:

а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ і $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$ і $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$?

9.3. Знайдзіце $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\operatorname{ctg}\alpha = -3\frac{3}{7}$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

9.4. Знайдзіце $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, калі $\operatorname{tg}\alpha = 3$ і $\cos\alpha > \sin\alpha$.

9.5. Знайдзіце $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}\alpha$, калі $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9.6. Спрасціце выраз:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$; б) $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

9.7. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; б) $\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$.

9.8. Спрасціце выраз:

а) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$; б) $\frac{1 - \cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha + 1}{\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha - 1}$; г) $\sin^2\alpha + \frac{1}{(\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha + \cos\alpha)^2}$.

9.9. Дакажыце тоеснасць $\cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha - \sin^4\alpha = 1$.

9.10. Спрасціце выраз $\frac{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1}{\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha + 1}$.

9.11. Дакажыце, што значэнне выразу

$$(2\sin\alpha + 3)(2\sin\alpha - 3) + (2\cos\alpha + 5)(2\cos\alpha - 5)$$

не залежыць ад α.

9.12. Знайдзіце найменшае значэнне выразу $7\cos^2\alpha + 8\sin^2\alpha - 4$.

9.13. Спрасціце выраз $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, ведаючы, што $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

9.14. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\cos\alpha + 2\sin\alpha}$, ведаючы, што $\operatorname{tg}\alpha = 7$;

б) $\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, ведаючы, што $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}75$.

9.15. Дакажыце, што $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha \geqslant 2$.

9.16. Ведаючы, што $\operatorname{tg}\alpha = 1{,}25$, знайдзіце значэнне выразу

$$\frac{4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}.$$

9.17. Спрасціце выраз $\sqrt{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha}$, калі вядома, што α — вугал трэцяй чвэрці.

9.18. Знайдзіце значэнне выразу $A = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha}}{\sin\alpha}$, ведаючы, што $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

9.19. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

а) $3\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$; б) $5\sin^2\alpha + 8\cos^2\alpha$.

9.20. Знайдзіце $\sin\alpha\cos\alpha$, калі $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = -8$.

9.21. Знайдзіце $\sin\alpha + \cos\alpha$, калі $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}$ і $3\pi < \alpha < 3{,}5\pi$.

9.22. Знайдзіце $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, калі $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

9.23. Ведаючы, што $\operatorname{tg}^2\alpha + 25 = 10\operatorname{tg}\alpha$, знайдзіце значэнне выразу $\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

9.24. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні выразу:

а) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$; б) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$.

9.25. Вызначце, якія з наступных роўнасцей правільныя пры ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$:

а) $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 5$; б) $\sin^2\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5} = \frac{1}{5}$;

в) $\sin^2\frac{x}{5} + \cos^2\frac{x}{5} = 1$; г) $\sin^2 5x + \cos^2 5x = 1$.

9.26. Пабудуйце графік функцыі $y = \sin^2 \sqrt{x-3} + \cos^2 \sqrt{x-3}$.

9.27. Пабудуйце графік функцыі

$$y = -5\sin^2\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right) - 5\cos^2\left(\sqrt{x^2 - 3x + 2}\right).$$

9.28. Пабудуйце графік функцыі $y = 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{8} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\pi x}{8}$.

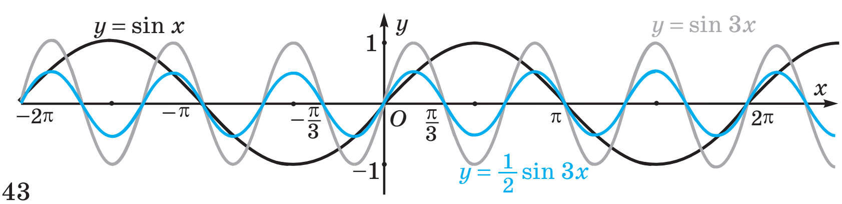
§ 10. Функцыі $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Іх уласцівасці і графікі

Прыклад 1. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{1}{2}\sin 3x$; б) $y = 3\cos\frac{x}{2}$.

Рашэнне. а) Выканаем сцісканне графіка функцыі $y = \sin x$ да восі ардынат у 3 разы (адлегласць ад кожнага пункта графіка функцыі $y = \sin x$ да восі ардынат паменшыцца ў 3 разы) і атрымаем графік функцыі $y = \sin 3x$ (рыс. 43).

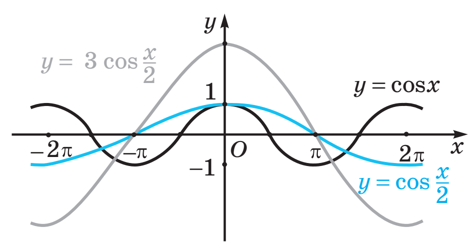
Затым выканаем сцісканне графіка функцыі $y = \sin 3x$ у 2 разы да восі абсцыс (адлегласць ад кожнага пункта графіка функцыі $y = \sin 3x$ да восі абсцыс паменшыцца ў 2 разы) і атрымаем графік функцыі $y = \frac{1}{2}\sin 3x$ (гл. рыс. 43).



Рыс. 43

б) Выканаем расцяжэнне графіка функцыі $y = \cos x$ ад восі ардынат у 2 разы (адлегласць ад кожнага пункта графіка функцыі $y = \cos x$ да восі ардынат павялічыцца ў 2 разы) і атрымаем графік функцыі $y = \cos\frac{x}{2}$ (рыс. 44).

Затым выканаем расцяжэнне графіка функцыі $y = \cos\frac{x}{2}$ у 3 разы ад восі абсцыс (адлегласць ад кожнага пункта графіка функцыі $y = \cos\frac{x}{2}$ да восі абсцыс павялічыцца ў 3 разы) і атрымаем графік функцыі $y = 3\cos\frac{x}{2}$ (гл. рыс. 44).



Рыс. 44

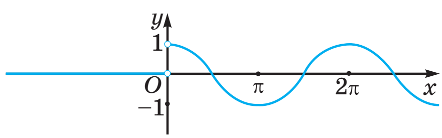
Прыклад 2. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\frac{x}{|2x|}\cos x+0{,}5\cos x$; б) $y=-\frac{1}{2}(\sin|x|-\sin x)$.

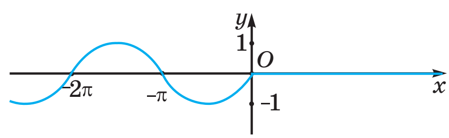
Рашэнне. а) Раскрыем модуль:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y=\frac{x}{2x}\cos x+0{,}5\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y=-\frac{x}{2x}\cos x+0{,}5\cos x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y=0{,}5\cos x+0{,}5\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y=-0{,}5\cos x+0{,}5\cos x;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0,\\ y=\cos x,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 45.



Рыс. 45



Рыс. 46

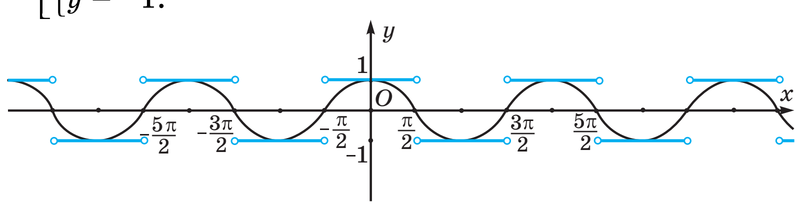
б) $y=-\frac{1}{2}(\sin|x|-\sin x)$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<0,\\ y=\sin x.\end{cases}\end{array}\right.$

Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 46.

Прыклад 3. Пабудуйце графік функцыі $y=\frac{|\cos x|}{\cos x}$.

Рашэнне.

$y=\frac{|\cos x|}{\cos x}$; $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x>0,\\ y=1,\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ y=-1.\end{cases}\end{array}\right.$ Графік дадзенай функцыі паказаны на рысунку 47.



Рыс. 47

Прыклад 4. Вызначце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = \cos\frac{x}{3}$.

Рашэнне. Для рашэння заданняў такога віду дакажам дзве ўласцівасці.

1. Калі T — перыяд функцыі $f(x)$, то лік kT — таксама перыяд функцыі $f(x)$, дзе k — адвольны цэлы лік, $k \neq 0$.

Доказ.

$$f(x+kT)=f(x+(k-1)T+T)=f(x+(k-1)T)=f(x+(k-2)T+T)=$$
$$=f(x+(k-2)T)=\ldots=f(x+(k-k)T)=f(x).$$

2. Калі T — перыяд функцыі $f(x)$, то перыяд функцыі $f(kx)$ (k — некаторы рэчаісны лік, не роўны нулю) роўны $\frac{T}{k}$.

Доказ.

$f(kx+T)=f\left(k\left(x+\frac{T}{k}\right)\right)=f(kx)\Rightarrow T'=\frac{T}{k}$, дзе T' — перыяд функцыі $f(kx)$.

а) Найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin t$ роўны $T = 2\pi$. Выкарыстаем доказаныя ўласцівасці і атрымаем, што найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin 2x$ роўны $T' = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

б) Найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \cos t$ роўны 2π. Выкарыстаем доказаныя ўласцівасці і атрымаем, што найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \cos\frac{x}{3}$ роўны $T' = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

Прыклад 5. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$.

Рашэнне. Няхай $\cos x = t$, тады функцыя $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$ прымае выгляд $f(t) = 2t^2 + 2t - 1$ пры $t \in [-1;\ 1]$.

Знойдзем найбольшае і найменшае значэнні квадратычнай функцыі $f(t) = 2t^2 + 2t - 1$ на адрэзку $[-1;\ 1]$.

Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы $t_в = -\frac{1}{2}$. Паколькі абсцыса вяршыні парабалы належыць адрэзку $[-1;\ 1]$, то знойдзем значэнне функцыі ў вяршыні парабалы і на канцах дадзенага адрэзка.

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -1{,}5;$

$f(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) - 1 = -1;$

$f(1) = 2\cdot 1^2 + 2\cdot 1 - 1 = 3.$

Такім чынам, найбольшае значэнне дадзенай функцыі роўна 3, а найменшае значэнне роўна $-1{,}5$.

10.1. Вызначце, ці належыць графіку функцыі $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1$ пункт:

а) $A(0; 0,5)$; б) $B\left(\frac{2\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{6}; 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; г) $D(4\pi; 1,5)$.

10.2. Ці праўда, што графік функцыі $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ праходзіць праз пункт:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 3\right)$; б) $B\left(-\frac{3\pi}{4}; -1\right)$; в) $C\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; г) $D\left(\frac{7\pi}{12}; 2\right)$?

10.3. Знайдзіце $f(x_0)$, калі:

а) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2,\ x_0 = \frac{4\pi}{3}$;

б) $f(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1,\ x_0 = -\frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = 4\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 3,\ x_0 = \frac{11\pi}{6}$;

г) $f(x) = 7 - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right),\ x_0 = -\frac{2\pi}{3}$.

10.4. Знайдзіце значэнне функцыі $y = \frac{1}{3}\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 5$ пры значэнні аргумента, роўным:

а) $-\frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\pi}{3}$; в) 0; г) $\frac{2\pi}{3}$.

10.5. Знайдзіце ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $f(x) = 2\sin x + \cos x$ і прамой:

а) $x = -\frac{\pi}{2}$; б) $x = \frac{\pi}{6}$; в) $x = \pi$; г) $x = \frac{\pi}{4}$.

10.6. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ прымае значэнне, роўнае:

а) 0; б) -1; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$.

10.7. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх выконваецца роўнасць $f(x) = 1$, калі $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10.8. Знайдзіце найбольшае і найменшае цэлыя значэнні функцыі:

а) $y = 1,2\cos\frac{x}{5} + 3$; б) $y = -3,28\sin\left(9x + \frac{\pi}{12}\right) - 1$.

10.9. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцый $y = \sin x$ і $y = \cos x$ на адрэзку:

а) $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$; б) $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi}{3}\right]$; в) $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right]$; г) $\left[-\frac{\pi}{6};\ 0\right]$.

10.10. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = |\sin x| + 4$; б) $y = |\cos 2x| - 3$;

в) $y = 5 - 2\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$; г) $y = 4{,}2 - 0{,}3|\cos 5x|$.

10.11. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y = 2\sin^2 x - \sin x - 1$; б) $y = \cos^2 x + \cos x + 3$.

10.12. Ці праўда, што перыядам функцыі $y = \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi x}{5} + 1\right) - 15$ з'яўляецца лік:

а) 10; б) 15; в) -20; г) -100?

10.13. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y = \cos 8x$; б) $y = \sin 5x$;

в) $y = \sin\left(3x + \frac{\pi}{12}\right)$; г) $y = \cos\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{10}\right)$;

д) $y = 3\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = 4\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{2x}{5}\right)$;

ж) $y = \sin\left(\frac{\pi x}{7} + 8\right) + 2$; з) $y = 8\sin\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) - 3$.

10.14. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай:

а) $f(x) = x^4 \cdot \cos 2x$; б) $f(x) = \frac{\sin^2 x - 1}{|x|}$;

в) $f(x) = \frac{x \cdot \sin x}{x^2 - 9}$; г) $f(x) = \cos 6x - \sin^4 x$.

10.15. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай:

а) $f(x) = \sin x \cdot \cos 5x$; б) $f(x) = \frac{\cos x + 2}{x^3 - 16x}$;

в) $f(x) = \frac{x - \sin x}{x^2 - 4}$; г) $f(x) = \frac{\cos 7x}{x^3} - \sin^5 x$.

10.16. Даследуйце на цотнасць функцыю $f(x) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

10.17. Графік функцыі $y = f(x)$ атрыманы зрухам графіка функцыі $g(x) = \cos x$ на $\frac{\pi}{3}$ адзінкі ўлева ўздоўж восі абсцыс і на 2 адзінкі ўніз уздоўж восі ардынат. Знайдзіце значэнне выразу $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

10.18. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \sin 2x$; б) $y = 3\cos x$; в) $y = -\sin\frac{x}{2}$;

г) $y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{3}$; д) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$; е) $y = -2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{9}\right) + 1$.

10.19. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |\sin x|$; б) $y = \sqrt{\cos^2 x}$; в) $y = |\sin x| + \sin x$;

г) $y = \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 - \cos x$; д) $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$; е) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$.

10.20. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \frac{|x|}{2x}\sin x + 0{,}5\sin x$; б) $y = \cos|x| + \cos x$.

10.21. Пабудуйце графік функцыі $y = 3\cos\frac{x}{2}$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі спадання і нарастання функцыі;

в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі, а таксама значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

10.22. Пабудуйце графік функцыі $y = |\sin 3x|$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;

б) прамежкі спадання і нарастання функцыі;

в) найбольшае і найменшае значэнні функцыі, а таксама значэнні аргумента, пры якіх яны дасягаюцца;

г) прамежкі знакапастаянства функцыі.

10.23. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{3}$.

10.24. У фізіцы пры вывучэнні гарманічных ваганняў разглядаюць функцыю $g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, дзе A — амплітуда ваганняў, ω — частата ваганняў, φ — пачатковая фаза.

Для функцыі $g(t) = 2\cos\left(6t + \frac{\pi}{3}\right)$ вызначце:

а) частату ваганняў; б) перыяд ваганняў;

в) пачатковую фазу; г) амплітуду ваганняў.

10.25. Вядома, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца цотнай і пры $x \leqslant -\frac{\pi}{2}$ задаецца формулай $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Пакажыце адрэзак графіка гэтай функцыі пры $x \geqslant \frac{\pi}{2}$.

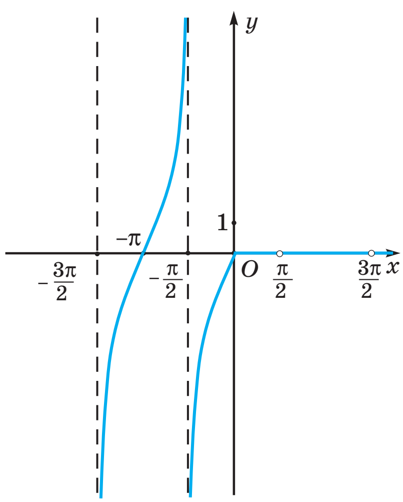
§ 11. Функцыі $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Іх уласцівасці і графікі

Прыклад 1. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|)$.

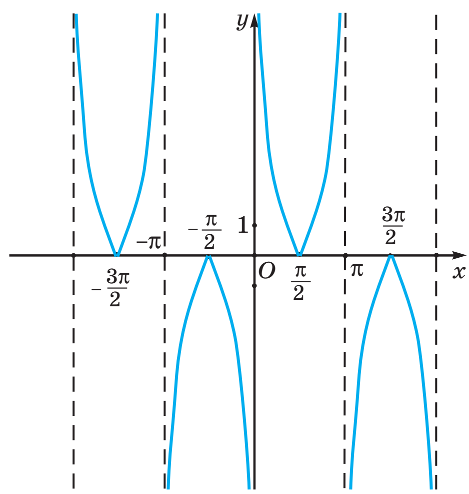
Рашэнне.

$$y = \frac{1}{2}(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|); \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = \operatorname{tg} x. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 48.



Рыс. 48



Рыс. 49

Прыклад 2. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$.

Рашэнне.

$$y = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}; \quad y = \frac{\sqrt{\cos^2 x}}{\sin x}; \quad y = \frac{|\cos x|}{\sin x}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \geqslant 0, \\ y = \operatorname{ctg} x, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ y = -\operatorname{ctg} x. \end{cases} \end{array}\right.$$

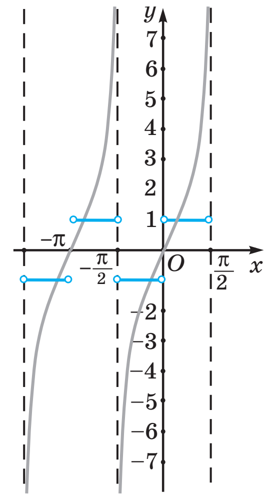
Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 49.

Прыклад 3. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$.

Рашэнне.

$$y = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \operatorname{tg} x > 0, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \operatorname{tg} x < 0, \\ y = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 50.



Рыс. 50

Прыклад 4. Вызначце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{5}$.

Рашэнне. а) Паколькі найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} t$ роўны π, то найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{tg} 2x$ роўны $T' = \frac{\pi}{2}$.

б) Паколькі найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{ctg} t$ роўны π, то найменшы дадатны перыяд функцыі $y = \operatorname{ctg} \frac{3x}{5}$ роўны $T' = \frac{\pi}{\frac{3}{5}} = \frac{5\pi}{3}$.

Прыклад 5. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x) = -2\operatorname{tg} 3x + x$; б) $g(x) = 4x \cdot \operatorname{ctg} x - 3$.

Рашэнне. а) Абсяг вызначэння дадзенай функцыі — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў выгляду $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля; $f(-x) = -2\operatorname{tg}(-3x) + (-x) = 2\operatorname{tg} 3x - x = -f(x)$, значыць, функцыя з'яўляецца няцотнай.

б) Абсяг вызначэння дадзенай функцыі — мноства ўсіх рэчаісных лікаў, акрамя лікаў выгляду πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. Абсяг вызначэння сіметрычны адносна нуля; $g(-x) = (-4x) \cdot \operatorname{ctg}(-x) - 3 = 4x \cdot \operatorname{ctg} x - 3 = g(x)$, значыць, функцыя з'яўляецца цотнай.

11.1. Вызначце, ці належыць графіку функцыі $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ пункт:

а) $A(0; 0)$; б) $B\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; в) $C\left(\frac{3\pi}{4}; 1\right)$; г) $D\left(-\frac{\pi}{4}; 10\right)$.

11.2. Ці праўда, што графік функцыі $y = 3\operatorname{ctg}2x$ праходзіць праз пункт:

а) $A\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$; б) $B(-\pi; 0)$; в) $C\left(-\frac{\pi}{6}; -\sqrt{3}\right)$; г) $D\left(\frac{\pi}{8}; 3\right)$?

11.3. Знайдзіце $f(x_0)$, калі:

а) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 1,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$;

б) $f(x) = -3\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 5,\ x_0 = \frac{\pi}{2}$;

г) $f(x) = 2 - \operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right),\ x_0 = \frac{7\pi}{6}$.

11.4. Знайдзіце, калі гэта магчыма, ардынату пункта перасячэння графіка функцыі $f(x) = \operatorname{tg}x - 3\operatorname{ctg}x$ і прамой:

а) $x = \frac{\pi}{4}$; б) $x = -\frac{\pi}{6}$; в) $x = \frac{\pi}{3}$; г) $x = \pi$.

11.5. Знайдзіце некалькі значэнняў аргумента, пры якіх функцыя $y = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ прымае значэнне, роўнае:

а) 0; б) -1; в) $\sqrt{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.6. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх выконваецца роўнасць $f(x) = 1$, калі $f(x) = \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

11.7. Знайдзіце абсяг вызначэння і мноства значэнняў функцыі:

а) $y = \operatorname{tg}5x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{7}$; в) $y = \operatorname{ctg}8x$; г) $y = \operatorname{ctg}0{,}1x$.

11.8. Выкарыстаўшы ўласцівасць перыядычнасці функцый $f(x) = \operatorname{tg}x$ і $f(x) = \operatorname{ctg}x$, вылічыце:

а) $\operatorname{tg}405^\circ$; б) $\operatorname{ctg}390^\circ$; в) $\operatorname{tg}240^\circ$; г) $\operatorname{ctg}225^\circ$;

д) $\operatorname{ctg}810^\circ$; е) $\operatorname{tg}720^\circ$; ж) $\operatorname{ctg}780^\circ$; з) $\operatorname{tg}1110^\circ$.

11.9. Выкарыстаўшы ўласцівасці перыядычнасці функцый $f(x)=\operatorname{tg} x$ і $f(x)=\operatorname{ctg} x$, дакажыце, што:

а) $\operatorname{tg} 16^\circ = \operatorname{tg} 556^\circ$; б) $\operatorname{ctg}(-13^\circ)=\operatorname{ctg} 167^\circ$.

11.10. Ці праўда, што перыядам функцыі $y = 4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{6}-2\right)+9$ з'яўляецца лік:

а) 6; б) 9; в) -12; г) -42?

11.11. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{4}$; в) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{10}$;

г) $y = \operatorname{tg}\frac{3x}{5}$; д) $y = 3\operatorname{tg}\left(9x-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = 5\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{5}\right)$;

ж) $y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-5$; з) $y = 7\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{10}-\frac{3x}{7}\right)+1$.

11.12. Даследуйце функцыю на цотнасць (няцотнасць):

а) $f(x)=2x\operatorname{tg} x$; б) $g(x)=x-\operatorname{tg} 4x$;

в) $y = \operatorname{ctg} 12x$; г) $g(x)=x\cdot\operatorname{ctg} 2x$;

д) $f(x)=-\operatorname{tg} 2x - x$; е) $g(x)=x\operatorname{tg}\frac{x}{5}$.

11.13. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; б) $y = 2\operatorname{ctg} x$; в) $y = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} x$;

г) $y = \frac{1}{3}\operatorname{ctg} 2x$; д) $y = \operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$; е) $y = -\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{12}\right)$.

11.14. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = |\operatorname{tg} x|$; б) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x}$; в) $y = |\operatorname{tg} x| - \operatorname{tg} x$;

г) $y = \left(\sqrt{\operatorname{ctg} x}\right)^2 + \operatorname{ctg} x$; д) $y = \frac{|\operatorname{ctg} x|}{\operatorname{ctg} x}$; е) $y = \sqrt{-\operatorname{tg}^2 x}$.

11.15. Пабудуйце графік функцыі $y = -\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x$.

11.16. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$.

11.17. Пабудуйце графік функцыі $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Выкарыстаўшы графік, вызначце:

а) нулі функцыі;
б) прамежкі спадання і нарастання функцыі;
в) прамежкі знакапастаянства функцыі.

§ 12. Адваротныя трыганаметрычныя функцыі

Прыклад 1. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\arcsin(x-1)$; б) $\arccos(x^2-1)$; в) $\operatorname{arctg}(x+3)$.

Рашэнне.

а) Па азначэнні арксінуса ліку $\arcsin(x-1)$ — гэта вугал, сінус якога роўны $x-1$, г. зн. $-1 \leqslant x-1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 2$, $x \in [0; 2]$.

б) Па азначэнні арккосінуса ліку $\arccos(x^2-1)$ — гэта вугал, косінус якога роўны x^2-1, г. зн. $-1 \leqslant x^2-1 \leqslant 1$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2$, $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$, $x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

в) Па азначэнні арктангенса ліку $\operatorname{arctg}(x+3)$ — гэта вугал, тангенс якога роўны $x+3$, тады $x+3 \in (-\infty; +\infty)$, г. зн. $x \in (-\infty; +\infty)$.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin\left(\arccos\frac{1}{5}\right)$; б) $\sqrt{10}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)$.

Рашэнне.

а) Няхай $\alpha = \arccos\frac{1}{5}$, $\alpha \in (0; \pi)$. Тады $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць і атрымаем: $|\sin\alpha| = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. Паколькі $\alpha \in (0; \pi)$, то $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

б) Абазначым $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \alpha$. Па азначэнні арктангенса ліку атрымаем: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Па дадзеным значэнні $\operatorname{tg}\alpha$ знойдзем $\sin\alpha$.

Паколькі $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$, а $\sin^2\alpha = 1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

Паколькі $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а значыць, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Падставім знойдзенае значэнне ў зададзены выраз і атрымаем:

$\sqrt{10}\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \sqrt{10}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = 1.$

Функцыя $y = \arcsin x$

Функцыя $y = \sin x$ не з'яўляецца манатоннай на абсягу вызначэння і кожнае сваё значэнне прымае пры розных значэннях аргумента.

Разгледзім функцыю $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На гэтым прамежку функцыя нарастае, прымае ўсе значэнні $y \in [-1; 1]$, а значыць, мае адваротную функцыю.

Азначэнне

Функцыя, адваротная $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, называецца $\arcsin x$.

Уласцівасці функцыі $y = \arcsin x$

1. Абсяг вызначэння функцыі. $D(\arcsin x) = [-1; 1]$, паколькі $E(\sin x) = [-1; 1]$.

2. Мноства значэнняў функцыі. $E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, паколькі $y = \sin x$ разглядаецца для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Нулі функцыі. $\arcsin x = 0$, калі $x = 0$.

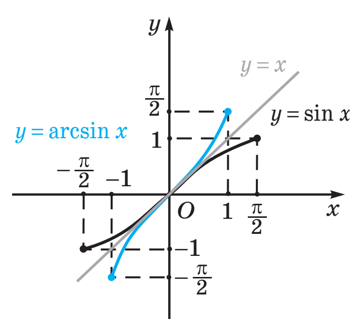
4. Прамежкі знакапастаянства функцыі $y = \arcsin x$. $\arcsin x > 0$, калі $x \in (0; 1]$; $\arcsin x < 0$, калі $x \in [-1; 0)$.

5. Прамежкі манатоннасці функцыі. Функцыя $y = \arcsin x$ нарастае на абсягу вызначэння.

6. Найбольшае значэнне функцыі роўна $\frac{\pi}{2}$, найменшае $-\frac{\pi}{2}$.

7. Функцыя $y = \arcsin x$ няцотная, паколькі абсяг яе вызначэння сіметрычны адносна нуля і $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Для пабудовы графіка функцыі $y = \arcsin x$ можна выканаць сіметрыю графіка функцыі $y = \sin x$ для $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ адносна прамой $y = x$ (рыс. 51).



Рыс. 51

Функцыі $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$

Аналагічна азначэнню функцыі $y = \arcsin x$ можна даць азначэнне функцыі $y = \arccos x$.

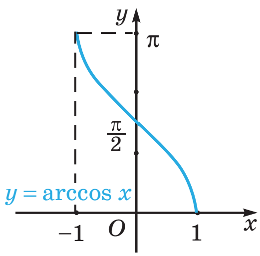
Для $x \in [0; \pi]$ існуе функцыя, адваротная функцыі $y = \cos x$, гэта функцыя $y = \arccos x$.

Існуюць функцыі, адваротныя функцыям $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$. Гэта функцыі $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ адпаведна.

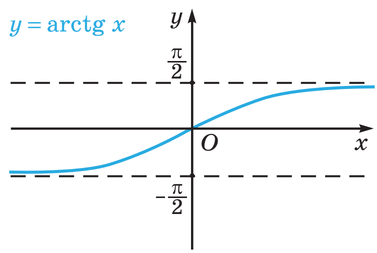
Іх уласцівасці адлюстраваны ў табліцы.

Функцыя / Уласцівасці	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Абсяг вызначэння функцыі	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Мноства значэнняў функцыі	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
Цотнасць (няцотнасць) функцыі	Не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай	Няцотная	Не з'яўляецца цотнай і не з'яўляецца няцотнай
Прамежкі знакапастаянства функцыі	$\arccos x > 0$ для $x \in [-1; 1)$	$\operatorname{arctg} x > 0$ для $x \in (0; +\infty)$; $\operatorname{arctg} x < 0$ для $x \in (-\infty; 0)$	$\operatorname{arcctg} x > 0$ для $x \in (-\infty; +\infty)$
Нулі функцыі	$x = 1$	$x = 0$	—
Прамежкі нарастання функцыі	—	$(-\infty; +\infty)$	—
Прамежкі спадання функцыі	$[-1; 1]$	—	$(0; \pi)$
Найбольшае значэнне функцыі	π	—	—
Найменшае значэнне функцыі	0	—	—

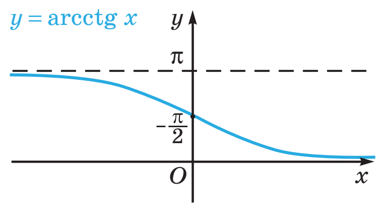
Відарысы графікаў функцый $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$ паказаны на рысунках 52—54.



Рыс. 52



Рыс. 53



Рыс. 54

Уласцівасці трыганаметрычных функцый

1. $\sin(\arcsin a) = a,\ a \in [-1;\ 1]$.
2. $\arcsin(\sin x) = x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\cos(\arccos a) = a,\ a \in [-1;\ 1]$.
4. $\arccos(\cos x) = x,\ x \in [0;\ \pi]$.
5. $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, a) = a,\ a \in \boldsymbol{R}$.
6. $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.
7. $\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\, a) = a,\ a \in \boldsymbol{R}$.
8. $\mathrm{arcctg}(\mathrm{ctg}\, x) = x,\ x \in (0;\ \pi)$.
9. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ a \in [-1; 1]$.
10. $\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arcctg}\, a = \frac{\pi}{2},\ a \in \boldsymbol{R}$.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $\arccos(3x + 2) = \arccos(5x + 3)$.

Рашэнне. Паколькі функцыя $y = \arccos x$ спадае на абсягу вызначэння, то з роўнасці значэнняў функцый вынікае роўнасць значэнняў аргументаў на абсягу вызначэння функцый у левай і правай частках ураўнення:

$$\begin{cases} 3x + 2 = 5x + 3, \\ -1 \leqslant 3x + 2 \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0{,}5, \\ -1 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -0{,}5.$$

Адказ: –0,5.

Прыклад 4. Знайдзіце (у градусах) значэнне вугла $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}676^\circ\right)$.

Рашэнне.

Паколькі $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha)=\alpha$ пры $0<\alpha<180^\circ$, то

$$\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}676^\circ\right)=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}(720^\circ-44^\circ)\right)=$$

$$=\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}(-44^\circ)\right)=\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{tg}44^\circ\right)=$$

$$=\operatorname{arcctg}\left(-\operatorname{ctg}46^\circ\right)=180^\circ-\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}46^\circ\right)=180^\circ-46^\circ=134^\circ.$$

Адказ: 134°.

12.1. Выберыце ўсе правільныя роўнасці:

а) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$; б) $\arccos 0=\frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin 0=2\pi$; г) $\operatorname{acrsin}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$;

д) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$; е) $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2\pi}{3}$;

ж) $\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$.

12.2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arcsin 1-2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)+\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

в) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)+\arcsin 0{,}5\right)$.

12.3. Што больш: $\arccos(-0{,}3)$ ці $\operatorname{arctg}(-0{,}3)$? Чаму?

12.4. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $y=\arcsin(3-5x)$; б) $y=\arccos(x-3)+\operatorname{arcctg}\sqrt{x-3}$;

в) $y=\arccos\left(x^2-x-1\right)$; г) $y=\arcsin\left(\left|x-2\right|\right)$.

12.5. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $y=4\pi-\arccos x$; б) $y=\frac{\pi}{10}-\operatorname{arcctg}x$;

в) $y=\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{12}$; г) $y=3\arccos x-\frac{7\pi}{18}$.

12.6. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

а) $\arcsin\frac{3}{4}$, $\arcsin\left(-\frac{2}{5}\right)$, $\arcsin\frac{1}{3}$; б) $\arccos\frac{1}{2}$, $\arccos\left(-\frac{1}{10}\right)$, $\arccos\frac{\pi}{4}$.

12.7. Пабудуйце графік функцыі:

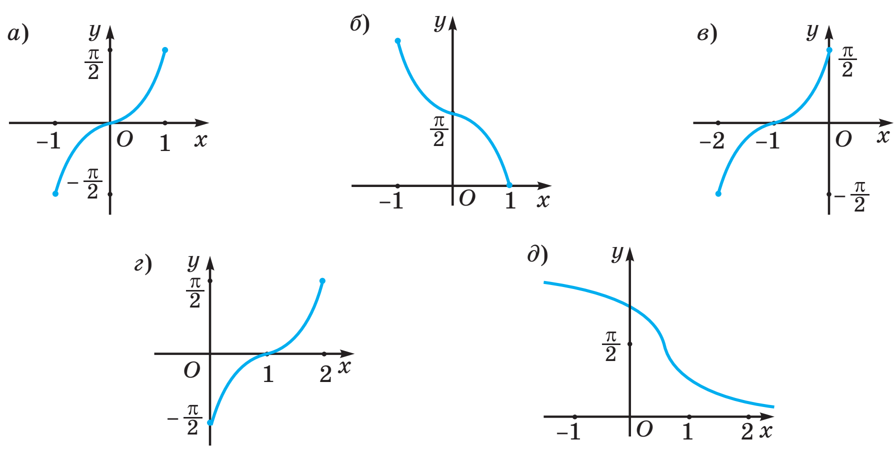
а) $y = \sin(\arcsin(2x - 3))$; б) $y = \cos\left(\arccos\left(x^2 - 1\right)\right)$.

12.8. Вылічыце:

а) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{5}{13}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$.

12.9. На адным з рысункаў 55, *а*—*д* паказаны відарыс графіка функцыі $y = \arcsin(x - 1)$. Выберыце гэты рысунак.



Рыс. 55

12.10. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \arccos(x + 3)$; б) $y = -\operatorname{arctg}x + \frac{\pi}{2}$;

в) $y = 2\operatorname{arcctg}(x - 1)$; г) $y = \arcsin 2x$.

12.11. Рашыце ўраўненне:

а) $3\arccos(2x + 3) = \frac{5\pi}{2}$;

б) $6\operatorname{arctg}(7 - 2x) = -\pi$;

в) $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$;

г) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(0{,}5 - x)) = x^2 - 4x + 2{,}5$.

12.12. Рашыце ўраўненне:

а) $\arcsin(2x-15)=\arcsin(x^2-6x-8)$;

б) $\operatorname{arcctg}(2x-1)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right)$;

в) $3\arcsin^2 x-2\pi\arcsin x-\pi^2=0$;

г) $9\arccos^2 2x-3\pi\arccos 2x-2\pi^2=0$.

12.13. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\arcsin^2 x+\arccos^2 x=\frac{5\pi^2}{36}$.

12.14. Рашыце няроўнасць:

а) $\arcsin(x-1)>-\frac{\pi}{6}$; б) $\arccos\frac{1}{x}\leqslant\frac{\pi}{3}$.

12.15. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці:

а) $\arccos(x+5)<\arccos(x+4)$;

б) $\operatorname{arcctg}(8x^2-6x-1)\geqslant\operatorname{arcctg}(4x^2-x+8)$.

12.16. Вылічыце:

а) $\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

в) $\arcsin\left(\sin\frac{13\pi}{6}\right)$; г) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{25\pi}{4}\right)\right)$.

12.17. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\arccos(\cos 5)$; б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 3)$;

в) $\arccos(\cos 6)$; г) $\arcsin(\sin 5)$.

12.18. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y=\arccos(|x|)$; б) $y=|\operatorname{arctg} x|$;

в) $y=\left|\frac{1}{2}\operatorname{arcctg} x\right|$; г) $y=|\arcsin(x+1)|$.

12.19. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$$\arccos(4x^2-3x-2)+\arccos(3x^2-8x-4)=\pi.$$

12.20. Рашыце ўраўненне $2\arcsin x=-\pi-(x+1)^2$.

§ 13. Трыганаметрычныя ўраўненні. Трыганаметрычныя няроўнасці

	Рашэнні ўраўнення $\sin x = a$	Рашэнні ўраўнення $\cos x = a$
$\lvert a\rvert > 1$	Няма каранёў	Няма каранёў
$a = 0$	$x = \pi n, n \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
$a = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z$
$a = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$
$\lvert a\rvert < 1, a \neq 0$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$

Рашэнні ўраўнення $\operatorname{tg} x = a$	Рашэнні ўраўнення $\operatorname{ctg} x = a$
$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in Z$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in Z$

Прыклад 1. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$, якія належаць прамежку $(-\pi; 4\pi)$.

Рашэнне.

$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$; $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; $\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$. Прамежку $(-\pi; 4\pi)$ належаць карані: $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$. Знойдзем іх суму: $-\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{2} = 3\pi$.

Адказ: 3π.

Прыклад 2. Знайдзіце найбольшы адмоўны корань ураўнення $2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$.

Рашэнне.

$2\cos(\pi(x-1)) = \sqrt{3}$; $\cos(\pi(x-1)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\pi(x-1) = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$;

$$x - 1 = \pm\frac{1}{6} + 2n,\ n \in Z;\quad \left[\begin{array}{l} x = 1 + \frac{1}{6} + 2k,\ k \in Z, \\ x = 1 - \frac{1}{6} + 2m,\ m \in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{7}{6} + 2k,\ k \in Z, \\ x = \frac{5}{6} + 2m,\ m \in Z. \end{array}\right.$$

Найбольшым адмоўным коранем ураўнення з'яўляецца лік $-\frac{5}{6}$.

Адказ: $-\frac{5}{6}$.

Прыклад 3. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$$(\sin x + 1)\operatorname{tg} x = 0$$

на прамежку $[0;\ 30\pi]$.

Рашэнне.

$(\sin x + 1)\operatorname{tg} x = 0$; $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \operatorname{tg} x = 0, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ Калі $\sin x = -1$, то $\cos x = 0$, г. зн. каранямі зыходнага ўраўнення з'яўляюцца карані ўраўнення $\operatorname{tg} x = 0$, тады $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. На прамежку $[0;\ 30\pi]$ знаходзіцца 31 корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: 31.

Прыклад 4. Знайдзіце нулі функцыі $y = \operatorname{tg} x\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Рашэнне.

Рэшым ураўненне $\operatorname{tg} x\left(\sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$; $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 0, \\ \begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \begin{cases} \sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \begin{cases} \frac{x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \begin{cases} x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos x \neq 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Паколькі $\cos x = 0$ пры $x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то сістэма не мае рашэнняў. Такім чынам, лікі выгляду $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, з'яўляюцца нулямі дадзенай функцыі.

Адказ: πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 5. Знайдзіце найбольшы корань ураўнення

$$5\cos^2\frac{2\pi x}{3} - 5\cos\frac{2\pi x}{3} - \sin^2\frac{2\pi x}{3} = 3,$$

які належыць прамежку $[-2;\ 5]$.

Рашэнне.

Няхай $t = \frac{2\pi x}{3}$, тады ўраўненне мае выгляд $5\cos^2 t - 5\cos t - \sin^2 t = 3$. Рэшым атрыманае ўраўненне:

$$5\cos^2 t - 5\cos t - \left(1 - \cos^2 t\right) = 3;\ \ 6\cos^2 t - 5\cos t - 4 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos t = \frac{4}{3} \notin [-1; 1],\\ \cos t = -\frac{1}{2};\end{array}\right. \quad \cos t = -\frac{1}{2}; \ t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тады $\frac{2\pi x}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \ x = \pm 1 + 3n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$

Найбольшы корань ураўнення, які належыць прамежку $[-2; 5]$, роўны 5.

Адказ: 5.

Прыклад 6. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6$ на прамежку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Рашэнне.

Запішам ураўненне $7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6$ у выглядзе:

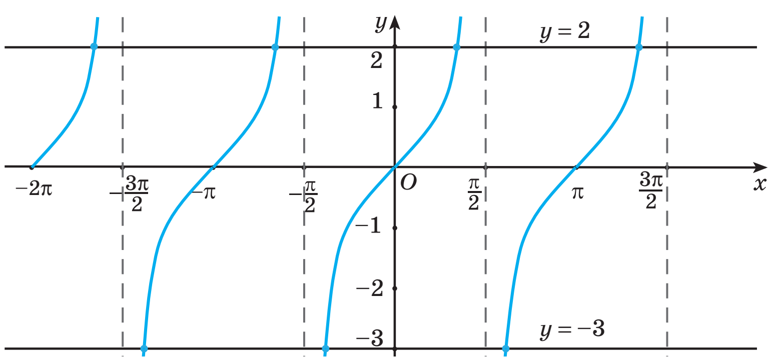
$$7\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 6\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right); \ \sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 6\cos^2 x = 0.$$

Паколькі значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^2 x$ і атрымаем $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 6 = 0$.

Няхай $t = \operatorname{tg} x$, тады ўраўненне мае выгляд $t^2 + t - 6 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -3,\\ t = 2.\end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = -3,\\ \operatorname{tg} x = 2.\end{array}\right.$

Пабудуем графікі функцый $y = \operatorname{tg} x$, $y = -3$ і $y = 2$ (рыс. 56) і вызначым колькасць пунктаў перасячэння гэтых графікаў на прамежку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.



Рыс. 56

На прамежку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ дадзенае ўраўненне мае сем каранёў.

Адказ: 7.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$.

Рашэнне.

$4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0;$

$4\sin^3 x = \sin x - \cos x;$

$4\sin^3 x = (\sin x - \cos x)\cdot 1;$

$4\sin^3 x = (\sin x - \cos x)\cdot(\sin^2 x + \cos^2 x);$

$4\sin^3 x = \sin^3 x + \sin x\cos^2 x - \cos x\sin^2 x - \cos^3 x;$

$3\sin^3 x + \sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x + \cos^3 x = 0.$

Падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos^3 x$ (папярэдне пераканаемся, што значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення): $3\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x + 1 = 0$. Няхай $\operatorname{tg} x = t$, тады ўраўненне мае выгляд $3t^3 + t^2 - t + 1 = 0$; $3t^3 - 2t^2 + t + 3t^2 - 2t + 1 = 0$; $t(3t^2 - 2t + 1) + (3t^2 - 2t + 1) = 0$; $(t+1)(3t^2 - 2t + 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} t+1=0, \\ 3t^2 - 2t + 1 = 0. \end{array}\right.$

Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў ($D < 0$), тады $t = -1$, г. зн. $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 8. Рашыце ўраўненне $\cos x = x^2 + 1$.

Рашэнне.

Паколькі $\cos x \leqslant 1$, а $x^2 + 1 \geqslant 1$ для $x \in \boldsymbol{R}$, то ўраўненне $\cos x = x^2 + 1$ раўназначна сістэме $\begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ x = 0. \end{cases}$

Паколькі $\cos 0 = 1$, то $x = 0$ — корань зыходнага ўраўнення.

Адказ: 0.

Прыклад 9. Рашыце ўраўненне $\sin x + \cos 4x = 2$.

Рашэнне.

Паколькі значэнні $\sin x$ і $\cos x$ не перавышаюць 1, то роўнасць магчыма толькі пры ўмове:

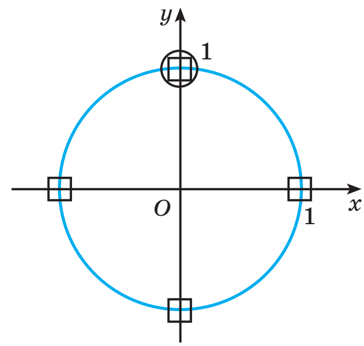
$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ 4x = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

Абазначым ◯ рашэнні першага ўраўнення сістэмы, а □ — рашэнні другога ўраўнення (рыс. 57).

Рашэнне зыходнага ўраўнення:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$



Рыс. 57

Прыклад 10. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos\frac{5x}{2} + \cos 3x = 2.$

Рашэнне.

Паколькі значэнне косінуса любога вугла не перавышае адзінкі, то дадзенае ўраўненне раўназначна сістэме ўраўненняў

$$\begin{cases}\cos\frac{5x}{2} = 1,\\ \cos 3x = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}\frac{5x}{2} = 360^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 3x = 360^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z};\end{cases} \quad \begin{cases}x = 144^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = 120^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z}.\end{cases}$$

НАК(144; 120) = 720, г. зн. лікі выгляду $144^\circ\ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, будуць супадаць з лікамі выгляду $120^\circ\ m,\ m \in \boldsymbol{Z}$, праз кожныя 720°, значыць, каранямі зыходнага ўраўнення з'яўляюцца значэнні зменнай, роўныя $720^\circ k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны -720°.

Адказ: -720°.

Прыклад 11. Дакажыце, што ўраўненне $\sqrt{x^4 + 10} = 3\sin x$ не мае каранёў.

Рашэнне.

Паколькі $x^4 + 10 \geqslant 10$ для $x \in \boldsymbol{R}$, то $\sqrt{x^4 + 10} \geqslant \sqrt{10} > 3.$

З другога боку, $3\sin x \leqslant 3$ пры $x \in \boldsymbol{R}$. Паколькі левая частка ўраўнення большая за тры, а правая — не перавышае трох для любых рэчаісных значэнняў зменнай, то ўраўненне не мае каранёў.

Прыклад 12. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\frac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0$ на прамежку $[0;\ 9\pi]$.

Рашэнне.

$$\frac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0; \quad \begin{cases}1 + \cos x = 0,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{3} \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}\cos x = -1,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{3} \neq 0.\end{cases}$$

Рэшым першае ўраўненне сістэмы: $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{N}$.

Прамежку $[0;\ 9\pi]$ належаць карані π; 3π; 5π; 7π; 9π.

Пры $x = \pi$ атрымаем $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} \neq 0$.

Пры $x = 3\pi$ атрымаем $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{3} = \operatorname{tg}\pi = 0$.

Пры $x = 5\pi$ атрымаем $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} \neq 0$.

Пры $x = 7\pi$ атрымаем $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3} \neq 0$.

Пры $x = 9\pi$ атрымаем $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{3} = \operatorname{tg}3\pi = 0$.

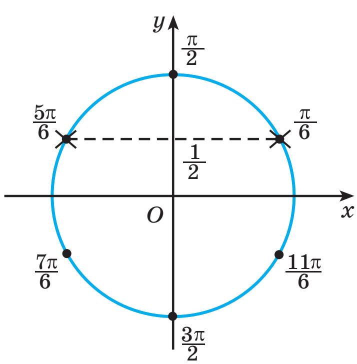
Такім чынам, тры карані ўраўнення $\dfrac{1+\cos x}{\operatorname{tg}\frac{x}{3}} = 0$ належаць прамежку $[0;\ 9\pi]$.

Адказ: 3.

Прыклад 13. Знайдзіце найменшы дадатны корань ураўнення $\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x} = 0$.

Рашэнне.

Ураўненне $\dfrac{\cos 3x}{1-2\sin x} = 0$ раўназначна сістэме



Рыс. 58

$$\begin{cases}\cos 3x = 0,\\ 1-2\sin x \neq 0;\end{cases} \quad \begin{cases}3x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \sin x \neq \frac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ \sin x \neq \frac{1}{2}.\end{cases}$$

Адзначым на адзінкавай акружнасці лікі выгляду $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 58). Улічыўшы ўмову $\sin x \neq \frac{1}{2}$, атрымаем, што лікі выгляду $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, і $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення. Найменшым дадатным коранем ураўнення з'яўляецца лік $\frac{\pi}{2}$.

Адказ: $\frac{\pi}{2}$.

Прыклад 14. Знайдзіце (у градусах) суму каранёў ураўнення $\operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{|\cos x|}$, якія належаць прамежку $[0;\ 2\pi]$.

Рашэнне.

Калі $\cos x > 0$, то ўраўненне прымае выгляд $\operatorname{tg} x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Умову $\cos x > 0$ задавальняюць лікі выгляду $\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. З іх толькі $\frac{\pi}{4} \in [0;\ 2\pi]$.

Калі $\cos x < 0$, то ўраўненне прымае выгляд $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. Умову $\cos x < 0$ задавальняюць лікі выгляду $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. З іх толькі $\frac{3\pi}{4} \in [0; 2\pi]$.

Шуканая сума роўна $\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \pi = 180^\circ$.

Адказ: 180°.

Трыганаметрычныя няроўнасці

Прыклад 15. Рашыце няроўнасць $\sin x > 0{,}5$.

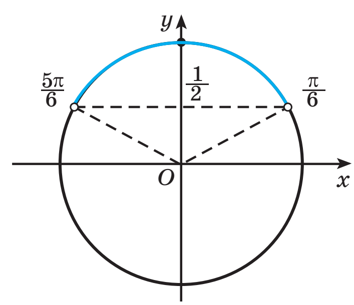
Рашэнне.

Паколькі перыяд функцыі $y = \sin x$ роўны 2π, то разгледзім рашэнне няроўнасці $\sin x > 0{,}5$ на гэтым перыядзе, напрыклад на адрэзку $[0;\ 2\pi]$.

1. Адкладзём на восі ардынат пункт, які адпавядае ліку 0,5.

2. На адзінкавай акружнасці адзначым два пункты, ардынаты якіх роўны 0,5 (рыс. 59).

3. Запішам вугал, які адпавядае аднаму з гэтых пунктаў адрэзка $[0;\ 2\pi]$. Гэта вугал $\frac{\pi}{6}$.



Рыс. 59

4. У адпаведнасці са знакам няроўнасці паварочваць пункт па акружнасці трэба праз пункт $\frac{\pi}{2}$.

5. Вугал, які адпавядае другому пункту, — вугал $\frac{5\pi}{6}$.

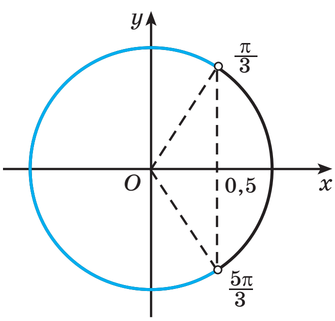
6. Такім чынам, $x \in \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. З улікам перыядычнасці функцыі $y = \sin x$ атрымаем адказ: $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Алгарытм рашэння няроўнасці $\sin x > a$ ($\sin x < a$), $|a| < 1$ ***з дапамогай адзінкавай акружнасці***

① Адкласці на восі ардынат пункт, які адпавядае ліку a.
② Адзначыць на адзінкавай акружнасці два пункты, ардынаты якіх роўны a.
③ Запісаць вугал, які адпавядае аднаму з гэтых пунктаў.
④ Вызначыць у адпаведнасці са знакам няроўнасці, па якой з дзвюх дуг акружнасці трэба рухацца да другога адзначанага пункта.
⑤ Рухаючыся па акружнасці, вызначыць вугал, які адпавядае другому адзначанаму пункту.
⑥ Запісаць адказ у выглядзе прамежка ад меншага вугла да большага, дадаючы перыяд.

Прыклад 16. Рашыце няроўнасць $\cos x < 0{,}5$.

Рашэнне. Паколькі перыяд функцыі $y = \cos x$ роўны 2π, то разгледзім рашэнне няроўнасці $\cos x < 0{,}5$ на гэтым перыядзе, напрыклад на адрэзку $[0; 2\pi]$.



Рыс. 60

1. Адкладзём на восі абсцыс пункт, які адпавядае ліку 0,5.

2. На адзінкавай акружнасці адзначым два пункты, у якіх абсцысы роўны 0,5 (рыс. 60).

3. Запішам вугал, які адпавядае аднаму з гэтых пунктаў з адрэзка $[0; 2\pi]$. Гэта вугал $\frac{\pi}{3}$.

4. У адпаведнасці са знакам няроўнасці рухацца па акружнасці трэба праз пункты $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.

5. Вугал, які адпавядае другому пункту, — вугал $\frac{5\pi}{3}$.

6. Значыць, $x \in \left(\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right)$. З улікам перыядычнасці функцыі $y = \cos x$ атрымаем адказ: $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Алгарытм рашэння няроўнасці $\cos x > a$ ($\cos x < a$), $|a| < 1$ ***з дапамогай адзінкавай акружнасці***

① Адкласці на восі абсцыс пункт, які адпавядае ліку a.
② Адзначыць на акружнасці два пункты, абсцысы якіх роўны a.
③ Запісаць вугал, які адпавядае аднаму з гэтых пунктаў.
④ Вызначыць у адпаведнасці са знакам няроўнасці, па якой з дзвюх дуг акружнасці трэба рухацца да другога адзначанага пункта.

⑤ Рухаючыся па акружнасці, вызначыць вугал, які адпавядае другому адзначанаму пункту.

⑥ Запісаць адказ у выглядзе прамежку ад меншага вугла да большага, дадаючы перыяд.

Прыклад 17. Рашыце няроўнасць $\operatorname{tg}x \geqslant 1$.

Рашэнне.

Паколькі функцыя $y = \operatorname{tg}x$ перыядычная з перыядам π і вызначана для ўсіх $x \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$, то разгледзім рашэнне няроўнасці на перыядзе, напрыклад на інтэрвале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На гэтым інтэрвале функцыя $y = \operatorname{tg}x$ нарастае, а значэнне, роўнае 1, прымае пры $x = \frac{\pi}{4}$. Рашэнне няроўнасці на гэтым перыядзе ёсць інтэрвал $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

З улікам перыядычнасці атрымаем адказ: $\left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 18. Рашыце няроўнасць $2\operatorname{tg}x \geqslant \sqrt{3} - \sin(\arcsin(\operatorname{tg}x))$.

Рашэнне.

Па ўласцівасці $\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1; 1]$ будзем мець

$$\sin(\arcsin(\operatorname{tg}x)) = \operatorname{tg}x, \text{ калі } \operatorname{tg}x \in [-1; 1].$$

$$2\operatorname{tg}x \geqslant \sqrt{3} - \sin(\arcsin(\operatorname{tg}x)) \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}x \geqslant \sqrt{3} - \operatorname{tg}x,\ \operatorname{tg}x \in [-1; 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\operatorname{tg}x \geqslant \sqrt{3},\ \operatorname{tg}x \in [-1; 1] \Leftrightarrow \operatorname{tg}x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{tg}x \in [-1; 1] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \operatorname{tg}x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right],\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

13.1. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin\left(\frac{x}{8} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 765^\circ$; б) $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sin 900^\circ$.

13.2. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = 7\cos 4x + 3$ і $y = 3\sin^2 4x$.

13.3. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\cos\left(7x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$, якія належаць прамежку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

13.4. Знайдзіце нулі функцыі $f(x)=\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}-7x\right)+1$.

13.5. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin x\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x=0$; б) $\cos x\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}x=0$.

13.6. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення:

а) $2\sin^2 x-\left(12-\sqrt{2}\right)\sin x-6\sqrt{2}=0$;

б) $2\cos^2 x+\left(8-\sqrt{3}\right)\cos x-4\sqrt{3}=0$.

13.7. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$\operatorname{ctg}^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}=0$ на прамежку $\left[-\pi;\ 2\pi\right]$.

13.8. Рашыце ўраўненне:

а) $\sin^2 12x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 2x-\cos^2 12x+1$;

б) $\cos^2\frac{2x}{5}-1-\cos 5x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin^2\frac{2x}{5}$.

13.9. Знайдзіце суму найбольшага адмоўнага і найменшага дадатнага каранёў ураўнення $2\cos^2 2x-17\cos 2x-9=0$.

13.10. Вызначце колькасць каранёў ураўнення на прамежку $[-12\pi;\ 5\pi]$:

а) $(\cos x-1)\operatorname{ctg}x=0$; б) $(\cos x+1)\left(\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}\right)=0$;

в) $(\sin x-1)\left(\operatorname{tg}x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$; г) $\sin x\cdot\operatorname{tg}x-\sin x+\operatorname{tg}x-1=0$.

13.11. Знайдзіце нулі функцыі $y=\operatorname{ctg}x\left(\cos\frac{x}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

13.12. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $f(x)=5\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+6\cos^2 x$ і прамой $y=5$;

б) $f(x)=3\sin^2 2x-\sin 2x\cos 2x$ і прамой $y=2$;

в) $f(x)=3\sin^2\frac{x}{5}-\sqrt{3}\sin\frac{x}{5}\cos\frac{x}{5}+4\cos^2\frac{x}{5}$ і прамой $y=3$.

13.13. Знайдзіце (у градусах) сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення $\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x=0$, якія належаць прамежку $[-120°;\ 90°]$.

13.14. Вызначце колькасць каранёў ураўнення

$\sin^2 x-\left(1+\sqrt{3}\right)\sin x\cos x+\sqrt{3}\cos^2 x=0$ на прамежку $\left[-2\pi;\ \frac{5\pi}{2}\right]$.

13.15. Рашыце ўраўненне $4\cos^3 x-\cos x+\sin x=0$.

13.16. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы ўласцівасці функцый:

а) $\sin\frac{\pi x}{6}=x^2-6x+10$; б) $2\cos 2\pi x=x+\frac{1}{x}$.

13.17. Рашыце ўраўненне, выкарыстаўшы мноства значэнняў функцый сінус і косінус:

а) $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$; б) $3\sin^2\frac{x}{3} + 5\sin^2 x = 8$.

13.18. Дакажыце, што ўраўненне $\sqrt{8 + \cos x} = 3 + x^4$ мае адзіны корань.

13.19. Рашыце ўраўненне:

а) $\frac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0$; б) $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$; в) $\frac{2\cos x + \sqrt{3}}{2\sin x - 1} = 0$.

13.20. Знайдзіце найменшы дадатны і найбольшы адмоўны карані ўраўнення $\frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0$.

13.21. Знайдзіце найбольшы адмоўны корань ураўнення $\frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2}\sin x} = 0$.

13.22. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos x - |\sin x| = 0$; б) $|\cos x| - \sqrt{3}\sin x = 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; г) $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$.

13.23. Знайдзіце (у градусах) найменшы дадатны корань ураўнення $|\operatorname{tg} x| + \frac{1}{\cos x} = \operatorname{tg} x$.

13.24. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $1 + 2\sin x|\cos x| = 0$ на прамежку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

13.25. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$$\sin x - \frac{|2\cos x - 1|}{2\cos x - 1} \cdot \sin^2 x = \sin^2 x \text{ на прамежку } [-\pi; 2\pi].$$

13.26. Рашыце няроўнасць:

а) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sin 2x < -\frac{1}{2}$; в) $\sin x \geqslant \sqrt{3}$;

г) $\cos\frac{x}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$; е) $\cos x > -1{,}5$;

ж) $\operatorname{tg} 0{,}1x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; з) $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -1$.

13.27. Рашыце двайную няроўнасць:

а) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $0 < \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $1 \leqslant \operatorname{tg} x < 2$; г) $-\sqrt{3} < \operatorname{ctg} x < 5$.

13.28. Рашыце няроўнасць $\sin\left(\arccos\left(x^2 + \sqrt{3}x\right)\right) \geqslant 1$.

13.29. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\sin\frac{\pi(x^2+1)}{7+x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13.30. Знайдзіце найменшы цэлы дадатны лік, які належыць абсягу вызначэння функцыі $f(x)=\sqrt{\cos^2\frac{\pi x}{12}-\sin^2\frac{\pi x}{12}-1}$.

13.31. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$\sqrt{\cos^2 x-2\cos x+1}+\sqrt{\cos^2 x-4\cos x+4}=1$ на адрэзку $[0;\ 10]$.

§ 14. Формулы прывядзення

Прыклад 1. Вызначце, якія ўласцівасці і формулы былі выкарыстаны пры спрашчэнні выразу:

а) $\sin(540°-\alpha)=\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$;

б) $\operatorname{tg}(450°+\beta)=\operatorname{tg}(90°+\beta)=-\operatorname{ctg}\beta$;

в) $\operatorname{ctg}(\gamma-270°)=-\operatorname{ctg}(270°-\gamma)=-\operatorname{tg}\gamma$;

г) $\cos(\varphi-810°)=\cos(810°-\varphi)=\cos(90°-\varphi)=\sin\varphi$.

Рашэнне.

а) Перыядычнасць функцыі сінус, формулы прывядзення;
б) перыядычнасць функцыі тангенс, формулы прывядзення;
в) няцотнасць функцыі катангенс, формулы прывядзення;
г) цотнасць і перыядычнасць функцыі косінус, формулы прывядзення.

Прыклад 2. Вылічыце $\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)+\frac{1}{\cos^2\frac{21\pi}{4}}-2\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{4}$.

Рашэнне.

1) $\sin\left(-\frac{20\pi}{3}\right)=-\sin\frac{20\pi}{3}=-\sin\left(6\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=$

$=-\sin\frac{2\pi}{3}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos^2\frac{21\pi}{4}=\cos^2\left(4\pi+\frac{5\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{5\pi}{4}=\cos^2\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;

3) $\operatorname{tg}^2\frac{7\pi}{4}=\operatorname{tg}^2\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}=1$;

4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}+2-2=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Адказ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прыклад 3. Вылічыце значэнне выразу $\frac{\sin 127^\circ + 2\cos 143^\circ + \sin 540^\circ}{\cos 37^\circ}$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем:

$$\frac{\sin 127^\circ + 2\cos 143^\circ + \sin 540^\circ}{\cos 37^\circ} = \frac{\sin(90^\circ + 37^\circ) + 2\cos(180^\circ - 37^\circ) + \sin(360^\circ + 180^\circ)}{\cos 37^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 37^\circ - 2\cos 37^\circ + \sin 180^\circ}{\cos 37^\circ} = \frac{-\cos 37^\circ}{\cos 37^\circ} = -1.$$

Адказ: -1.

Прыклад 4. Знайдзіце значэнне выразу

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 4\right) + \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right).$$

Рашэнне. Выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \operatorname{arcctg} 4\right) + \cos\left(\pi - \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4) - \cos\left(\pi - \left(\pi - \arccos\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 4) + \cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = 4 + \frac{1}{3} = 4\frac{1}{3}.$$

Адказ: $4\frac{1}{3}$.

Прыклад 5. Вылічыце: $\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right)$.

Рашэнне.

$$\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{35\pi}{11}\right) = \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(2\pi + \frac{13\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{11}\right) = \frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= \frac{22}{\pi}\arcsin\left(-\cos\frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\cos\frac{2\pi}{11}\right) = -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{11}\right)\right) =$$

$$= -\frac{22}{\pi}\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{22}\right) = -\frac{22}{\pi}\cdot\frac{7\pi}{22} = -7.$$

Адказ: -7.

Прыклад 6. Рашыце ўраўненне $3\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - 5\cos x = 0$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем ураўненне $3\sin x - 5\cos x = 0$.

Паколькі значэнні зменнай, пры якіх $\cos x = 0$, не з'яўляюцца каранямі дадзенага ўраўнення, то падзелім абедзве часткі ўраўнення на $\cos x$ і атрымаем: $3\operatorname{tg} x - 5 = 0$; $\operatorname{tg} x = \frac{5}{3}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $6\cos^2 x + 5\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 7.$

Рашэнне. Паколькі $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ і $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, то ўраўненне прымае выгляд $6\left(1 - \sin^2 x\right) + 5\sin x = 7$; $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

Няхай $\sin x = t$, $t \in [-1;\, 1]$, тады $6t^2 - 5t + 1 = 0;$

$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1 > 0;$

$t_{1,\,2} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 6}$; $t_1 = \frac{1}{3}$; $t_2 = \frac{1}{2}.$

Тады $\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{3}, \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Адказ: $(-1)^n \arcsin\frac{1}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

Прыклад 8. Пабудуйце графік функцыі $y = \frac{|x|}{x}\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

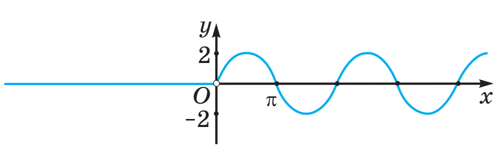
Рашэнне.

$y = \frac{|x|}{x}\sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

Выкарыстаем формулы прывядзення і атрымаем $y = \frac{|x|}{x}\sin x + \sin x.$

Тады $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = \frac{x}{x}\sin x + \sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = -\frac{x}{x}\sin x + \sin x; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = \sin x + \sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = -\sin x + \sin x; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ y = 2\sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Відарыс графіка дадзенай функцыі паказаны на рысунку 61.



Рыс. 61

14.1. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\dfrac{3\cos196^\circ + 12\cos164^\circ}{\cos16^\circ}$; б) $\dfrac{2\cos201^\circ - 16\sin111^\circ}{\cos21^\circ}$.

14.2. Знайдзіце значэнне выразу

$$\sin^2 6{,}4\pi + \sin^2 2{,}9\pi - 4\,\mathrm{tg}\,1{,}4\pi \cdot \mathrm{tg}\,7{,}1\pi.$$

14.3. Выкарыстаўшы формулы прывядзення, дакажыце, што:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

б) $\cos\left(\frac{17\pi}{12} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{25\pi}{13} - x\right) = -\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{13} + x\right)$.

14.4. Знайдзіце значэнне выразу

$$-\cos\left(\frac{27\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(-21\pi - \alpha),$$

калі $\sin\alpha = -0{,}1$.

14.5. Вылічыце:

а) $\sin\left(\pi - \arcsin\frac{2}{7}\right)$; б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \mathrm{arctg}(-5)\right)$;

в) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \mathrm{arcctg}\,9\right) + \cos(\pi - \arccos(-0{,}9))$.

14.6. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos\left(\pi + \arcsin\frac{4}{9}\right)$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos0{,}6\right)$;

в) $5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right)\right)$.

14.7. Спрасціце выраз:

а) $\sin^2(\pi - \alpha) + \mathrm{tg}^2(\alpha - \pi) \cdot \mathrm{tg}^2(1{,}5\pi + \alpha) + \sin(0{,}5\pi + \alpha)\cos(\alpha - 2\pi)$;

б) $\dfrac{\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)\right)^2 - 1}{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}$;

в) $\left(\mathrm{ctg}(8{,}5\pi - \alpha)\cos(-\alpha) + \cos(\pi - \alpha)\right)^2 + \dfrac{2\sin^2(7\pi - \alpha)}{\mathrm{tg}(\alpha - \pi)}$.

14.8. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{ctg}\,5^\circ\,\mathrm{ctg}\,15^\circ\,\mathrm{ctg}\,25^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{ctg}\,75^\circ\,\mathrm{ctg}\,85^\circ$;

б) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 140^\circ + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$.

14.9. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\dfrac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\sin(\alpha - \pi)}{\mathrm{ctg}(2\pi - \alpha)}$, калі $\mathrm{ctg}(\alpha - \pi) = 0{,}75$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

б) $\dfrac{\cos(\alpha - 270^\circ)\sin(\alpha + 270^\circ)}{\mathrm{tg}(\alpha + 180^\circ)}$, калі $\sin(\alpha - 180^\circ) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

14.10. Вылічыце: $\frac{96}{\pi}\arccos\left(\sin\left(-\frac{23\pi}{48}\right)\right)$.

14.11. Выкарыстайце формулы прывядзення і рашыце ўраўненне:

а) $2\cos^2 x - 3\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 2\sin x + 2$;

б) $\dfrac{5}{\cos^2(3\pi - x)} = 17 + \mathrm{tg}^2(2\pi - x)$;

в) $\cos\left(1{,}5\pi + \frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\sin\left(1{,}5\pi - \frac{x}{2}\right) = 0$.

14.12. Для функцыі $f(x) = 7\cos 4x + \mathrm{ctg}\,8x$ знайдзіце:

а) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; б) $f\left(-\frac{5\pi}{16}\right)$.

14.13. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\cos\left(\alpha - \frac{33\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{35\pi}{4} - \alpha\right)}$, калі $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 8$.

14.14. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $3\cos(1{,}5\pi + x) = 2\cos^2 x$, якія належаць прамежку $[0; \pi]$.

14.15. Знайдзіце (у градусах) значэнне вугла $\mathrm{arcctg}\,(\mathrm{tg}\,658^\circ)$.

14.16. Выкарыстайце формулы прывядзення і рашыце няроўнасць:

а) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \leqslant \frac{1}{2}$; б) $\cos(\pi + x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\mathrm{tg}(7{,}5\pi - 2x) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

14.17. Рашыце ўраўненне $x^2 + 2\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)x + 1 = 0$.

§ 15. Сінус, косінус, тангенс сумы і рознасці

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \qquad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу $16\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$.

Рашэнне. Знойдзем значэнне выразу

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\sin45^\circ\cos30^\circ-\sin30^\circ\cos45^\circ=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Вылічым значэнне шуканага выразу:

$$16\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)=$$

$$=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6-2\sqrt{12}+2}=$$

$$=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{8-4\sqrt{3}}=4\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)}=$$

$$=8\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=8\cdot1=8.$$

Адказ: 8.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу $\cos\left(\arcsin0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Рашэнне.

Знойдзем значэнне выразу $\cos\left(\arcsin0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)$.

Няхай $\alpha=\arcsin0{,}6$; $\beta=\arccos\frac{5}{13}$; $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Тады $\sin\alpha=0{,}6$; $\cos\beta=\frac{5}{13}$. Паколькі $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $\beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=0{,}8$; $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{12}{13}$.

Атрымаем

$$\cos\left(\arcsin0{,}6+\arccos\frac{5}{13}\right)=\cos(\alpha+\beta)=$$

$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}=-\frac{16}{65}.$$

Адказ: $-\frac{16}{65}$.

Прыклад 3. Знайдзіце $2\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, калі $\sin\alpha = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\beta = 2$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

Рашэнне. Выкарыстаем асноўную трыганаметрычную тоеснасць і атрымаем: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - 0{,}36 = 0{,}64$; $\cos\alpha = 0{,}8$ або $\cos\alpha = -0{,}8$.

Паколькі $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha = -0{,}8$, тады $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = -\frac{3}{4}$.

Па формуле тангенса сумы $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ атрымаем

$$2\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 2\cdot\frac{-\frac{3}{4}+2}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot 2} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

Адказ: 1.

Прыклад 4. Знайдзіце $\cos\alpha$, калі $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{6} < 2\pi$.

Рашэнне. Ведаючы, што $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14}$, з дапамогай асноўнай трыганаметрычнай тоеснасці знойдзем

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \pm\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)} = \pm\sqrt{1-\left(-\frac{13}{14}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{27}{196}} = \pm\frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Паколькі $\frac{3\pi}{2} < \alpha + \frac{\pi}{6} < 2\pi$, то $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

Выкарыстаем формулы складання:

$$\begin{cases}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{13}{14},\\ \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases} \quad \begin{cases}\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{13}{14},\\ \cos\alpha\cos\frac{\pi}{6} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = -\frac{13}{14},\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{14};\end{cases} \quad \begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{13}{7},\\ \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{7}; \;\Big|\cdot\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{13}{7},\\ 3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha = \frac{9}{7}.\end{cases}$$

Складзём першае і другое ўраўненні сістэмы і атрымаем $4\cos\alpha = -\frac{4}{7}$; $\cos\alpha = -\frac{1}{7}$.

Адказ: $-\frac{1}{7}$.

Прыклад 5. Рашыце ўраўненне $\sin x + \cos x = 1$.

Рашэнне.

Памножым абедзве часткі ўраўнення на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і атрымаем:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ або } \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Па формуле косінуса рознасці:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}; \ x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Адказ: $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 6. Знайдзіце ў градусах найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$.

Рашэнне.

Памножым абедзве часткі ўраўнення $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ на $\frac{1}{2}$ і атрымаем: $\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, або $\cos 60^\circ \cos x - \sin 60^\circ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Выкарыстаем формулу косінуса сумы, тады ўраўненне атрымае выгляд $\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рэшым атрыманае ўраўненне:

$$\cos(x + 60^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ x + 60^\circ = \pm 45^\circ + 360^\circ n, \ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$\left[\begin{array}{l} x + 60^\circ = 45^\circ + 360^\circ m, \ m \in \boldsymbol{Z}, \\ x + 60^\circ = -45^\circ + 360^\circ k, \ k \in \boldsymbol{Z}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = -15^\circ + 360^\circ m, \ m \in \boldsymbol{Z}, \\ x = -105^\circ + 360^\circ k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны -15°.

Адказ: -15°.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $3\sin x - 4\cos x = 5$.

Рашэнне. Падзелім абедзве часткі ўраўнення на 5 і атрымаем ураўненне $\frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x = 1$. Паколькі $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то існуе вугал φ такі, што $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, а $\sin\varphi = \frac{4}{5}$.

Тады зыходнае ўраўненне прымае выгляд $\cos\varphi \sin x - \sin\varphi \cos x = 1$. Па формуле сінуса рознасці атрымаем: $\sin(x - \varphi) = 1$, $x - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \varphi + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 8. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі

$$f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

Рашэнне. Запішам суму $\sin x + \sqrt{3}\cos x$ у выглядзе: $2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) =$ $= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Паколькі $E(\sin t) = [-1;\ 1]$, то $E(f) = [-2;\ 2]$.

Адказ: $E(f) = [-2;\ 2]$.

Прыклад 9. Знайдзіце (у градусах) значэнне выразу

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}.$$

Рашэнне. Няхай $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$. Паколькі $\frac{1}{2} > 0$ і $\frac{1}{3} > 0$, то $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$; $\beta \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Тады $\alpha + \beta \in (0;\ \pi)$.

Знойдзем значэнне выразу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$. Паколькі $\alpha + \beta \in (0;\ \pi)$, то $\alpha + \beta = 45°$.

Адказ: $45°$.

15.1. Спрасціце выраз:

а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\sin(22° + \alpha)\sin(23° - \alpha) - \cos(22° + \alpha)\cos(23° - \alpha)$.

15.2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\frac{\sin 58°\cos 13° - \cos 58°\sin 13°}{\cos 58°\cos 13° + \sin 58°\sin 13°}$;

б) $\frac{\cos 64°\cos 4° - \cos 86°\cos 26°}{\cos 71°\cos 41° - \cos 49°\cos 19°}$;

в) $\frac{\cos 70°\cos 10° - \cos 160°\sin 370°}{\sin 21°\sin 81° + \cos 159°\cos 99°}$;

г) $\frac{\operatorname{ctg} 40° - \operatorname{tg} 20°}{\operatorname{ctg} 40°\operatorname{tg} 20° + 1}$.

15.3. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{2}$;

б) $\frac{\cos(1{,}5\pi + \alpha) + 2\cos\left(\frac{11\pi}{6} - \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sqrt{3}\sin(1{,}5\pi - \alpha)} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha$.

15.4. Спрасціце выраз $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$ і знайдзіце яго значэнне пры $\beta=\frac{5\pi}{12}$.

15.5. Дакажыце, што $\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}=2$.

15.6. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)}{\cos\alpha}$, калі вядома, што $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{3}$.

15.7. Дакажыце, што значэнне выразу

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\alpha$$

не залежыць ад α.

15.8. Знайдзіце $\sin(\alpha-\beta)$, калі $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{ctg}\beta=-\frac{3}{4}$, прычым $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

15.9. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y=\cos\frac{7x}{2}\cos x+\sin x\sin\frac{7x}{2}$; б) $y=\sin\frac{5x}{3}\cos x-\cos\frac{5x}{3}\sin x$.

15.10. Вылічыце:

а) $\sin 15^\circ+\operatorname{tg}30^\circ\cos 15^\circ$; б) $\cos 75^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\sin 75^\circ$.

15.11. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графіка функцыі:

а) $y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}$ і прамой $y=1$;

б) $y=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos x$ і прамой $y=1$.

15.12. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{2\sqrt{3}-2\operatorname{tg}15^\circ}{1+\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}15^\circ}$.

15.13. Вылічыце:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{3}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)-\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

в) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; г) $\operatorname{ctg}\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)+\arcsin\frac{4}{5}\right)$.

15.14. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\sin 50^\circ\cos 12^\circ-\sin 40^\circ\cos 78^\circ}{\cos 68^\circ-\sqrt{3}\sin 68^\circ}$.

15.15. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=\sqrt{2}$; б) $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}-\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$; г) $5\cos x+12\sin x=13$.

15.16. Знайдзіце найбольшы адмоўны корань ураўнення

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{6}+\cos\frac{\pi x}{6}-2=0.$$

15.17. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2}$ на прамежку $[0;\ 2\pi]$.

15.18. Спрасціце выраз:

а) $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2 35^\circ \mathrm{tg}^2 25^\circ}{\mathrm{tg}^2 35^\circ - \mathrm{tg}^2 25^\circ}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 50^\circ - \mathrm{tg}^2 5^\circ}{1 - \mathrm{tg}^2 50^\circ \mathrm{tg}^2 5^\circ}$.

15.19. Сінусы двух вострых вуглоў трохвугольніка роўны $\frac{7}{25}$ і $\frac{4}{5}$. Знайдзіце значэнне выразу $125\cos\gamma$, дзе γ — трэці вугал трохвугольніка.

15.20. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{4} + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{9}$; б) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$.

15.21. Праверце, ці правільная роўнасць $\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$.

15.22. Рашыце няроўнасць:

а) $\sin x \sin 3x < \cos 3x \cos x$;

б) $\sin x \cos\frac{5x}{2} \geqslant \cos x \sin\frac{5x}{2}$;

в) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x \leqslant \frac{1}{2}$;

г) $\cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15.23. Знайдзіце найменшы дадатны корань ураўнення

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = |\cos x|.$$

§ 16. Формулы двайнога аргумента

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу

$$32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}.$$

Рашэнне. Памножым і падзелім выраз на $\sin\frac{\pi}{48}$ і выкарыстаем формулу сінуса двайнога вугла:

$$32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48} = \frac{32 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{\pi}{48} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{16 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\right) \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{16 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{\pi}{24} \cdot \sin\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{8 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \left(2\sin\frac{\pi}{24} \cdot \cos\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{8 \cdot \cos\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{\pi}{12} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{4 \cdot \left(2\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{4 \cdot \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \cos\frac{23\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{48}\right)}{\sin\frac{\pi}{48}} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\pi}{48}}{\sin\frac{\pi}{48}} = 2.$$

Адказ: 2.

Прыклад 2. Знайдзіце значэнне выразу $\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$.

Рашэнне.

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\left(\sin 30^\circ \cos 10^\circ - \cos 30^\circ \sin 10^\circ\right)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \frac{4\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = 4\,.$$

Адказ: 4.

Прыклад 3. Вылічыце: $\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^4 \frac{13\pi}{12}$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулы прывядзення:

$$\sin^4 \frac{23\pi}{12} - \cos^4 \frac{13\pi}{12} = \sin^4\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) - \cos^4\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = \sin^4 \frac{\pi}{12} - \cos^4 \frac{\pi}{12}.$$

Па формуле рознасці квадратаў атрымаем:

$$\sin^4 \frac{\pi}{12} - \cos^4 \frac{\pi}{12} = \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}\right)\left(\sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12}\right) =$$

$$= \sin^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{\pi}{12} = -\left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Адказ: $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прыклад 4. Знайдзіце значэнне выразу $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)$.

Рашэнне. Па формуле сінуса двайнога аргумента атрымаем:

$$\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right).$$

Няхай $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, тады $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. Выкарыстаем формулы $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ і $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Паколькі $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{9}{16} + 1}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, а $\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

Атрымаем: $2\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right)\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}\right) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

Адказ: $\frac{24}{25}$.

Прыклад 5. Знайдзіце нулі функцыі $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$.

Рашэнне. Для знаходжання нулёў функцыі рэшым ураўненне $f(x) = 0$, г. зн. $\frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = 0$; $\sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$; $2\sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\sin\frac{2\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2\pi x}{3} = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Нулямі функцыі $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sin\frac{\pi x}{3}\cos\frac{\pi x}{3}$ з'яўляюцца ўсе лікі выгляду $(-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $(-1)^{n+1}\frac{1}{2} + \frac{3n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 6. Вызначце колькасць каранёў ураўнення $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$ на прамежку $[0; 2\pi]$.

Рашэнне. Выкарыстаем формулу сінуса двайнога вугла і атрымаем: $\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 0$; $\cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 0$; $\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right) = 0$;

$$\left[\begin{aligned}&\cos x = 0,\\&\cos x + \sqrt{3}\sin x = 0;\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&\cos x = 0,\\&1 + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0;\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&\cos x = 0,\\&\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3};\end{aligned}\right. \quad \left[\begin{aligned}&x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z},\\&x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}.\end{aligned}\right.$$

На прамежку $[0; 2\pi]$ першае і другое ўраўненні сукупнасці маюць па два карані. Такім чынам, на дадзеным прамежку ўраўненне мае чатыры карані.

Адказ: 4.

Прыклад 7. Рашыце ўраўненне $15\sin x - \sin 2x = 15 + 15\cos x$.

Рашэнне. $15\sin x - \sin 2x = 15 + 15\cos x$; $15\sin x - 15\cos x - \sin 2x = 15$; $15(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x = 15$. Няхай $\sin x - \cos x = t$, тады

$(\sin x - \cos x)^2 = t^2$; $\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x = t^2$; $1 - 2\sin x\cos x = t^2$; $-2\sin x\cos x = t^2 - 1$.

Ураўненне $15(\sin x - \cos x) - 2\sin x\cos x = 15$ атрымае выгляд

$15t + t^2 - 1 = 15$; $t^2 + 15t - 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -16, \\ t = 1, \end{array}\right.$ адкуль $\left[\begin{array}{l} \sin x - \cos x = -16, \\ \sin x - \cos x = 1. \end{array}\right.$

Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў, паколькі $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ і $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

Рэшым ураўненне $\sin x - \cos x = 1$. Памножым абедзве часткі ўраўнення на $\frac{\sqrt{2}}{2}$ і атрымаем: $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x - \frac{\pi}{4} = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 8. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos x \cdot |\sin x| = 0{,}25$.

Рашэнне. $\cos x \cdot |\sin x| = 0{,}25$.

1) Пры $\sin x \geqslant 0$ ураўненне прымае выгляд

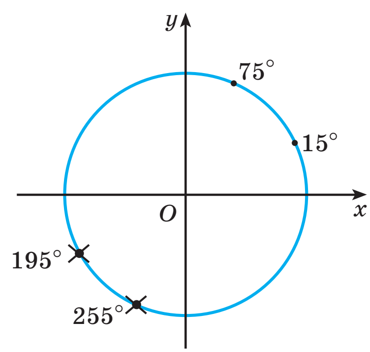
$\cos x \cdot \sin x = 0{,}25$; $2\cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}$;

$\sin 2x = \frac{1}{2}$; $2x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

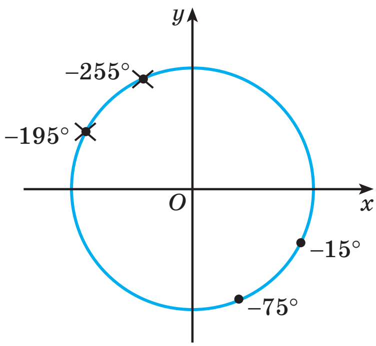
$x = (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$x = (-1)^n \cdot 15^\circ + 90^\circ n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Адзначым атрыманыя лікі на адзінкавай акружнасці (рыс. 62).



Рыс. 62



Рыс. 63

З улікам умовы $\sin x \geqslant 0$ атрымаем, што каранямі ўраўнення з'яўляюцца лікі выгляду $15^\circ + 360^\circ n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, і $75^\circ + 360^\circ k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) Пры $\sin x < 0$ маем $-\cos x \cdot \sin x = 0{,}25$; $\sin 2x = -\frac{1}{2}$;

$$2x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{6} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^{m+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi m}{2},\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = (-1)^{m+1} \cdot 15^\circ + 90^\circ m,\ m \in \boldsymbol{Z}.$$

Паколькі $\sin x < 0$, то $x = -15^\circ + 360^\circ l$, $l \in \boldsymbol{Z}$, і $x = -75^\circ + 360^\circ p$, $p \in \boldsymbol{Z}$ (рыс. 63).

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны -15°.

Адказ: -15.

16.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\cos^4 22{,}5^\circ - \sin^4 22{,}5^\circ$;

б) $4\sin 37^\circ 30' \cos 37^\circ 30' \sin 15^\circ$;

в) $\sin 7^\circ 30' \cos 7^\circ 30' \sin 75^\circ$.

16.2. Рашыце ўраўненне $\sin 3x - 3\cos 6x = 2$.

16.3. Знайдзіце найбольшы адмоўны корань ураўнення

$$\cos^2 6x - \cos 12x = 0.$$

16.4. Вылічыце:

а) $1 - 8\sin^2\frac{\pi}{24}\cos^2\frac{\pi}{24}$; б) $\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}$; в) $\sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{10}$.

16.5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg} 3)$; б) $\sin(2\arccos 0{,}6)$;

в) $\cos\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{ctg}(2\arccos 0{,}8)$.

16.6. Вылічыце: $\sin^2\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}7\right) - \cos^2\left(\frac{1}{2}\arcsin 0{,}7\right)$.

16.7. Знайдзіце $\operatorname{tg}\alpha$, калі $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

16.8. Спрасціце выраз $\dfrac{4\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{1-2\cos^2\alpha}$.

16.9. Знайдзіце $\cos^4\frac{\alpha}{2}-\sin^4\frac{\alpha}{2}$, калі $\sin\alpha=-\frac{13}{14}$ і $900^\circ<\alpha<990^\circ$.

16.10. Вылічыце: $\operatorname{tg}15^\circ-\operatorname{ctg}15^\circ$.

16.11. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$, калі $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-3$.

16.12. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$$\cos 4x+2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)+\cos^2 5x+\sin^2 5x=0$$

на прамежку $[-\pi;\ \pi]$.

16.13. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{16}\right)\cos\frac{\pi}{8}$.

16.14. Знайдзіце найменшы дадатны перыяд функцыі:

а) $y=\sin(-2x)\cos 2x$;

б) $y=6\sin\frac{x}{8}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{8}\right)$;

в) $y=\sin^2 4x-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-4x\right)$;

г) $y=\sin^2\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$;

д) $y=\cos\frac{x}{12}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{12}\right)$;

е) $y=\cos^2 5x-\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}+5x\right)$.

16.15. Вылічыце: $64\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 60^\circ\cos 80^\circ$.

16.16. Рашыце ўраўненне:

а) $12\sin x-\sin 2x=12+12\cos x$;

б) $7+\sin 2x=7\sin x+7\cos x$.

16.17. Знайдзіце значэнне выразу $\left(5\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)^2$, ведаючы, што $\sin 2\alpha=0{,}25$.

16.18. Рашыце няроўнасць:

а) $\sin 5x\cos 5x\leqslant\frac{1}{4}$;

б) $4\sin\frac{x}{7}\cdot\sin\left(\frac{x}{7}-\frac{\pi}{2}\right)>\sqrt{3}$;

в) $\sin^2\left(5x-\frac{\pi}{5}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}-5x\right)<1$;

г) $\sin^2 0{,}1x-\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-0{,}1x\right)\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$.

16.19. Знайдзіце найбольшы адмоўны корань (у градусах) ураўнення $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{5}{8}$.

16.20. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\sin^4 x+\cos^4 x=\cos 4x$ на прамежку $[-\pi;\ 1{,}5\pi]$.

16.21. Дакажыце, што калі $\cos(\alpha+\beta)=0$, то $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$.

16.22. Рашыце ўраўненне $\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin x=\frac{1}{2}$.

16.23. Знайдзіце рознасць (у градусах) найменшага дадатнага і найбольшага адмоўнага каранёў ураўнення $1+2\sin x|\cos x| = 0.$

16.24. Дакажыце тоеснасць $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)\cdot\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) = \frac{1}{8}.$

§ 17. Формулы пераўтварэння сумы і рознасці сінусаў (косінусаў) у здабытак

Пераўтварэнне сумы (рознасці) трыганаметрычных функцый у здабытак

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Пераўтварэнне здабытку трыганаметрычных функцый у суму (рознасць)

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

Прыклад 1. Раскладзіце на множнікі суму $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$.

Рашэнне. Выканаем групоўку і прыменім формулы сумы сінусаў і сінуса двайнога аргумента:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 2\sin 2x\cos x + 2\sin x\cos x =$$

$$= 2\cos x(\sin 2x + \sin x) = 2\cdot 2\cos x\left(\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) = 4\cos x\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}.$$

Прыклад 2. Параўнайце з нулём значэнне выразу $\frac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 250^\circ}$.

Рашэнне.

$$\frac{2\cos 40^\circ - \sin 70^\circ}{\cos 250^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ + \left(\cos 40^\circ - \cos 20^\circ\right)}{-\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2\sin\frac{40^\circ - 20^\circ}{2}\sin\frac{40^\circ + 20^\circ}{2}}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - 2\sin 10^\circ\sin 30^\circ}{-\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\cos 40^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 10^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \sin 10^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{\cos 40^\circ - \cos 80^\circ}{-\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 60^\circ \sin 20^\circ}{-\sin 20^\circ} = -\sqrt{3} < 0.$$

Адказ: значэнне выразу меншае за нуль.

Прыклад 3. Спрасціце выраз $2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

Рашэнне. Няхай $A = 2\sin 10^\circ \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

Па формуле $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big)$ атрымаем, што $A = 2 \cdot \frac{1}{2}\big(\cos(-30^\circ) - \cos 50^\circ\big) + \cos 50^\circ = \cos 30^\circ - \cos 50^\circ + \cos 50^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Адказ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Прыклад 4. Пераўтварыце ў здабытак выраз $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x$.

Рашэнне.

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x = \sin\frac{\pi}{3} + \sin x = 2\sin\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3} - x}{2} = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right).$$

Прыклад 5. Знайдзіце значэнне выразу

$$100 \cdot (2\sin 5x \cos 7x - \sin 12x),$$

ведаючы, што $\sin x + \cos x = 0{,}3$.

Рашэнне.

Па формуле $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\big)$ пераўтворым выраз

$$A = 100 \cdot (2\sin 5x \cos 7x - \sin 12x) =$$
$$= 100 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin(-2x)) - \sin 12x\right) =$$
$$= 100 \cdot (\sin 12x - \sin 2x - \sin 12x) = -100\sin 2x.$$

Узвядзём абедзве часткі роўнасці $\sin x + \cos x = 0{,}3$ у квадрат і атрымаем

$$(\sin x + \cos x)^2 = 0{,}09; \ \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 0{,}09;$$
$$1 + 2\sin x \cos x = 0{,}09; \ 2\sin x\cos x = -1 + 0{,}09;$$
$$2\sin x \cos x = -0{,}91; \ \sin 2x = -0{,}91.$$

Тады $A = -100\sin 2x = -100 \cdot (-0{,}91) = 91$.

Адказ: 91.

Прыклад 6. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}\right)^4$ і знайдзіце яго значэнне пры $\alpha=\dfrac{\pi}{18}$.

Рашэнне.

$$\left(\frac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}\right)^4=\left(\frac{(\cos\alpha+\cos5\alpha)-(\cos2\alpha+\cos4\alpha)}{(\sin\alpha+\sin5\alpha)-(\sin2\alpha+\sin4\alpha)}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{2\cos3\alpha\cos2\alpha-2\cos3\alpha\cos\alpha}{2\sin3\alpha\cos2\alpha-2\sin3\alpha\cos\alpha}\right)^4=\left(\frac{2\cos3\alpha(\cos2\alpha-\cos\alpha)}{2\sin3\alpha(\cos2\alpha-\cos\alpha)}\right)^4=$$

$$=\left(\frac{\cos3\alpha}{\sin3\alpha}\right)^4=(\mathrm{ctg}\,3\alpha)^4\Big|_{\alpha=\frac{\pi}{18}}=\left(\mathrm{ctg}\left(3\cdot\frac{\pi}{18}\right)\right)^4=\left(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{6}\right)^4=(\sqrt{3})^4=9.$$

Адказ: 9.

Прыклад 7. Знайдзіце (у градусах) суму найбольшага адмоўнага і найменшага дадатнага каранёў ураўнення $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.

Рашэнне.

Паколькі па формулах прывядзення

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right),$$

то запішам ураўненне $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$ у выглядзе

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right);\quad \sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=0.$$

Выкарыстаем формулу рознасці сінусаў:

$$2\sin\frac{3x-\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)}{2}\cos\frac{3x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+x}{2}=0;\quad \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos2x=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0,\\ \cos2x=0;\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{6}=\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ 2x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=30^\circ+180^\circ n,\ n\in\boldsymbol{Z},\\ x=45^\circ+90^\circ k,\ k\in\boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Найбольшы адмоўны корань ураўнення роўны -45°. Найменшы дадатны корань ураўнення роўны 30°. Іх сума роўна -15°.

Адказ: -15°.

Прыклад 8. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos \pi x \sin 14\pi x$ на прамежку $[3;\ 4]$.

Рашэнне. $\cos 6\pi x \sin 9\pi x = \cos \pi x \sin 14\pi x$;

$\frac{1}{2}\left(\sin(9\pi x + 6\pi x) + \sin(9\pi x - 6\pi x)\right) = \frac{1}{2}\left(\sin(14\pi x + \pi x) + \sin(14\pi x - \pi x)\right)$;

$\sin 15\pi x + \sin 3\pi x = \sin 15\pi x + \sin 13\pi x$;

$\sin 3\pi x = \sin 13\pi x$; $\sin 13\pi x - \sin 3\pi x = 0$;

$2\sin\frac{13\pi x - 3\pi x}{2}\cos\frac{13\pi x + 3\pi x}{2} = 0$; $\sin 5\pi x \cos 8\pi x = 0$;

$$\left[\begin{array}{l}\sin 5\pi x = 0,\\ \cos 8\pi x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}5\pi x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},\\ 8\pi x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \frac{n}{5},\ n \in \boldsymbol{Z},\\ x = \frac{1}{16} + \frac{k}{8},\ k \in \boldsymbol{Z}.\end{array}\right.$$

Вызначым колькасць лікаў выгляду $\frac{n}{5}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, на прамежку $[3;\ 4]$. Для гэтага рэшым двайную няроўнасць $3 \leqslant \frac{n}{5} \leqslant 4$; $15 \leqslant n \leqslant 20$. Атрыманая няроўнасць мае шэсць цэлых рашэнняў.

Рэшым няроўнасць $3 \leqslant \frac{1}{16} + \frac{k}{8} \leqslant 4$ пры $k \in \boldsymbol{Z}$:

$$48 \leqslant 1 + 2k \leqslant 64;\ \ 47 \leqslant 2k \leqslant 63;\ \ 23{,}5 \leqslant k \leqslant 31{,}5.$$

Дадзеная няроўнасць мае восем цэлых рашэнняў.

Такім чынам, на прамежку $[3;\ 4]$ выходнае ўраўненне мае 14 каранёў.

Адказ: 14.

17.1. Раскладзіце на множнікі суму:

а) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$; б) $\sin\alpha + 2\sin 5\beta + \sin 9\beta$.

17.2. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sin 72^\circ + \cos 222^\circ - \sin 12^\circ$; б) $\frac{\cos 78^\circ + \sin 228^\circ}{\sin^2 54^\circ - \cos^2 54^\circ}$.

17.3. Дакажыце тоеснасць:

а) $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; б) $1 - \sin\alpha - \cos\alpha = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$.

17.4. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў ураўнення
$$\sin 3x + \sin x = \sin 2x$$
на прамежку $\left[-\pi;\ 0{,}5\pi\right]$.

17.5. Дакажыце тоеснасць $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$.

17.6. Знайдзіце суму розных каранёў ураўнення
$$\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$$
на прамежку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

17.7. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

17.8. Знайдзіце колькасць розных каранёў ураўнення
$$\cos x + \cos 5x = \cos 3x + \cos 7x$$
на прамежку $\left[0;\ 2\pi\right]$.

17.9. Дакажыце, што значэнне выразу
$$\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right)$$
не залежыць ад α.

17.10. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення

$\sin x + \sin 5x + \sqrt{3}\sin 3x = 0$ на прамежку $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

17.11. Знайдзіце колькасць розных каранёў ураўнення

$\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$ на прамежку $\left[0;\ 2\pi\right]$.

17.12. Знайдзіце значэнне выразу $\cos\frac{11\pi}{56}\cos\frac{3\pi}{56} - \sin\frac{5\pi}{21}\sin\frac{2\pi}{21} - \frac{\sqrt{2}}{4}$.

17.13. Знайдзіце (у градусах) найбольшы адмоўны корань ураўнення $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

17.14. Знайдзіце колькасць рашэнняў ураўнення
$$\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x$$
на прамежку $\left[-\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}\right]$.

17.15. Рашыце ўраўненне:

а) $\cos 3x = \sin x$; б) $\sin 5x = \cos x$.

17.16. Рашыце ўраўненне $|\sin x| = \cos 5x$.

17.17. Ці існуюць сапраўдныя значэнні α, пры якіх правільная роўнасць $\sin\alpha + \sin 6\alpha = \sin 7\alpha$?

§ 18. Корань n-й ступені з ліку a ($n \geqslant 2$, $n \in N$)

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6$.

Рашэнне. $\left(-2\sqrt[3]{2}\right)^6 = (-2)^6 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^6 = 2^6 \cdot 2^2 = 2^8 = 256.$

Адказ: 256.

Прыклад 2. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх мае сэнс выраз:

а) $\sqrt[6]{3x-1}$; б) $\sqrt[10]{x^2-4}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5x-x^2}}$; г) $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}$.

Рашэнне.

а) Выраз $\sqrt[6]{3x-1}$ мае сэнс пры $3x-1 \geqslant 0$, г. зн. пры $x \geqslant \dfrac{1}{3}$.

б) Выраз $\sqrt[10]{x^2-4}$ мае сэнс пры $x^2-4 \geqslant 0$, г. зн. пры $x \in \left(-\infty; -2\right] \cup \left[2; +\infty\right)$.

в) Выраз $\dfrac{1}{\sqrt[8]{5x-x^2}}$ мае сэнс пры $5x-x^2 > 0$, $x^2-5x < 0$, г. зн. пры $x \in \left(0; 5\right)$.

г) Выраз $\dfrac{2}{\sqrt[5]{x^2-4x+3}}$ мае сэнс пры $x^2-4x+3 \neq 0$, г. зн. пры $x \neq 1$, $x \neq 3$.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне:

а) $8x^3 = 5$; б) $\dfrac{x^8}{2} = 3$; в) $0{,}2x^5 = -7$;

г) $(x-1)^{10} = -3$; д) $(3x-1)^5 = 32$; е) $(x-7)^4 = 81$;

ж) $(4-5x)^3 = 125$; з) $(0{,}1x-5)^6 = 0{,}000001$.

Рашэнне.

а) $8x^3 = 5 \Leftrightarrow (2x)^3 = 5 \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{5} \Leftrightarrow x = \dfrac{\sqrt[3]{5}}{2}$;

б) $\dfrac{x^8}{2} = 3 \Leftrightarrow x^8 = 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[8]{6}, \\ x = -\sqrt[8]{6}; \end{array}\right.$

в) $0{,}2x^5 = -7 \Leftrightarrow x^5 = -35 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-35} \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{35}$;

г) $(x-1)^{10} = -3 \Leftrightarrow x \in \varnothing$;

д) $(3x-1)^5 = 32 \Leftrightarrow 3x-1 = 2 \Leftrightarrow x = 1$;

е) $(x-7)^4 = 81 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-7=3, \\ x-7=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10, \\ x=4; \end{array}\right.$

ж) $(4-5x)^3 = 125 \Leftrightarrow 4-5x=5 \Leftrightarrow -5x=1 \Leftrightarrow x=-0{,}2;$

з) $(0{,}1x-5)^6 = 0{,}000001 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0{,}1x-5=0{,}1, \\ 0{,}1x-5=-0{,}1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=51, \\ x=49. \end{array}\right.$

18.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $0{,}3\sqrt[4]{625} + 2\sqrt[7]{-128} - 5\cdot\left(-\sqrt[10]{7}\right)^{10};$

б) $\left(-5\sqrt[3]{-2}\right)^3 - \sqrt[8]{3^8} + \left(-0{,}1\sqrt[4]{5}\right)^4;$

в) $25\sqrt[3]{-0{,}008} + 3\sqrt[5]{0{,}00032} - \left(-3\sqrt[5]{-2}\right)^5;$

г) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{100\,000}} \cdot \sqrt[4]{7\dfrac{58}{81}} - \sqrt[5]{-7\dfrac{19}{32}} + \sqrt[13]{-1}.$

18.2. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай мае сэнс выраз:

а) $\sqrt[8]{7x-2};$ б) $\sqrt[14]{9x^2-1};$ в) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^2+3x}};$ г) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^2-6x+8}}.$

18.3. Вылічыце:

а) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{81}-1};$ б) $\sqrt[12]{0{,}9-\sqrt[7]{-0{,}0000001}};$ в) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3\dfrac{13}{81}}+1\dfrac{1}{9}\cdot\sqrt[3]{-0{,}027}}.$

18.4. Рашыце ўраўненне:

а) $27x^3-1=0;$ б) $5x^6+2=0;$ в) $64x^3+3=0;$

г) $81x^4-5=0;$ д) $(7x+1)^3=27;$ е) $(x-5)^6=64;$

ж) $(2-3x)^5=-1;$ з) $(0{,}3x+5)^4=0{,}0016.$

18.5. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{512}};$ б) $\sqrt[4]{270\sqrt[4]{0{,}0081}};$ в) $\sqrt[4]{-2\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{-216}}.$

18.6. Рашыце ўраўненне:

а) $x^6+x^3-56=0;$ б) $x^{12}+8x^6-9=0;$

в) $x^8-82x^4+81=0;$ г) $64x^6-63x^3-1=0.$

18.7. Знайдзіце абсяг вызначэння выразу:

а) $\sqrt[16]{x^2-25}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3-x^2}}$; б) $\sqrt[8]{2x^2-5x+2}-\dfrac{x+7}{\sqrt[3]{4x^2-1}}$.

18.8. Знайдзіце значэнне выразу $(a-b)(a+b)\left(a^2+b^2\right)\left(a^4+b^4\right)$ пры $a=\sqrt[4]{7}$, $b=\sqrt[8]{11}$.

18.9. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a ўраўненне $3x^{12}=2a-1$:

а) мае два карані;
б) мае адзін корань;
в) не мае каранёў.

18.10. Знайдзіце, пры якіх значэннях ліку a ўраўненне $x^8=a^2-16$:

а) мае два карані;
б) мае адзін корань;
в) не мае каранёў.

§ 19. Уласцівасці каранёў n-й ступені $(n \geqslant 2,\ n \in N)$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m};\qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a};\qquad \sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}};$$

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b\neq 0)$$

$$\left(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0,\ n\in N,\ m\in N,\ k\in N,\ n\geqslant 2,\ m\geqslant 2,\ k\geqslant 2\right)$$

Прыклад 1. Знайдзіце значэнне выразу $\dfrac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$.

Рашэнне.

Выкарыстаем уласцівасці каранёў n-й ступені і атрымаем:

$$\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{64}}+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[5]{\frac{2}{64}}+\sqrt[3]{3\cdot 9}=\sqrt[5]{\frac{1}{32}}+\sqrt[3]{27}=\frac{1}{2}+3=3{,}5.$$

Адказ: 3,5.

Прыклад 2. Вядома, што значэнне выразу $\dfrac{\sqrt[7]{a^7}-\sqrt[6]{a^6}}{-2a}$ роўна -1. Знайдзіце ўсе магчымыя значэнні, якія можа прымаць a.

Рашэнне. $\dfrac{\sqrt[7]{a^7}-\sqrt[6]{a^6}}{-2a}=-1$; $\dfrac{a-|a|}{-2a}=-1$; $\begin{cases}a-|a|=2a,\\ a\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}|a|=-a,\\ a\neq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}a\leqslant 0,\\ a\neq 0;\end{cases}$

$a<0$; $a\in(-\infty;\ 0)$.

Адказ: $a\in(-\infty;\ 0)$.

Прыклад 3. Вылічыце: $\sqrt[6]{5^7 \cdot \sqrt[7]{5^5}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}}$.

Рашэнне. $\sqrt[6]{5^7 \cdot \sqrt[7]{5^5}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{49} \cdot 5^5}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} =$

$$= \sqrt[6]{\sqrt[7]{5^{54}}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[42]{5^{54}} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9} \cdot \sqrt[7]{5^{-2}} = \sqrt[7]{5^9 \cdot 5^{-2}} = \sqrt[7]{5^7} = 5.$$

Адказ: 5.

Прыклад 4. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$.

Рашэнне. $\sqrt{6+4\sqrt{2}} - \sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} = \sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt[4]{\left(3-2\sqrt{2}\right)^2} =$

$$= \left|2+\sqrt{2}\right| - \sqrt{\left|3-2\sqrt{2}\right|} = 2+\sqrt{2} - \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = 2+\sqrt{2} - \left|1-\sqrt{2}\right| =$$

$$= 2+\sqrt{2} - \left(\sqrt{2}-1\right) = 3.$$

Адказ: 3.

19.1. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[7]{3^{14} \cdot 5^7}$; б) $\sqrt[8]{2^{32} \cdot 3^{24}}$; в) $\sqrt[6]{\dfrac{3^{18} \cdot 13^6}{5^{12} \cdot 2^{24}}}$; г) $\sqrt[5]{\dfrac{7^5 \cdot 3^{15}}{2^{10} \cdot 5^{15}}}$.

19.2. Выкарыстайце ўласцівасці каранёў n-й ступені і вылічыце:

а) $\sqrt[8]{2^5 \cdot 5^9} \cdot \sqrt[8]{2^3 \cdot 5^7}$; б) $\dfrac{\sqrt[6]{2^{29} \cdot 3^{16}}}{\sqrt[6]{2^5 \cdot 3^4}}$;

в) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[3]{-5} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{25}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{486} \cdot \sqrt[6]{2}}{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[6]{128}}$.

19.3. Вылічыце: $8 \cdot \sqrt[3]{\left(3\frac{3}{8}\right)^{-2}} \cdot \sqrt{324} + \dfrac{\sqrt[3]{256} \cdot \sqrt[5]{-27}}{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{9}}}$.

19.4. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[4]{11-2\sqrt{10}} \cdot \sqrt[4]{11+2\sqrt{10}}$; б) $\sqrt[3]{9+\sqrt{17}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{17}-9}$.

19.5. Запішыце выраз $\sqrt{a-b}$ у выглядзе кораня:

а) чацвёртай ступені; б) шостай ступені;

в) дзясятай ступені; г) шаснаццатай ступені.

19.6. Запішыце ў выглядзе каранёў адной і той жа ступені выразы:

а) $\sqrt[9]{a}$, $\sqrt{b}$ і $\sqrt[6]{c}$; б) $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[6]{b}$ і $\sqrt[15]{c}$.

19.7. Спрасціце выраз:

а) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}}$; б) $\sqrt[8]{\sqrt{a}}$; в) $\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}$;

г) $\sqrt[8]{\sqrt[3]{a^{12}}}$; д) $\sqrt[4]{\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt{a}}$; е) $\sqrt[5]{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[5]{a}}$.

19.8. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[9]{-7}\cdot\sqrt[18]{49}$;

в) $\sqrt{10}\cdot\sqrt[6]{10}\cdot\sqrt[12]{10}$; г) $\dfrac{\sqrt[8]{27^3}\cdot\sqrt[20]{\sqrt{27}}}{\sqrt[5]{27^4}}$.

19.9. Вылічыце значэнне выразу:

а) $\sqrt[5]{-3^5}-\sqrt[5]{(-3)^5}$; б) $\sqrt[4]{(-7)^4}-\sqrt[3]{(-7)^3}$;

в) $\sqrt[7]{-5^7}-\sqrt[8]{(-5)^8}$; г) $\sqrt[3]{-10^3}+\sqrt[9]{(-10)^9}-\sqrt[4]{(-10)^4}$.

19.10. Вызначце, рацыянальным ці ірацыянальным лікам з'яўляецца значэнне выразу

$$\sqrt[8]{(-11)^8}+\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}-\sqrt[4]{16\frac{1}{16}}:\sqrt[8]{257^2}+\sqrt[3]{25\cdot135}.$$

19.11. Ці праўда, што значэнне выразу $\sqrt[4]{\left(\sqrt{\sqrt[5]{90}-\sqrt[5]{10}}\right)^4}-\sqrt{\sqrt[5]{90}-\sqrt[5]{10}}$ з'яўляецца рацыянальным лікам?

19.12. Знайдзіце значэнне выразу $\sqrt{25a^2}+\sqrt[3]{64a^3}-\sqrt[4]{16a^4}-\sqrt[6]{676}$ пры $a=\sqrt[3]{26}-3$.

19.13. Вылічыце:

а) $\sqrt[4]{\left(4\sqrt{5}-9\right)^4}+\sqrt[4]{\left(4\sqrt{5}+9\right)^4}$; б) $\sqrt[6]{\left(3\sqrt{7}+8\right)^6}-\sqrt[6]{\left(3\sqrt{7}-8\right)^6}-16$.

19.14. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{3}-2}\cdot\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}$;

в) $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

19.15. Запішыце ў выглядзе мнагачлена выраз:

а) $\sqrt[4]{(2m-5{,}4)^4}$ пры $-1 \leqslant m \leqslant 1$;

б) $\sqrt[6]{(3n-12{,}1)^6} - 12{,}1$ пры $-5 \leqslant n \leqslant 4$;

в) $\sqrt[8]{(2a-1{,}8)^8} - \sqrt[10]{(3{,}2a+1{,}6)^{10}} - 2a - 1{,}6$ пры $-0{,}4 \leqslant a \leqslant 0{,}5$;

г) $\sqrt[4]{(9b-1)^4} + \sqrt[6]{(2b+3{,}4)^6} - b + 3{,}5$ пры $-2{,}8 \leqslant b \leqslant -1{,}8$.

19.16. Пабудуйце графік функцыі:

а) $y = \sqrt[4]{(x-3)^4} + x$ пры $x \geqslant 3$; б) $y = -x\sqrt[8]{(x+1)^8}$ пры $x \leqslant -1$.

19.17. Спрасціце выраз $\dfrac{\left(\sqrt[8]{a^2+5+2\sqrt{5}a} + \sqrt[4]{a+\sqrt{5}}\right)\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{5}}}{\sqrt[4]{16a^2-80}}$.

19.18. Знайдзіце значэнне выразу

$$\sqrt{12a+2\sqrt{36a^2-b^2}} - \sqrt{12a-2\sqrt{36a^2-b^2}} - 2\sqrt{6a-b} \text{ пры } a=\sqrt{2},\ b=\sqrt[3]{3}.$$

§ 20. Прымяненне ўласцівасцей каранёў n-й ступені для пераўтварэння выразаў

Прыклад 1. Скараціце дроб $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}}$.

Рашэнне. $\dfrac{b\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^5}} = \dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}} = \dfrac{b\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}}{a\left(\sqrt[3]{a}\right)^2} = \dfrac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a}}$.

Прыклад 2. Вынесіце множнік за знак кораня ў выразе $\sqrt[4]{-a^{11}}$.

Рашэнне. $\sqrt[4]{-a^{11}} = \sqrt[4]{-a^3\cdot a^8} = |a^2|\sqrt[4]{-a^3} = a^2\sqrt[4]{-a^3}$.

Прыклад 3. Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $(4-m)\sqrt[6]{2m-8}$.

Рашэнне. Выраз $(4-m)\sqrt[6]{2m-8}$ мае сэнс пры $2m-8 \geqslant 0; m \geqslant 4$, г. зн. множнік $(4-m) \leqslant 0$. Тады $(4-m)\sqrt[6]{2m-8} = -(m-4)\sqrt[6]{2m-8} = -\sqrt[6]{(m-4)^6(2m-8)} = -\sqrt[6]{2(m-4)^6(m-4)} = -\sqrt[6]{2(m-4)^7}$.

Прыклад 4. Спрасціце выраз $\sqrt[3]{\sqrt{11-4\sqrt{6}}-\sqrt{8}-\sqrt[6]{27}}$.

Рашэнне.

$$\sqrt[3]{\sqrt{11-4\sqrt{6}}-\sqrt{8}-\sqrt[6]{27}} = \sqrt[3]{\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\left(2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}} =$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{\sqrt{12}} = -\sqrt[6]{12}.$$

Прыклад 5. Спрасціце выраз

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Рашэнне.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt[4]{x^2}-\sqrt[4]{y^2}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+1\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[4]{xy}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\sqrt{\frac{y}{x}}+1\right) = \left(-\sqrt[4]{xy}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+1\right) =$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{xy}+1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \sqrt{xy}\cdot\left(\frac{\sqrt{y}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right) = y+\sqrt{xy}.$$

Адказ: $y+\sqrt{xy}$.

20.1. Выберыце няправільную роўнасць:

а) $\sqrt{45a^3}=3a\sqrt{5a}$;

б) $\sqrt[5]{-32x^6}=-2x\sqrt[5]{-x}$;

в) $\sqrt[4]{16(m-n)^4}=2|m-n|$;

г) $\sqrt[8]{(-5)^8a^{12}}=5|a|\sqrt{|a|}$;

д) $\sqrt[6]{-64y^7}=-2y\sqrt[6]{-y}$.

20.2. Унясіце множнік пад знак кораня ў выразе $(7-m)\sqrt[6]{\dfrac{1}{m-7}}$.

20.3. Вылічыце: $\dfrac{12\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt{5\sqrt[3]{5}}}{\left(\sqrt[4]{25}-1\right)\left(\sqrt[4]{25}+1\right)}$.

20.4. Запішыце ў выглядзе кораня выраз:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[4]{a}}$; б) $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}}}{\sqrt[9]{a^4}}$.

20.5. Знайдзіце значэнне выразу $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-1}-\dfrac{\sqrt[4]{a}+1}{\sqrt{a}}\right):\dfrac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}$ пры $a=0{,}0625$.

20.6. Ці праўда, што значэнне выразу з'яўляецца рацыянальным лікам:

а) $5\sqrt[3]{6\sqrt{32}}-3\sqrt[3]{9\sqrt{162}}-11\sqrt[6]{18}+2\sqrt[3]{75\sqrt{50}}$;

б) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{5\sqrt{5}}+\sqrt[5]{36\sqrt{6}}+26-4\sqrt{30}}$?

20.7. Спрасціце выраз $\dfrac{\sqrt[4]{x^5}+\sqrt[4]{xy^4}-\sqrt[4]{x^4y}-\sqrt[4]{y^5}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)$.

20.8. Спрасціце выраз $7\cdot\left(\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^{-1}+\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^{-1}\right)^{-2}:\dfrac{a-b}{4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}$ і знайдзіце яго значэнне пры $a=196$, $b=36$.

20.9. Спрасціце выраз $\dfrac{a\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}}:\dfrac{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{b}}{a-b}-\left(\sqrt{b}+\sqrt[4]{ab}\right)a+2$.

20.10. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right):\left(\dfrac{b}{\sqrt[4]{a^3}}+\dfrac{b\sqrt[4]{b}}{a}\right)$ пры $a=68$, $b=4$;

б) $\left(\sqrt[8]{a^2+6+2a\sqrt{6}}+\sqrt[4]{a+\sqrt{6}}\right)\cdot\sqrt[4]{a-\sqrt{6}}$ пры $a=\sqrt{87}$;

в) $\sqrt[8]{\left(3\sqrt{x}-1\right)^8}-\sqrt{9x-12\sqrt{x}+4}$ пры $x=1\dfrac{2}{9}$.

20.11. Знайдзіце значэнне выразу $x_1^2+x_2^2$, дзе x_1 і x_2 — карані ўраўнення $x^2-\left(\sqrt[4]{2}-\sqrt[4]{8}\right)x-1{,}5\sqrt{2}=0$.

20.12. Спрасціце выраз $\left(\dfrac{\left(x+\sqrt[3]{2ax^2}\right)\cdot\left(2a+\sqrt[3]{4a^2x}\right)^{-1}-1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2a}}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2a}}\right)^{-6}$.

§ 21. Уласцівасці і графік функцыі $y = \sqrt[n]{x}$ $(n > 1,\ n \in N)$

Прыклад 1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі

$$y = \sqrt[4]{20 - x - x^2} - \frac{3}{\sqrt[8]{14 - 5x - x^2}}.$$

Рашэнне.

Абсяг вызначэння дадзенай функцыі супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей

$$\begin{cases} 20 - x - x^2 \geqslant 0, \\ 14 - 5x - x^2 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x - 20 \leqslant 0, \\ x^2 + 5x - 14 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+5)(x-4) \leqslant 0, \\ (x+7)(x-2) < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-5; 4], \\ x \in (-7; 2); \end{cases}$$

$x \in [-5;\ 2)$.

Адказ: $D(y) = [-5;\ 2)$.

Прыклад 2. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[4]{(x-2)^2 + 81}$;

б) $g(x) = \sqrt[3]{27 - (x-1)^2}$.

Рашэнне.

а) Па ўласцівасці квадратычнай функцыі мноствам значэнняў падкарэннага выразу з'яўляецца прамежак $[81;\ +\infty)$. Па ўласцівасці манатоннасці функцыі $y = \sqrt[2k]{x}$, дзе $k \in N$, мноствам значэнняў дадзенай функцыі з'яўляецца прамежак $[\sqrt[4]{81};\ +\infty)$, або $E(f) = [3;\ +\infty)$.

б) Па ўласцівасці квадратычнай функцыі мноствам значэнняў падкарэннага выразу з'яўляецца прамежак $(-\infty;\ 27]$. Па ўласцівасці манатоннасці функцыі $y = \sqrt[2k+1]{x}$, дзе $k \in N$, мноствам значэнняў дадзенай функцыі з'яўляецца прамежак $(-\infty;\ \sqrt[3]{27}]$, г. зн. $E(g) = (-\infty;\ 3]$.

Прыклад 3. Размясціце лікі $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ і $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ у парадку нарастання.

Рашэнне.

Запішам лікі $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$ і $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$ у выглядзе каранёў з аднолькавым паказчыкам:

$-\sqrt[3]{7} = -\sqrt[6]{7^2} = -\sqrt[6]{49}$;

$$-\sqrt{2\sqrt[3]{6}} = -\sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot 6}} = -\sqrt{\sqrt[3]{48}} = -\sqrt[6]{48};$$

$$-\sqrt[3]{5\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{5^2 \cdot 2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{50}} = -\sqrt[6]{50}.$$

Паколькі $-\sqrt[6]{50} < -\sqrt[6]{49} < -\sqrt[6]{48}$, то $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}} < -\sqrt[3]{7} < -\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$.

Адказ: $-\sqrt[3]{5\sqrt{2}}$; $-\sqrt[3]{7}$; $-\sqrt{2\sqrt[3]{6}}$.

21.1. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt[8]{x^2-4}}{\sqrt[4]{x-1}}$;

б) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt[7]{x^2-5x}} + \sqrt[6]{x^2-x-20}$;

в) $f(x) = \sqrt[6]{x^3-2x^2} + \sqrt[10]{|x|-2}$.

21.2. Знайдзіце мноства значэнняў функцыі:

а) $g(x) = \sqrt[6]{(x-1)^2+64}$; б) $h(x) = \sqrt[4]{(x+5)^2+81}$;

в) $g(x) = \sqrt[4]{x^2+4x+85}$; г) $h(x) = \sqrt[6]{x^2-2x+65}$;

д) $g(x) = \sqrt[5]{x^2-6x+41}$; е) $g(x) = \sqrt[8]{256-(x+3)^2}$.

21.3. Размясціце ў парадку нарастання лікі:

а) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ і $\sqrt[4]{7}$; б) $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt{\sqrt[3]{30}}$ і $\sqrt[4]{10}$.

21.4. Дадзены функцыі $f(x) = \sqrt[3]{x}$ і $g(x) = x^4$. Знайдзіце значэнне выразу:

а) $f\left(g\left(\sqrt{2\sqrt{2}}\right)\right)$; б) $g(f(0{,}125))$.

21.5. Пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$; б) $g(x) = \sqrt[4]{|x|}$;

в) $f(x) = -\sqrt[3]{|x|} - 2$; г) $g(x) = \sqrt[4]{|x-2|}$.

21.6. Функцыя $y = f(x)$ няцотная і для $x \geqslant 0$ задаецца формулай $f(x) = \sqrt[4]{x-1}$. Знайдзіце значэнне выразу $f(-2) - f(-8)$.

§ 22. Ірацыянальныя ўраўненні

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне $x^2 + x = \sqrt{18 - x - x^2} - 2$.

Рашэнне.

Няхай $t = \sqrt{18 - x - x^2}$, $t \geqslant 0$, тады $t^2 = 18 - x - x^2$; $x^2 + x = 18 - t^2$. Выходнае ўраўненне прымае выгляд $18 - t^2 = t - 2$; $t^2 + t - 20 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -5, \\ t = 4. \end{array}\right.$ Паколькі $t \geqslant 0$, то $t = 4$, г. зн. $\sqrt{18 - x - x^2} = 4$; $18 - x - x^2 = 16$;

$x^2 + x - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Адказ: -2; 1.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне:

а) $(x - 2) \cdot \sqrt[6]{x^2 - 9x + 8} = 0$; б) $\frac{x - 3}{x - 1} \cdot \sqrt{(x - 1)(x - 2)} = 0$.

Рашэнне.

а) Выкарыстаем уласцівасць аб роўнасці здабытку нулю і атрымаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 9x + 8 = 0, \\ \left\{\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x^2 - 9x + 8 \geqslant 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 1, \\ \left\{\begin{array}{l} x = 2, \\ x \in (-\infty; 1] \cup [8; +\infty); \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 8, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Адказ: 1; 8.

б) $$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \frac{x - 3}{x - 1} = 0, \\ (x - 1)(x - 2) \geqslant 0, \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} (x - 1)(x - 2) = 0, \\ x \neq 1; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Адказ: 2; 3.

Прыклад 3. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $x \cdot \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2$.

Рашэнне.

$$x \cdot \sqrt{3x^2 + 13} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2.$$

Няхай $t = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13}$, тады $t^2 - t - 2 = 0$, $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$ Паколькі $t \geqslant 0$, то $t = 2$, значыць, $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{3x^2 + 13} = 2$; $\begin{cases} x^2(3x^2 + 13) = 16, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^4 + 13x^2 - 16 = 0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = -\frac{16}{3}, \\ x^2 = 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ x \geqslant 0; \end{cases} \quad x = 1.$$

Адказ: 1.

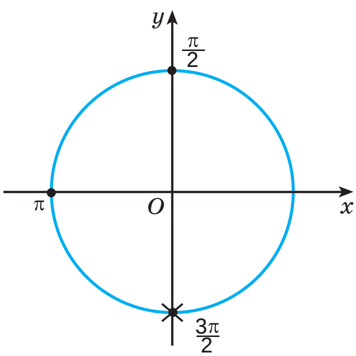
Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $\sqrt{1 + \cos x} = \sin x$.

Рашэнне.

$$\sqrt{1 + \cos x} = \sin x; \quad \begin{cases} 1 + \cos x = \sin^2 x, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 + \cos x - (1 - \cos^2 x) = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x + \cos^2 x = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (1 + \cos x)\cos x = 0, \\ \sin x \geqslant 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = -1, \\ \cos x = 0, \end{array}\right. \\ \sin x \geqslant 0. \end{cases}$$



Рыс. 64

На адзінкавай акружнасці адзначым пункты, якія адпавядаюць значэнням зменнай, пры якіх $\cos x = -1$ і $\cos x = 0$ (рыс. 64). З улікам умовы $\sin x \geqslant 0$ атрымаем

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi + 2\pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$$

Адказ: $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Прыклад 5. Рашыце ўраўненне $\sqrt[3]{2 - x} + \sqrt{x - 1} = 1$.

Рашэнне.

Няхай $a = \sqrt[3]{2 - x}$; $b = \sqrt{x - 1}$, тады $a^3 = 2 - x$; $b^2 = x - 1$ і $a^3 + b^2 = 1$. Рэшым сістэму ўраўненняў

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 1, \\ a + b = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 + b^2 = 1, \\ b = 1 - a; \end{cases} \quad \begin{cases} a^3 + (1 - a)^2 = 1, \\ b = 1 - a. \end{cases}$$

Рэшым першае ўраўненне сістэмы:

$a^3 + a^2 - 2a + 1 = 1;\ \ a(a+2)(a-1) = 0;$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a = 0,\\ b = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}a = -2,\\ b = 3,\end{cases}\\ \begin{cases}a = 1,\\ b = 0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = 0,\\ \sqrt{x-1} = 1,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = -2,\\ \sqrt{x-1} = 3,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x} = 1,\\ \sqrt{x-1} = 0;\end{cases}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x = 2,\\ x = 10,\\ x = 1.\end{array}\right.$$

Адказ: 1; 2; 10.

Прыклад 6. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y = \sqrt{1 + 4\cos 2x}$ і $y = \sqrt{1 - 4\cos x}$.

Рашэнне.

Рэшым ураўненне $\sqrt{1 + 4\cos 2x} = \sqrt{1 - 4\cos x}$;

$\sqrt{1 + 4(2\cos^2 x - 1)} = \sqrt{1 - 4\cos x}$. Няхай $\cos x = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $\sqrt{1 + 4(2t^2 - 1)} = \sqrt{1 - 4t}$; $\begin{cases}8t^2 - 3 = 1 - 4t,\\ 1 - 4t \geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2t^2 + t - 1 = 0,\\ t \leqslant 0{,}25;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t = -1,\\ t = 0{,}5,\end{array}\right.\\ t \leqslant 0{,}25;\end{cases}$ $t = -1.$

Тады $\cos x = -1$; $x = \pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Адказ: $\pi + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

22.1. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\sqrt{5 - \sqrt{x + 1 + \sqrt{2x^2 + x + 3}}} = 1.$

22.2. Выкарыстайце ўласцівасць аб роўнасці здабытку нулю і рашыце ўраўненне:

а) $(x - 4)\sqrt{8 + x} = 0;$

б) $(x^2 + 8x + 15)\sqrt{x + 4} = 0;$

в) $(8 - 3x)\sqrt{10 + 3x - 4x^2} = 0;$

г) $(1 - 2x)\sqrt{x + 3} = 1 - 2x;$

д) $(x + 1)\sqrt{x^2 + x - 2} = 2x + 2;$

е) $\sqrt{16 - x^2}\sqrt{x^2 - 3x - 10} = 0.$

22.3. Рашыце ўраўненне $\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{x - 2}}} + \sqrt{1 + \sqrt{x - 2}} = 6.$

22.4. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{6x-11}$.

22.5. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення

$$x\sqrt{x^2-15}+5\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x^2-15}=14.$$

22.6. Рашыце ўраўненне $\sqrt{2x^2-15x+1}+\sqrt{2x^2-15x+8}=7$.

22.7. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{18-3x}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{18-3x}}$.

22.8. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення

$$\frac{x^2-2x-2}{\sqrt{x-2}}-3\sqrt{x-2}+2\sqrt{x^2-2x-2}=0.$$

22.9. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае цэлых каранёў ураўнення

$$\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1.$$

22.10. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x^2-2x-3}+\sqrt{-x^2-x}=\sqrt{x+1}$.

22.11. Рашыце ўраўненне:

а) $\sqrt{3\sin x+1{,}5}=2\sin x$;

б) $\sqrt{1+4\cos x}=1-3\cos x$;

в) $\sqrt{1-4\sin x}=\sqrt{1-4\cos 2x}$.

22.12. Рашыце ўраўненне $2x\sqrt{7x+18}=x^2+7x+18$.

22.13. Рашыце ўраўненне $3x^2+x+2-4x\sqrt{x+2}=0$.

22.14. Знайдзіце карані ўраўнення

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16.$$

22.15. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2x-15+2\sqrt{x^2+5x}$.

22.16. Знайдзіце здабытак каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $x^2+x+\sqrt{x-2}=13$.

22.17. Рашыце ўраўненне $\sqrt{x-2}=\sqrt[3]{5+x}-1$.

22.18. Знайдзіце абсцысы пунктаў перасячэння графікаў функцый $y=\sqrt{1-4\sin x}$ і $y=\sqrt{1-4\cos 2x}$.

22.19. Рашыце ўраўненне адносна зменнай x:

а) $\sqrt{x+4} = a - 2$; б) $\sqrt{8-x} = 2a + 2$;

в) $\sqrt{7+2x} = \sqrt{a-x}$; г) $\sqrt{x-a} = \sqrt{4-x}$.

22.20. Рашыце ўраўненне $(x-1)\sqrt{x-a} = 0$.

22.21. Знайдзіце ўсе значэнні ліку a, пры якіх ураўненні $x^2 - a = 0$ і $\sqrt{x} - a = 0$ раўназначныя.

§ 23. Ірацыянальныя няроўнасці

Няроўнасці, якія змяшчаюць зменную пад знакам кораня, называюцца **ірацыянальнымі.**

Пры рашэнні ірацыянальных няроўнасцей неабходна не толькі карыстацца ўласцівасцямі лікавых няроўнасцей і ўласцівасцямі кораня n-й ступені, але і ўлічваць знакі выразаў у левай і правай частках няроўнасці.

Прыклад 1. Рашыце няроўнасць $\sqrt{x+2} > x$.

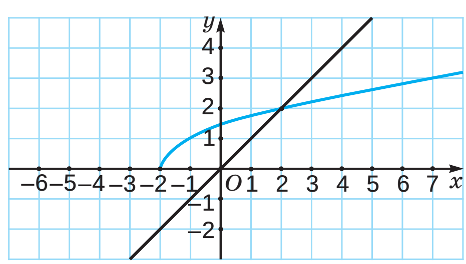
Рашэнне.

Першы спосаб. Узвесці абедзве часткі няроўнасці ў квадрат можна пры ўмове, што яны неадмоўныя. Таму пры $x \geqslant 0$ дадзеная няроўнасць раўназначна няроўнасці $x + 2 > x^2$. Далей трэба разглядаць рашэнне няроўнасці пры $x < 0$. Пры гэтых значэннях x левая частка няроўнасці большая за правую пры ўсіх значэннях зменнай, пры якіх $\sqrt{x+2}$ існуе.

Такім чынам, дадзеная няроўнасць раўназначна сукупнасці сістэм няроўнасцей
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x+2 > x^2,\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x+2 \geqslant 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant 0,\\ x \in (-1; 2),\end{cases}\\ \begin{cases}x < 0,\\ x \geqslant -2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0; 2),\\ x \in [-2; 0)\end{array}\right. \Leftrightarrow x \in [-2; 2).$$

Адказ: $[-2; 2)$.

Другі спосаб. Няроўнасці можна рашаць, карыстаючыся графікамі функцый. Для рашэння дадзенай няроўнасці пабудуем графікі функцый $f(x) = \sqrt{x+2}$ і $g(x) = x$ (рыс. 65).

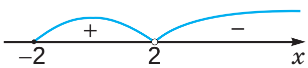


Рыс. 65

Заўважым, што для $x \in [-2;\ 2)$ графік функцыі $f(x) = \sqrt{x+2}$ размешчаны вышэй графіка функцыі $g(x) = x$. Значыць, значэнні функцыі $f(x)$ большыя за адпаведныя значэнні функцыі $g(x)$ для $x \in [-2;\ 2)$, г. зн. рашэнне дадзенай няроўнасці ёсць прамежак $[-2;\ 2)$.

Трэці спосаб. Рэшым гэту няроўнасць метадам інтэрвалаў.

Разгледзім функцыю $f(x) = \sqrt{x+2} - x$.



1) $D = [-2;\ +\infty)$.

2) Нулі функцыі: $x = 2$.

3) Вызначым знакі функцыі ў кожным з прамежкаў, на якія пункт $x = 2$ разбівае абсяг вызначэння функцыі $f(x)$. У адпаведнасці са знакам няроўнасці выбіраем адказ: $x \in [-2;\ 2)$.

Такім чынам, рашаць ірацыянальныя няроўнасці можна рознымі спосабамі ці нават іх камбінацыяй.

Разгледзім некаторыя віды ірацыянальных няроўнасцей і метады іх рашэння.

1. Няроўнасць віду $\sqrt[2n]{f(x)} > g(x)$, $n \in N$

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{3-2x} > x$; б) $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$; в) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$.

Рашэнне.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^{2n} \end{cases} \end{array}\right.$$

а) $\sqrt{3-2x} > x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0, \\ 3-2x > x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ 3-2x \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0;\ 1), \\ x \in (-\infty;\ 0) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty;\ 1).$$

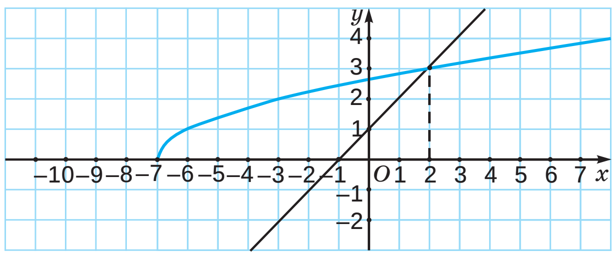
Адказ: $(-\infty;\ 1)$.

б) $$\sqrt{x^2-3x+2} > x+3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x+2 \geqslant 0, \\ x+3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ x^2-3x+2 > (x+3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geqslant 0, \\ x < -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant -3, \\ x < -\frac{7}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in (-\infty; -3), \\ x \in \left[-3; -\frac{7}{9}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right).$$

Адказ: $\left(-\infty; -\frac{7}{9}\right)$.

в) Рэшым няроўнасць графічна. Пабудуем відарысы графікаў функцый $f(x) = \sqrt{x+7}$ і $g(x) = x + 1$ (рыс. 66).



Рыс. 66

Рашэннямі няроўнасці $\sqrt{x+7} \geqslant x + 1$ будуць тыя значэнні x, для якіх графік функцыі $f(x) = \sqrt{x+7}$ размешчаны не ніжэй графіка функцыі $g(x) = x + 1$, г. зн. $x \in [-7; 2]$.

Адказ: $[-7; 2]$.

2. Няроўнасць віду $\sqrt[2n]{f(x)} < g(x)$, $n \in N$

Прыклад 3. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{3 - 2x} < x$;

б) $\sqrt{2x - x^2} \leqslant x + 2$.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x),\ n \in N \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0, \\ f(x) < (g(x))^{2n} \end{cases}$$

Рашэнне.

а) $\sqrt{3 - 2x} < x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 3 - 2x \geqslant 0, \\ 3 - 2x < x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in (1; 1{,}5].$$

Адказ: $x \in (1; 1{,}5]$.

б) $\sqrt{2x - x^2} \leqslant x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \\ 2x - x^2 \leqslant (x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ 2x - x^2 \leqslant x^2 + 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \leqslant 0, \\ x \geqslant -2, \\ x^2 + x + 2 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0; 2], \\ x \geqslant -2, \\ x \in \boldsymbol{R} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [0;\ 2].$

Адказ: $x \in [0;\ 2]$.

3. Няроўнасць віду $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)}\right)$, $n \in N$

Прыклад 4. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4}$;   б) $\sqrt{2x+1} < \sqrt{3x-4}$;

в) $\sqrt{x^2 + 5x + 6} > \sqrt{4x+6}$;   г) $\sqrt{3x-4} \leqslant \sqrt{x^2 - 3x + 1}$.

Рашэнне.

$$\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

а) $\sqrt{2x+1} > \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 3x - 4, \\ 3x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant 1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ x \in \left[1\frac{1}{3};\ 5\right).$

Адказ: $\left[1\frac{1}{3};\ 5\right)$.

б) $\sqrt{2x+1} < \sqrt{3x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 < 3x - 4, \\ 2x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5, \\ x \geqslant -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in (5;\ +\infty).$

Адказ: $(5;\ +\infty)$.

в) $\sqrt{x^2 + 5x + 6} > \sqrt{4x+6} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 > 4x + 6, \\ 4x + 6 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x > 0, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) > 0, \\ x \geqslant -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;\ -1) \cup (0;\ +\infty), \\ x \in [-1{,}5;\ +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in [-1{,}5;\ -1) \cup (0;\ +\infty).$

Адказ: $[-1{,}5;\ -1) \cup (0;\ +\infty)$.

г) $\sqrt{3x-4} \leqslant \sqrt{x^2-3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4 \leqslant x^2-3x+1, \\ 3x-4 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-6x+5 \geqslant 0, \\ x \geqslant 1\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [5; +\infty), \\ x \in \left[1\frac{1}{3}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow x \in [5; +\infty).$

Адказ: $[5; +\infty)$.

4. Няроўнасць віду $\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)}$ $\left(\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)}\right)$, $n \in N$

Прыклад 5. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt[5]{x^2-2} > \sqrt[5]{x}$; б) $\sqrt[5]{x^2-2} < \sqrt[5]{x}$; в) $\sqrt[5]{x^2+x-1} \leqslant \sqrt[5]{x+15}$.

Рашэнне.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)} > \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$
$$\sqrt[2n+1]{f(x)} < \sqrt[2n+1]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$$

а) $\sqrt[5]{x^2-2} > \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow x^2-2 > x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Адказ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

б) $\sqrt[5]{x^2-2} < \sqrt[5]{x} \Leftrightarrow x^2-2 < x \Leftrightarrow x \in (-1; 2)$.

Адказ: $(-1; 2)$.

в) $\sqrt[5]{x^2+x-1} \leqslant \sqrt[5]{x+15} \Leftrightarrow x^2+x-1 \leqslant x+15 \Leftrightarrow x^2-16 \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-4; 4]$.

Адказ: $[-4; 4]$.

5. Няроўнасць віду $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} > a$ $\left(\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} < a\right)$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$

Няроўнасць віду $\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} > a$ $\left(\sqrt[n]{f(x)} + \sqrt[k]{g(x)} < a\right)$, $n \in N$, $k \in N$, $n > 1$, $k > 1$, можна рашыць метадам інтэрвалаў.

Прыклад 6. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x-3} > 5$;

б) $\sqrt{x-11} + \sqrt{x-3} < 4$;

в) $\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x} > 1$.

Рашэнне.

а) *Першы спосаб.* Знойдзем нулі функцыі $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}-5$, г. зн. рэшым ураўненне $\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}=5$. Атрымаем $x=3$. Гэты пункт разбівае абсяг вызначэння $D=\left[\frac{3}{4};\ +\infty\right)$ функцыі $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$ на два прамежкі. Вызначым знак функцыі ў кожным з іх, атрымаем адказ $x\in(3;\ +\infty)$.

Адказ: $(3;\ +\infty)$.

Другі спосаб. Калі $f(x)$ і $g(x)$ аднаманатонныя (абедзве спадальныя або абедзве нарастальныя), то іх сума таксама манатонная (спадальная або нарастальная адпаведна). Функцыя $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{4x-3}$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння, а пры $x=3$ прымае значэнне, роўнае 5, значыць, для $x>3$ значэнні функцыі будуць большымі за пяць, такім чынам, няроўнасць будзе правільнай пры $x>3$.

б) Знойдзем нулі функцыі $y=\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}$, г. зн. рэшым ураўненне $\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}=4$. Атрымаем $x=12$. Гэты пункт разбівае абсяг вызначэння $D=[11;\ +\infty)$ функцыі $y=\sqrt{x-11}+\sqrt{x-3}$ на два прамежкі. Вызначым знак функцыі ў кожным з іх і атрымаем $x\in[11;\ 12)$.

Адказ: $[11;\ 12)$.

в) Знойдзем нулі функцыі $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}-1$, г. зн. рэшым ураўненне $\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}=1$. Нулём дадзенай функцыі з’яўляецца $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Гэты пункт разбівае абсяг вызначэння функцыі $D=[-1;\ 1]$ на два прамежкі. Вызначым знак функцыі ў кожным з іх і атрымаем адказ $x\in\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$.

Адказ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ 1\right]$.

23.1. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x+3}>4$; б) $\sqrt[4]{x-1}\geqslant 2$;

в) $\sqrt{x^2-6x+4}>4$; г) $\sqrt[6]{x-x^2+1}\geqslant 1$.

23.2. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x-5}>-2$; б) $\sqrt[8]{x+2}\geqslant -1$;

в) $\sqrt{6-x}>0$; г) $\sqrt[4]{5x+1}\geqslant 0$.

23.3. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = \sqrt{x-2}$ размяшчаецца:

а) вышэй прамой $y = -1$;

б) не ніжэй прамой $y = -3$;

в) вышэй восі абсцыс;

г) не ніжэй восі абсцыс.

23.4. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{2-x} > x$; б) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;

в) $\sqrt{x^2-4x} > x-3$; г) $\sqrt{x^2-3x+2} \geqslant 2x-5$;

д) $\sqrt{6x-x^2-5} > 8-2x$; е) $\sqrt{x^4-2x^2+1} \geqslant 1-x$.

23.5. Знайдзіце, пры якіх значэннях зменнай значэнні выразу:

а) $\sqrt{x^2+7x+12}$ большыя за адпаведныя значэнні выразу $6-x$;

б) $\sqrt{-x^2-8x-12}$ не меншыя за адпаведныя значэнні выразу $x+4$.

23.6. Знайдзіце найбольшае цэлае рашэнне няроўнасці:

а) $\sqrt{x-8} < 7$; б) $\sqrt{2x+3} \leqslant 5$;

в) $\sqrt[6]{x+3} < 2$; г) $\sqrt[4]{x-1} \leqslant 3$.

23.7. Выберыце няроўнасці, якія не маюць рашэнняў:

а) $\sqrt{x+5} < -2$; б) $\sqrt[4]{7-x} \leqslant -1$;

в) $\sqrt[6]{3-x} < 0$; г) $\sqrt[8]{x+8} \leqslant 0$.

23.8. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{2x-1} < x-2$; б) $\sqrt{7+3x} \leqslant 1-x$;

в) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$; г) $\sqrt{x^2-3x+2} \leqslant x-1$;

д) $\sqrt{144-x^2} \leqslant x+21$; е) $x-1 > \sqrt{2x^2-3x-5}$.

23.9. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх:

а) графік функцыі $y = \sqrt{x^2-3x}$ размяшчаецца ніжэй прамой $y = 5-x$;

б) графік функцыі $y = 4-x$ размяшчаецца не ніжэй графіка функцыі $y = \sqrt{4x-x^2}$.

23.10. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x+1} \geqslant \sqrt{x-1}$; б) $\sqrt{4-x} \leqslant \sqrt{3x-2}$;

в) $\sqrt{3x-10} > \sqrt{6-x}$; г) $\sqrt{x+2} < \sqrt{6-x}$;

д) $\sqrt{5x+7} < \sqrt{2-3x}$; е) $\sqrt{3+7x} < \sqrt{1-4x}$.

23.11. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x^2-1} < \sqrt{2x+7}$; б) $\sqrt{8x+44} \geqslant \sqrt{x^2-4}$;

в) $\sqrt{x+4} \leqslant \sqrt{x^2-2x+4}$; г) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8-x^2}$;

д) $\sqrt{x^2+5x} < \sqrt{1-x^2+4x}$; е) $\sqrt{2x^2-x-6} \geqslant \sqrt{x^2-4}$.

23.12. Знайдзіце ўсе значэнні зменнай, пры якіх значэнні выразу:

а) $\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$ меншыя за адпаведныя значэнні выразу $\sqrt{3-x}$;

б) $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$ не большыя за адпаведныя значэнні выразу $\sqrt{\dfrac{2x-3}{4x-1}}$.

23.13. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt[3]{x+5} < \sqrt[3]{6}$; б) $\sqrt[5]{7-x} \geqslant -1$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x-10} \leqslant -2$; г) $\sqrt[3]{5x^2-13x-33} > -3$;

д) $\sqrt[3]{2x-1} < \sqrt[3]{4x+5}$; е) $\sqrt[5]{6-x} \geqslant \sqrt[5]{1+3x}$;

ж) $\sqrt[7]{x^2-3x-13} \leqslant \sqrt[7]{x^2-4x-1}$; з) $\sqrt[3]{2x^2-6x+1} > \sqrt[3]{x^2-4}$.

23.14. Рашыце няроўнасць $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+5} > 3$ двума спосабамі.

23.15. Рашыце няроўнасць:

а) $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leqslant 1$; б) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} < 3$;

в) $\sqrt{x+7} - 1 \geqslant \sqrt{x}$; г) $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} > 7$.

23.16. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $y = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+15}$ размяшчаецца ніжэй прамой $y = 5$.

23.17. Выкарыстайце метад замены зменнай і рашыце няроўнасць:

а) $4\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} \geqslant 10$;

б) $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} < 3$;

в) $\frac{2x+1}{x} - 2\sqrt{\frac{2x+1}{x}} \geqslant 3$.

23.18. Рашыце няроўнасць:

а) $(x+3)\sqrt{5-x} > 0$;

б) $(4 - x^2)\sqrt{x^2 - 1} \leqslant 0$;

в) $\sqrt{x^2 - 25} \cdot (x+3) < 0$;

г) $(3x^2 - 16x + 21)\sqrt{2x+5} \leqslant 0$;

д) $\sqrt{81 - x^4} \cdot (x+2) \leqslant 0$;

е) $(x^2 - 9) \cdot \sqrt{16 - x^2} \geqslant 0$.

23.19. Рашыце няроўнасць:

а) $\frac{\sqrt{9-x}(x-15)}{x+19} \leqslant 0$;

б) $\frac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x} \geqslant 0$;

в) $\frac{6-2x}{\sqrt{x^2-7x+12}} \geqslant 0$;

г) $\frac{\sqrt{64-x^6}}{x-1} \geqslant 0$;

д) $\frac{(x+2)\cdot\sqrt{6-x}}{x^2+8x+16} \leqslant 0$;

е) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

23.20. Рашыце няроўнасць $\sqrt{x-1} < a$ адносна зменнай x.

23.21. Рашыце няроўнасць $\sqrt{x+2} \geqslant a$ адносна зменнай x.

23.22. Знайдзіце ўсе значэнні ліку a, пры якіх раўназначны няроўнасці:

а) $(x-a)\sqrt{x-2} > 0$ і $x > a$;

б) $(x-2)\sqrt{x-a} > 0$ і $x > a$.

§ 24. Азначэнне вытворнай функцыі

Прыклад 1. Знайдзіце вытворную функцыі $y = C$.

Рашэнне.

$$\text{Паколькі } f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0 \text{ то, } C' = 0.$$

Прыклад 2. Знайдзіце вытворную функцыі $f(x) = x^3$.

Рашэнне.

Выкарыстаем алгарытм знаходжання вытворнай функцыі.

① $f(x_0) = x_0^3;\ f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^3$, тады

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3;$$

$$\Delta f = \left(x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3\right) - x_0^3;$$

$$\Delta f = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3.$$

② $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + \Delta x^2.$

③ $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \to 3x_0^2$ пры $\Delta x \to 0$, значыць, $f'(x) = (x^3)' = 3x^2.$

24.1. Для функцыі $f(x) = -\dfrac{4}{x}$ знайдзіце:

а) прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$;
б) прырашчэнне функцыі, калі $x_0 = -2$; $\Delta x = 0,5$;
в) адносіну $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;
г) да чаго імкнецца адносіна $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля;
д) вытворную функцыі;
е) вытворную функцыі ў пункце $x = 3$.

24.2. Для функцыі $f(x) = x^3 - x^2$ знайдзіце:

а) прырашчэнне функцыі пры пераходзе ад x_0 да $x_0 + \Delta x$;

б) прырашчэнне функцыі, калі $x_0 = 1$; $\Delta x = 0,1$;

в) адносіну $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

г) да чаго імкнецца адносіна $\frac{\Delta f}{\Delta x}$, калі Δx імкнецца да нуля;
д) вытворную функцыі;
е) вытворную функцыі ў пункце $x = 2$.

24.3. Знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = ax^2 + c$; б) $f(x) = \frac{k}{x}$.

§ 25. Правілы вылічэння вытворных

Табліца вытворных

$f(x)$	x^2	$kx+b$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	C
$f'(x)$	$2x$	k	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	0

Правілы вылічэння вытворных

Вытворная сумы	$(U+V)' = U'+V'$
Вытворная здабытку	$(UV)' = U'V + V'U$
Вытворная дзелі	$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$
Вытворная ступені	$(x^n)' = nx^{n-1}$, дзе $n \in \boldsymbol{Z}$

Прыклад 1. Знайдзіце $f'(1)$, калі $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$.

Рашэнне.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)' \cdot 2\sqrt{x} - (2\sqrt{x})' \cdot (\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x})^2};\quad f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}-1)}{4x};$$

$$f'(x) = \frac{1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{4x};\quad f'(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}};\quad f'(1) = \frac{1}{4}.$$

Адказ: $\frac{1}{4}$.

Прыклад 2. Рашыце няроўнасць $g'(x) < 2f'(x)$, калі $g(x) = 3x^2 + 2x$, $f(x) = x(3 - x^2)$.

Рашэнне.

$g(x) = 3x^2 + 2x, \;\; g'(x) = 6x + 2.$

$f(x) = x(3 - x^2), \;\; f'(x) = x'(3 - x^2) + x(3 - x^2)' = 3 - x^2 - 2x^2 = 3 - 3x^2.$

Рэшым няроўнасць

$$6x + 2 < 2(3 - 3x^2); \;\; 6x^2 + 6x - 4 < 0; \;\; x \in \left(\frac{-3-\sqrt{33}}{6}; \frac{-3+\sqrt{33}}{6}\right).$$

Адказ: $\left(\frac{-3-\sqrt{33}}{6}; \frac{-3+\sqrt{33}}{6}\right)$.

Прыклад 3. Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + 21t - 6$ (час вымяраецца ў секундах, адлегласць — у метрах). Знайдзіце, у які момант часу гэты пункт мае найменшую скорасць і вызначце яе.

Рашэнне. Паколькі $v(t) = s'(t)$, то $v(t) = t^2 - 8t + 21$. Вылучыўшы поўны квадрат у правай частцы роўнасці, атрымаем $v(t) = (t-4)^2 + 5$, тады найменшае значэнне скорасці роўна 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$ пры $t = 4$ с.

Адказ: 4 с, 5 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

25.1. Вылічыце $f'(1)$, калі $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \sqrt{x}$.

25.2. Вядома, што $f(x) = (2x - 3)\sqrt{x}$. Знайдзіце $f'(1) + f(1)$.

25.3. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 0$, калі $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$.

25.4. Рашыце няроўнасць $2g'(x) \geqslant f'(x)$, калі $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $f(x) = x(1 - x^2)$.

25.5. Знайдзіце суму цэлых рашэнняў няроўнасці $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, калі $f(x) = 2x^3 + 12x^2$ і $g(x) = 9x^2 + 72x$.

25.6. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $f'(x) = f(x)$, калі

$$f(x) = \frac{x}{2 - x} + 2.$$

25.7. Знайдзіце суму квадратаў каранёў ураўнення $f'(x) = 0$, калі $f(x) = 4x + \frac{3}{x}$.

25.8. Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 15t - 7$ (шлях вымяраецца ў метрах, час — у секундах). Знайдзіце, у які момант часу пункт мае найменшую скорасць, і вызначце яе.

25.9. Знайдзіце ўсе значэнні a, пры якіх $f'(x) > 0$ для ўсіх рэчаісных значэнняў x, калі $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax$.

§ 26. Вытворная складанай функцыі. Вытворная адваротнай функцыі. Вытворныя трыганаметрычных функцый

Вытворная складанай функцыі

Тэарэма

Няхай зададзена складаная функцыя $h(x) = f(g(x))$.

Калі функцыя f мае вытворную ў пункце $y_0 = f(x_0)$, а функцыя g — у пункце x_0, то складаная функцыя $h(x) = f(g(x))$ таксама мае вытворную ў пункце x_0: $h'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Прыклад 1. Знайдзіце вытворную складанай функцыі

$$y = f(g(x)) = (2x^2 - 1)^5.$$

Рашэнне.
Запішам дадзеную функцыю як кампазіцыю функцый g і f:

$$x \xrightarrow{t = g(x)} 2x^2 - 1 \xrightarrow{y = f(t)} t^5.$$

Знойдзем здабытак вытворнай апошняй функцыі f і вытворнай прамежкавай функцыі g:

$$h'(x) = (t^5)' \cdot (t)' = 5t^4 \cdot (2x^2 - 1)'.$$

Выканаем замену і таксама знойдзем вытворную прамежкавай функцыі $h'(x) = 5(2x^2 - 1)^4 \cdot 4x = 20x(2x^2 - 1)^4$.

Прыклад 2. Знайдзіце вытворную складанай функцыі

$$y = f(g(x)) = \sqrt{2x+7}.$$

Рашэнне.

Запішам дадзеную функцыю як кампазіцыю функцый g і f:

$x \xrightarrow{t=g(x)} 2x+7 \xrightarrow{y=f(t)} \sqrt{t}$. Знойдзем вытворную апошняй функцыі f, а затым вытворную прамежкавай функцыі g:

$$h'(x) = \left(\sqrt{t}\right)' \cdot (t)' = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (2x+7)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+7}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+7}}.$$

Вытворная адваротнай функцыі

Няхай дадзены ўзаемна адваротныя функцыі f і g і вытворная функцыі $y = f(x)$ у пункце x_0 існуе і адрозніваецца ад нуля. Тады вытворная функцыі g у пункце $y_0 = f(x_0)$ роўна $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Прыклад 3. Знайдзіце вытворную функцыі $y = \sqrt{x}$.

Рашэнне.

Функцыі $f(x) = x^2$ і $g(x) = \sqrt{x}$ узаемна адваротныя на мностве неадмоўных рэчаісных лікаў. Паколькі $f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$, то вытворная функцыі g у пункце $y_0 = f(x_0)$ роўна $(g)' = \frac{1}{(f)'} = \frac{1}{2y_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Такім чынам, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Адказ: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Вытворныя трыганаметрычных функцый

$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Вытворная функцыі $y = \sin x$

Вывад формулы вытворнай функцыі $y = \sin x$ заснаваны на двух сцверджаннях:

1) $\cos(x + \Delta x) \to \cos x$, калі $\Delta x \to 0$;

2) $\frac{\sin x}{x} \to 1$, калі $x \to 0$.

Для атрымання формулы вытворнай знойдзем прырашчэнне функцыі $y = \sin x$:

$$\Delta \sin x = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

затым знойдзем адносіну $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x}$.

$$\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Па дапушчэнні 1) $\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos x,$ калі $\Delta x \to 0,$

па дапушчэнні 2) $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1,$ калі $\Delta x \to 0.$

Тады $\frac{\Delta \sin x}{\Delta x} \to \cos x,$ калі $\Delta x \to 0.$ Такім чынам, $\sin' x = \cos x$.

Прыклад 4. Знайдзіце вытворную функцыі $h(x) = \sin(3x - 2)$.

Рашэнне.
Запішам дадзеную функцыю як кампазіцыю функцый g і f:

$$x \xrightarrow{t = g(x)} 3x - 2 \xrightarrow{y = f(t)} \sin t.$$

Знойдзем вытворную апошняй функцыі f, а затым вытворную прамежкавай функцыі g:

$$h'(x) = \sin' t \cdot (3x - 2)' = \cos(3x - 2) \cdot 3 = 3 \cdot \cos(3x - 2).$$

Адказ: $3 \cdot \cos(3x - 2)$.

Вытворная функцыі $y = \cos x$

Запішам функцыю $y = \cos x$ у выглядзе складанай функцыі

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

Па правіле дыферэнцыравання складанай функцыі запішам функцыю $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ у выглядзе кампазіцыі функцый g і f:

$$x \xrightarrow{t = g(x)} \frac{\pi}{2} - x \xrightarrow{y = f(t)} \sin t.$$

Вытворная апошняй функцыі $\sin t$ роўна $\cos t$; вытворная прамежкавай функцыі $\frac{\pi}{2} - x$ роўна -1. Таму

$$h'(x) = (\cos t)' \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

Вытворная функцыі $y = \operatorname{tg} x$

Запішам функцыю $y = \operatorname{tg} x$ у выглядзе $y = \frac{\sin x}{\cos x}$.

Выкарыстаем правіла вытворнай дзелі функцый:

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - (-\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Вытворная функцыі $y = \operatorname{ctg} x$

$$\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Прыклад 5. Знайдзіце вытворную функцыі $h(x) = \operatorname{tg}^2 x$.

Рашэнне.

Запішам дадзеную функцыю як кампазіцыю функцый g і f: $x \xrightarrow{t = g(x)} \operatorname{tg} x \xrightarrow{y = f(t)} t^2$. Знойдзем вытворную апошняй функцыі f, а затым вытворную прамежкавай функцыі g:

$$h'(x) = (t^2)' \cdot (\operatorname{tg} x)' = 2t \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

Адказ: $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$.

26.1. Выкарыстаўшы табліцу вытворных і правілы дыферэнцыравання, знайдзіце вытворную функцыі:

а) $f(x) = x \sin x$;　　б) $f(x) = \frac{\cos x}{2x}$;

в) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$;　　г) $f(x) = \operatorname{ctg} x \cdot \cos x$.

26.2. Знайдзіце вытворную складанай функцыі:

а) $f(x) = (3x - 1)^4$;　　б) $f(x) = \sqrt{5x - 2}$;

в) $f(x) = (6x - 7x^3)^5$;　　г) $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$;

д) $f(x) = \sin \frac{x}{9}$;　　е) $f(x) = \cos^2 x$;

ж) $f(x) = \operatorname{tg}(x^2 - 1)$;　　з) $f(x) = \operatorname{ctg}(2x - 5)$.

26.3. Параўнайце значэнні выразаў $f'(-4)$ і $f'(-\sqrt{15})$, калі

$$f(x) = (4x + 15)^3.$$

26.4. Знайдзіце $f'(x_0)$, калі:

а) $f(x) = (8x^2 - 5)^4$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \cos 2x - \frac{2}{\pi}x^2 - 6$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

в) $f(x) = \sqrt{19 - 2x}$, $x_0 = 2$;

г) $f(x) = \operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

26.5. Знайдзіце значэнне вытворнай функцыі $f(x) = \sqrt{5x^2 - 8x}$ у пункце $x = -1$.

26.6. Вылічыце $f'(1)$, калі $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1}$.

26.7. Вылічыце:

а) $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, калі $f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$;

б) $f'(0{,}5\pi)$, калі $f(x) = \frac{3}{\pi}x^2 \sin x$;

в) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, калі $f(x) = \sin 3x \cos 3x$;

г) $f'\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, калі $f(x) = 7\cos^2 x$;

д) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, калі $f(x) = (x-2)^2 \cdot \cos x$;

е) $f'(\pi)$, калі $f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{x}}$.

26.8. Знайдзіце (у градусах) рашэнне ўраўнення
$\cos^2 x - 2f'(x) = \sin x \cdot f'(x)$, калі $f(x) = \cos x$ і $180° < x < 270°$.

26.9. Знайдзіце найменшы дадатны корань ураўнення $f'(x) = 0$, калі $f(x) = 3 + \sin(\pi + x) - 2\cos\frac{5\pi + x}{2}$.

26.10. Рашыце ўраўненне $f'(x) = 1$, калі $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{3}$.

26.11. Дадзена функцыя $f(x) = a\sin 4x + b\cos 2x$. Знайдзіце a і b, калі вядома, што $f'\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 4$ і $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2$.

26.12. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення $f(x) = 0$, якія належаць прамежку $\left[\frac{\pi}{4}; 2\pi\right]$, калі $f(x) = \sqrt{3}x + \cos 2x + \sqrt{\pi}$.

26.13. Матэрыяльны пункт рухаецца прамалінейна па законе $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (час вымяраецца ў секундах, адлегласць — у метрах). Знайдзіце скорасць руху пункта ў момант часу $t_0 = 5$ с.

26.14. Рашыце няроўнасць:

а) $f'(x) > 0$, калі $f(x) = \frac{x}{2} - \cos x$;

б) $f'(x) \leqslant 0$, калі $f(x) = \sin 2x - \sqrt{3}x$;

в) $f'(x) < 0$, калі $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

г) $f'(x) \geqslant 0$, калі $f(x) = \sin 5x \cos 5x$.

26.15. Рашыце ўраўненне $f'(x) = g'(x)$, калі:

а) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg} 3x$, $g(x) = 5 - 3x$.

26.16. Рашыце няроўнасць $f'(x) > g'(x)$, калі:

а) $f(x) = \sin\left(6x - \frac{\pi}{3}\right)$, $g(x) = 3x - 12$;

б) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$, $g(x) = 3 - \sqrt{2}x$.

§ 27. Геаметрычны сэнс вытворнай. Сувязь паміж знакам вытворнай функцыі і яе нарастаннем або спаданнем

Прыклад 1. Знайдзіце, пад якім вуглом да восі абсцыс нахілена датычная, праведзеная да графіка функцыі $f(x) = 2x^3 - x + 1$ у пункце яго перасячэння з воссю ардынат.

Рашэнне.

1) Знойдзем вытворную функцыі $f(x) = 2x^3 - x + 1$:

$$f'(x) = 6x^2 - 1.$$

2) Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце з абсцысай, роўнай нулю, г. зн. $x_0 = 0$.

3) Знойдзем значэнне вытворнай дадзенай функцыі пры $x_0 = 0$:

$$f'(0) = -1.$$

4) $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$; $\operatorname{tg}\alpha = -1$; $\alpha = 135°$.

Адказ: 135°.

Прыклад 2. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = \frac{2}{x-1}$ у пункце $x_0 = -1$.

Рашэнне.

Ураўненне датычнай функцыі $f(x)$ у пункце x_0 мае выгляд

$$y_{\text{дат}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

$y(-1) = \frac{2}{-1-1} = -1;$

$y' = -\frac{2}{(x-1)^2};\ y'(-1) = \frac{2}{(-1-1)^2} = -\frac{1}{2}.$

$y_{\text{дат}} = -1 - \frac{1}{2} \cdot (x+1);\ y_{\text{дат}} = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}.$

Адказ: $y_{\text{дат}} = -\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}.$

Прыклад 3. У якім пункце крывой $y = x^3 - 9x + 2$ датычная паралельна прамой $y = 3x - 4$?

Рашэнне.

Знойдзем вытворную функцыі $y = x^3 - 9x + 2$:

$$y' = \left(x^3 - 9x + 2\right)' = 3x^2 - 9.$$

Паколькі датычная паралельна прамой $y = 3x - 4$, то вуглавы каэфіцыент датычнай роўны 3, г. зн. $y'(x_0) = 3;\ 3x_0^2 - 9 = 3;\ x_0 = \pm 2.$

Калі $x_0 = 2$, то $y_0 = 2^3 - 9 \cdot 2 + 2 = -8.$

Калі $x_0 = -2$, то $y_0 = -2^3 - 9 \cdot (-2) + 2 = 12.$

Адказ: (2; −8); (−2; 12).

Прыклад 4. Праз пункт (−2; −5) праходзяць дзве датычныя да графіка функцыі $y = 2{,}5 - \frac{5}{x}$. Чаму роўна сума абсцыс пунктаў дотыку?

Рашэнне.

Пункт (−2; −5) не належыць графіку функцыі $y = 2{,}5 - \frac{5}{x}$.

$y_{\text{дат}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$

$y(x_0) = 2{,}5 - \frac{5}{x_0};$

$y' = \frac{5}{x^2};\ y'(x_0) = \frac{5}{x_0^2}.$

$y_{\text{дат}} = 2{,}5 - \frac{5}{x_0} + \frac{5}{x_0^2}(x - x_0);\ y_{\text{дат}} = 2{,}5 - \frac{5}{x_0} + \frac{5}{x_0^2}x - \frac{5}{x_0};$

$y_{\text{дат}} = \frac{5}{x_0^2}x + 2{,}5 - \frac{10}{x_0}.$

Паколькі датычныя праходзяць праз пункт $(-2; -5)$, то

$$-5 = \frac{5}{x_0^2}\cdot(-2) + 2{,}5 - \frac{10}{x_0};\ \ 3x_0^2 - 4x_0 - 4 = 0;\ \left[\begin{array}{l} x_0 = 2, \\ x_0 = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Сума абсцыс пунктаў дотыку роўна $2 + \left(-\frac{2}{3}\right) = 1\frac{1}{3}$.

Адказ: $1\frac{1}{3}$.

Прыклад 5. Дакажыце, што на графіку функцыі $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ няма пунктаў, у якіх датычныя паралельны восям каардынат.

Рашэнне. Для дадзенай функцыі вытворная існуе для ўсіх рэчаісных значэнняў аргумента, значыць, не існуе датычных да графіка функцыі, паралельных восі ардынат, паколькі $\operatorname{tg} 90^\circ$ не існуе.

Дакажам, што на графіку функцыі $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ няма пунктаў, у якіх датычныя паралельны восі абсцыс.

Датычная да графіка функцыі ў пункце x_0 паралельна восі абсцыс, калі $y'(x_0) = 0$.

Знойдзем вытворную дадзенай функцыі $y' = 3x^2 - 6x + 9$ і высветлім, ці існуюць значэнні аргумента, пры якіх значэнні вытворнай роўны нулю: $3x^2 - 6x + 9 = 0$; $D = -72 < 0$, г. зн. на графіку функцыі $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ няма пунктаў, у якіх датычныя паралельны восі абсцыс.

Прыклад 6. Высветліце, ці з'яўляецца прамая $y = 12x - 16$ датычнай да графіка функцыі $y = x^3$.

Рашэнне. Знойдзем абсцысы агульных пунктаў графікаў функцый $y = 12x - 16$ і $y = x^3$:

$$x^3 = 12x - 16;\ \ x^3 - 12x + 16 = 0;\ \ x^3 - 2x^2 + 2x^2 - 12x + 16 = 0;$$

$$x^2(x-2) + 2\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0;\ \ x^2(x-2) + 2(x-2)(x-4) = 0;$$

$$(x-2)\left(x^2 + 2x - 8\right) = 0;\ \ (x-2)^2(x+4) = 0;\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Запішам ураўненні датычных, праведзеных да графіка функцыі $y = x^3$, у пунктах з абсцысамі $x_1 = 2$ і $x_2 = -4$.

$y' = 3x^2$.

$$y_{\text{дат}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Калі $x_1 = 2$, то $y_{\text{дат}} = 8 + 12(x - 2)$; $y_{\text{дат}} = 12x - 16$. Такім чынам, прамая $y = 12x - 16$ з'яўляецца датычнай да графіка функцыі $y = x^3$ у пункце з абсцысай 2.

Адказ: з'яўляецца.

Прыклад 7. Знайдзіце крытычныя пункты функцыі

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 7.$$

Рашэнне.

1. Знойдзем вытворную дадзенай функцыі:

$$f'(x) = \left(2x^3 + 6x^2 - 18x + 7\right)' = 6x^2 + 12x - 18.$$

2. Вытворная існуе для ўсіх $x \in \boldsymbol{R}$. Таму крытычнымі пунктамі будуць толькі тыя пункты, у якіх вытворная роўна нулю.

3. Рэшым ураўненне $6x^2 + 12x - 18 = 0$:

$6x^2 + 12x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$. Карані гэтага ўраўнення $x = -3$ і $x = 1$. Гэтыя пункты — крытычныя пункты функцыі

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 7.$$

Прыклад 8. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - x^2$; б) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}$.

Рашэнне.

а) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. $f'(x) = \left(\dfrac{4}{x^2} - x^2\right)' = -\dfrac{8}{x^3} - 2x = -\dfrac{8 + 2x^4}{x^3}$.

Пры $x > 0$ $f'(x) < 0$, г. зн. функцыя спадае на прамежку $(0;\ +\infty)$.

Пры $x < 0$ $f'(x) > 0$, г. зн. функцыя нарастае на прамежку $(-\infty;\ 0)$.

б) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$.

$$f'(x) = \left(\frac{-x^2 + 10x - 16}{x^2}\right)' = \frac{-10x + 32}{x^3}.$$

$f'(x) > 0$; $\dfrac{-10x + 32}{x^3} > 0$; $x \in (0;\ 3{,}2)$.

$f'(x) < 0$; $\dfrac{-10x + 32}{x^3} < 0$; $x \in (-\infty;\ 0)$ і $x \in (3{,}2;\ +\infty)$.

На прамежку (0; 3,2) функцыя $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$ нарастае; на прамежку (−∞; 0) і прамежку (3,2; +∞) функцыя $f(x)=\frac{-x^2+10x-16}{x^2}$ спадае. Паколькі ў пункце 3,2 функцыя непарыўная, то (0; 3,2] — прамежак нарастання дадзенай функцыі, (−∞; 0) і [3,2; +∞) — прамежкі спадання дадзенай функцыі.

Прыклад 9. Знайдзіце ўсе значэнні ліку a, пры якіх функцыя $f(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)x-2x^3$ спадае на ўсёй лікавай прамой.

Рашэнне.

Функцыя $f(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)x-2x^3$ спадае на ўсёй лікавай прамой, калі $f'(x)<0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$.

$f'(x)=\left(a^4-3a^2-4\right)-6x^2.$

Паколькі $-6x^2\leqslant 0$ пры $x\in\boldsymbol{R}$, то $f'(x)<0$ на ўсёй лікавай прамой, калі $a^4-3a^2-4<0$; $\left(a^2-4\right)\left(a^2+1\right)<0$; $a^2-4<0$; $(a-2)(a+2)<0$; $a\in(-2;\ 2)$.

Адказ: $a\in(-2;\ 2)$.

Прыклад 10. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f(x)=\frac{3+2x^2}{1-x}$.

Рашэнне.

① $D(f)=(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$.

② $f'(x)=\frac{\left(3+2x^2\right)'(1-x)-(1-x)'\left(3+2x^2\right)}{(1-x)^2}=\frac{4x(1-x)-(-1)\left(3+2x^2\right)}{(1-x)^2}=$

$=\frac{4x-4x^2+3+2x^2}{(1-x)^2}=\frac{-2x^2+4x+3}{(1-x)^2}.$

③ $f'(x)=0$; $-2x^2+4x+3=0$; $2x^2-4x-3=0$;

$D=4^2-4\cdot 2\cdot(-3)=40>0$;

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm 2\sqrt{10}}{2\cdot 2}=\frac{2\left(2\pm\sqrt{10}\right)}{2\cdot 2}=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}.$

④ Пры пераходзе праз пункт $x=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ вытворная мяняе знак з «+» на «−», а пры пераходзе праз пункт $x=\frac{2-\sqrt{10}}{2}$ вытворная мяняе знак з «$-$» на «$+$», значыць, $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$ — пункт мінімуму дадзенай функцыі, а $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$ — пункт максімуму дадзенай функцыі.

Адказ: $x_{\min} = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$; $x_{\max} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$.

27.1. Знайдзіце вугал нахілу да восі абсцыс датычнай, праведзенай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пунктах перасячэння графіка з воссю абсцыс:

а) $f(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2$; б) $f(x) = x^2 - x$.

27.2. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = \cos x$ у пункце $A\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

27.3. Знайдзіце тангенс вугла нахілу датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$ у пункце $A\left(-2; \frac{1}{3}\right)$.

27.4. Пад якім вуглом нахілена датычная, праведзеная да графіка функцыі $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ у пункце яго перасячэння з воссю ардынат?

27.5. Знайдзіце вугал, які ўтварае крывая $f(x) = x^3 + x^2 - 2$ з воссю абсцыс у пункце іх перасячэння.

27.6. Знайдзіце абсцысу пункта графіка функцыі $f(x) = \sqrt{7-x}$, у якім датычная да гэтага графіка нахілена да восі Ox пад вуглом $135°$.

27.7. Знайдзіце суму абсцыс (з прамежку $[0; 0{,}6\pi]$) пунктаў дотыку, у якіх датычная да графіка функцыі $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ утварае з дадатным напрамкам восі абсцыс вугал $60°$.

27.8. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $y = x^3 + 3x^2 - 5$ у пункце перасячэння гэтага графіка з воссю ардынат.

27.9. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \frac{1}{x^3} + 2x$ у пункце з каардынатамі $(-1; -3)$.

27.10. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$ у пункце з каардынатамі $(-1; 1)$.

27.11. Запішыце ўраўненне датычнай да графіка функцыі $f(x) = \cos^2 x$ у пункце з абсцысай $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

27.12. У якім пункце крывой $y = x^4 + x - 2$ датычная да яе паралельна прамой $y = 4 - 3x$?

27.13. Праз пункт $(2; -10)$ праходзяць дзве датычныя да графіка функцыі $y = 2x^2 - 8x$. Чаму роўны здабытак абсцыс пунктаў дотыку?

27.14. Знайдзіце пункты графіка функцыі $y = f(x)$, у якіх датычная да яго паралельна восі абсцыс.

а) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; б) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

27.15. Знайдзіце каардынаты пунктаў, у якіх датычныя да графіка функцыі:

а) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ паралельны прамой $y = 2x - 1$;

б) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + x$ паралельны прамой $y = -x + 5$.

27.16. Высветліце, ці з'яўляецца прамая $y = 3x - 1$ датычнай да графіка функцыі $y = x^3$.

27.17. Знайдзіце суму абсцыс пунктаў (з прамежку $\left[-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{2}\right]$), у якіх датычная да графіка функцыі $f(x) = \sqrt{2}\sin 2x - \sqrt{2}\cos 2x$ паралельна восі абсцыс.

27.18. Дакажыце, што на графіку функцыі $y = 2x^3 + x - 1$ няма пунктаў, у якіх датычныя паралельны восям каардынат.

27.19. Знайдзіце суму крытычных пунктаў функцыі

$f(x) = \sin 2x + 6\sin x + 2x$ на прамежку $(-100°; 300°]$.

27.20. Пакажыце відарыс графіка якой-небудзь функцыі $y = f(x)$, для якой:

а) абсяг вызначэння функцыі — прамежак $[-5; 4]$;

б) мноства значэнняў функцыі — прамежак $[-2; 5]$;

в) $f'(x) < 0$ пры $x \in (-5; -1)$; $f'(x) > 0$ пры $x \in (-1; 4)$; $f'(-1) = 0$;

г) $f(x) < 0$ толькі пры $x \in (-4; 2)$; $f(-5) = 2$.

27.21. Пакажыце відарыс графіка якой-небудзь функцыі $y = f(x)$, для якой:

а) абсяг вызначэння функцыі — прамежак $[-4; 5]$;

б) мноства значэнняў функцыі — прамежак $[-3; 4]$;

в) $f'(x) > 0$ пры $x \in (-4;\ 1)$; $f'(x) < 0$ пры $x \in (1;\ 5)$; $f'(1) = 0$;

г) $f(x) > 0$ толькі пры $x \in (-3;\ 4)$; $f(5) = -1$.

27.22. Знайдзіце прамежкі нарастання функцыі:

а) $f(x) = -x^5 + 5x^4 - 5x^3 + 1$; б) $f(x) = 5x - \frac{4}{x}$.

27.23. Знайдзіце прамежкі спадання функцыі $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$.

27.24. Знайдзіце найменшы цэлы лік з прамежку спадання функцыі $f(x) = x^3 + 10x^2 - 4$.

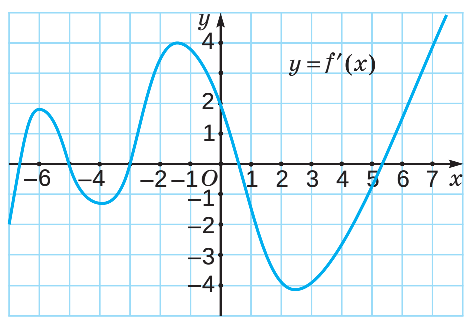
27.25. Знайдзіце найбольшы цэлы адмоўны лік з прамежку нарастання функцыі $f(x) = -\frac{(x-2)^2}{x+1}$.

27.26. Знайдзіце прамежкі манатоннасці функцыі:

а) $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$; б) $f(x) = \cos x + x$.

27.27. Знайдзіце пункты экстрэмуму функцыі $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 1$.

27.28. На рысунку 67 паказаны відарыс графіка вытворнай функцыі $y = f(x)$. Знайдзіце колькасць пунктаў максімуму функцыі.



Рыс. 67

27.29. Знайдзіце максімум функцыі

$$f(x) = -4x^3 - 4x^2 + 1.$$

27.30. Знайдзіце мінімум функцыі

$$f(x) = \frac{x^2+4}{x}.$$

27.31. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца нарастальнай:

а) $f(x) = \cos 2x + 3x$; б) $f(x) = \sin x + x^3 + x$.

27.32. Дакажыце, што функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца спадальнай:

а) $f(x) = \sin 3x - 4x$; б) $f(x) = \cos 5x - 6x$.

27.33. Знайдзіце ўсе значэнні m, пры якіх функцыя $f(x) = \left(9 - 8m^2 - m^4\right)x^3 + 5x$ нарастае на ўсёй лікавай прамой.

27.34. Функцыя $y = f(x)$ цотная. Вядома, што $x = 5$ з'яўляецца пунктам максімуму дадзенай функцыі, а $x = -3$ — пунктам мінімуму. Ці мае гэта функцыя іншыя пункты экстрэмуму? Калі мае, то якія? Ці можна адказаць на гэта пытанне, калі функцыя $y = f(x)$ з'яўляецца няцотнай?

§ 28. Прымяненне вытворнай да даследавання функцый

Прыклад 1. Даследуйце функцыю $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай.

① $D(f) = \boldsymbol{R}$.

② $f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x)$, значыць, функцыя $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ цотная, г. зн. яе графік сіметрычны адносна восі ардынат.

③ $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Няхай $t = x^2$, тады ўраўненне прымае выгляд

$$t^2 - 8t - 9 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} t = 9, \\ t = -1; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2 = 9, \\ x^2 = -1; \end{array}\right. \quad x^2 = 9; \quad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Графік функцыі перасякае вось абсцыс у пунктах (0; 3) і (0; −3).

④ $f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$. Графік функцыі перасякае вось ардынат у пункце (0; −9).

⑤ $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 4x\left(x^2 - 4\right)$;

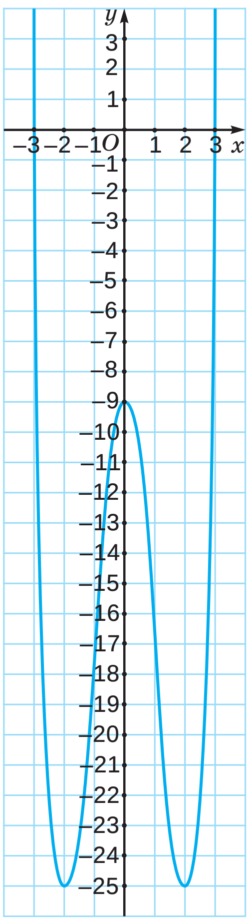
$f'(x) = 4x(x-2)(x+2)$.

$x_{\min} = -2$, $f_{\min} = f(-2) = (-2)^4 - 8 \cdot (-2)^2 - 9 = -25$;

$x_{\max} = 0$, $f_{\max} = f(0) = 0^4 - 8 \cdot 0^2 - 9 = -9$;

$x_{\max} = 2$, $f_{\max} = f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 - 9 = -25$.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-25 min	$\nearrow$	-9 max	$\searrow$	-25 min	$\nearrow$



Рыс. 68

⑥ Пабудуем графік функцыі (рыс. 68).

Прыклад 2. Даследуйце функцыю $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ і пабудуйце яе графік.

Рашэнне. Выкарыстаем алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай:

① $D(f) = \boldsymbol{R}$, паколькі $1 + x^2 \neq 0$.

② $f(-x) = \frac{3\cdot(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{3x}{1+x^2} = -f(x)$, значыць, функцыя $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$ няцотная, г. зн. яе графік сіметрычны адносна пачатку каардынат.

③ $\frac{3x}{1+x^2} = 0$; $x = 0$, графік праходзіць праз пачатак каардынат.

④ $f(0) = \frac{3\cdot 0}{1+0^2} = 0$. Пункт (0; 0) — адзіны пункт перасячэння графіка з восямі каардынат.

⑤ $f'(x) = \frac{(3x)'\left(1+x^2\right)-\left(1+x^2\right)'3x}{\left(1+x^2\right)^2}$; $f'(x) = \frac{3\left(1+x^2\right)-2x\cdot 3x}{\left(1+x^2\right)^2}$;

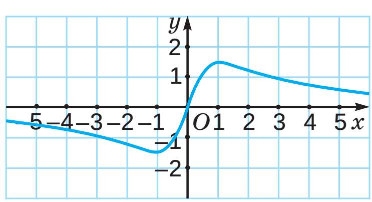
$f'(x) = \frac{3-3x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$; $f'(x) = \frac{3(1-x)(1+x)}{\left(1+x^2\right)^2}$.

$x_{\min} = -1$, $f_{\min} = f(-1) = \frac{3\cdot(-1)}{1+(-1)^2} = \frac{-3}{2} = -1{,}5$;

$x_{\max} = 1$, $f_{\max} = f(1) = \frac{3\cdot 1}{1+1^2} = 1{,}5$.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1{,}5; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-1{,}5$ **min**	↗	$1{,}5$ **max**	↘

⑥ Пабудуем графік функцыі (рыс. 69).



Рыс. 69

28.1. Выберыце функцыю, відарыс графіка якой паказаны на рысунку 70:

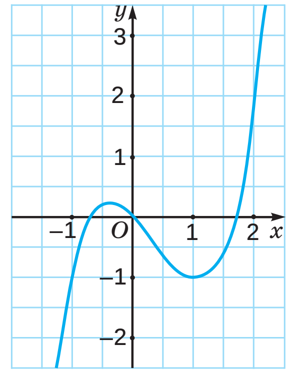
а) $f(x) = -x^3 - x^2 - x$;

б) $f(x) = x^3 - x^2 + x$;

в) $f(x) = x^3 + x^2 - x$;

г) $f(x) = -x^3 + x^2 + x$;

д) $f(x) = x^3 - x^2 - x$.



Рыс. 70

28.2. Выкарыстайце алгарытм даследавання графіка функцыі з дапамогай вытворнай і пабудуйце графік функцыі:

а) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 8x - 5$; б) $f(x) = -x^4 + 5x^2 - 4$;

в) $f(x) = (x-1)^2(x+2)$; г) $f(x) = x^3(2-x)$.

28.3. Даследуйце функцыю і пабудуйце яе графік:

а) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$; б) $f(x) = \dfrac{6x-6}{x^2+15}$;

в) $f(x) = \dfrac{4x-4}{x^2+8}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

28.4. Даследуйце функцыю $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$ з дапамогай вытворнай. Вызначце, пры якіх значэннях a ўраўненне $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не мае каранёў.

28.5. Знайдзіце колькасць каранёў ураўнення ў залежнасці ад ліку a:

а) $x^4 - 2x^2 + 3 = a$; б) $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{4x^3}{3} = a$; в) $x^3 - 3x^2 + 4 = a$.

§ 29. Найбольшае і найменшае значэнні функцыі

Прыклад 1. Знайдзіце суму квадратаў найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на адрэзку $[-4;\ 2]$.

Рашэнне. Знойдзем найбольшае і найменшае значэнні функцыі $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ на адрэзку $[-4;\ 2]$.

$f'(x)=3x^2+6x-9.$

$3x^2+6x-9=0;\ \ x^2+2x-3=0;\ \ x_1=-3\in[-4;\ 2];\ \ x_2=1\in[-4;\ 2].$

$f(-4)=(-4)^3+3\cdot(-4)^2-9\cdot(-4)+2=22;$

$f(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)+2=29;$

$f(1)=1^3+3\cdot1^2-9\cdot1+2=-3;$

$f(2)=2^3+3\cdot2^2-9\cdot2+2=4.$

$\max\limits_{[-4;\ 2]}f(x)=f(-3)=29;$

$\min\limits_{[-4;\ 2]}f(x)=f(1)=-3.$

$29^2+(-3)^2=850.$

Адказ: 850.

Прыклад 2. Знайдзіце здабытак найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x)=\frac{2}{x+1}-4$ на адрэзку $[1;\ 3]$.

Рашэнне.

Калі $f(x)=\frac{2}{x+1}-4$, то $f'(x)=-\frac{2}{(x+1)^2}$.

Паколькі няма значэнняў зменнай, пры якіх вытворная функцыі роўна нулю, то сваё найбольшае і найменшае значэнні функцыя прымае на канцах адрэзка.

$$f(1)=\frac{2}{1+1}-4=-3;\ \ f(3)=\frac{2}{3+1}-4=-3\frac{1}{2}.$$

Здабытак найбольшага і найменшага значэнняў функцыі на адрэзку $[1;\ 3]$ роўны $-3\cdot\left(-3\frac{1}{2}\right)=10{,}5$.

Адказ: 10,5.

Прыклад 3. Матэрыяльны пункт рухаецца па прамой па законе $s(t)=9t^2-\frac{t^3}{3}$, дзе $s(t)$ — шлях у метрах, t — час у секундах. У які момант часу з прамежку ад 10 да 20 секунд скорасць руху пункта будзе найбольшай і якое значэнне гэтай скорасці?

Рашэнне.

Калі $s(t)=9t^2-\frac{t^3}{3}$, то $v(t)=s'(t)=18t-t^2$.

Знойдзем найбольшае значэнне функцыі $v(t)=18t-t^2$ на адрэзку $[10;\ 20]$.

$$v'(t)=18-2t;\ \ 18-2t=0;\ \ t=9\notin[10;\ 20].$$

$$v(10) = 18 \cdot 10 - 10^2 = 80\ \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

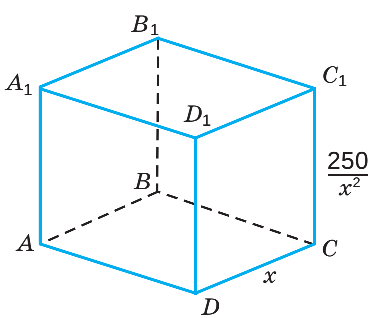
$$v(20) = 18 \cdot 20 - 20^2 = -40\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Такім чынам, скорасць руху пункта будзе найбольшай пры $t = 10$ с і значэнне гэтай скорасці роўна 80 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Адказ: 10 с; 80 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Прыклад 4. Праект цэха па перапрацоўцы агародніны прадугледжвае наяўнасць некалькіх аднолькавых халадзільных камер. Кожная з іх мае форму правільнай чатырохвугольнай прызмы аб'ёмам 250 м^3. Для абліцоўвання бакавых сценак камеры будзе выкарыстоўвацца матэрыял, цана якога — 5 р. за 1 м^2, а для абліцоўвання дна — 2 р. за м^2. Пры якіх памерах халадзільнай камеры кошт яе абліцоўвання будзе найменшым?

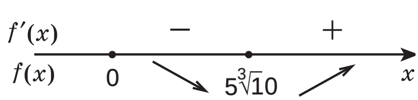
Рашэнне. Няхай x м — даўжыня стараны асновы прызмы, тады $\frac{250}{x^2}$ м — даўжыня бакавога канта прызмы (рыс. 71). Паколькі для абліцоўвання бакавых сценак камеры выкарыстоўваецца матэрыял, цана якога 5 р. за 1 м^2, то кошт абліцоўвання сценак халадзільнай камеры роўны $S_1(x) = 5 \cdot 4x \cdot \frac{250}{x^2}$; $S_1(x) = \frac{5000}{x}$ р. Паколькі для абліцоўвання дна выкарыстоўваецца матэрыял, цана якога 2 р. за 1 м^2, то кошт абліцоўвання дна халадзільнай камеры роўны $S_2(x) = 2 \cdot x^2$ р.



Рыс. 71

Разгледзім функцыю $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$; $S(x) = 2x^2 + \frac{5000}{x}$ і знойдзем, пры якім значэнні аргумента функцыя прымае сваё найбольшае значэнне на прамежку $(0; +\infty)$.

$$S'(x) = 4x - \frac{5000}{x^2} = \frac{4x^3 - 5000}{x^2} = \frac{4\left(x^3 - 1250\right)}{x^2}.$$



$x_{\min} = 5\sqrt[3]{10}$ м.

Такім чынам, кошт абліцоўвання халадзільнай камеры будзе найменшым, калі яе памеры роўны $5\sqrt[3]{10}$ м; $5\sqrt[3]{10}$ м і $\sqrt[3]{10}$ м.

Адказ: $5\sqrt[3]{10}$ м; $5\sqrt[3]{10}$ м і $\sqrt[3]{10}$ м.

29.1. Знайдзіце суму найбольшага і найменшага значэнняў функцыі:

а) $f(x) = \frac{x}{4+x} + 1$ на адрэзку $[-3; 1]$;

б) $f(x) = \frac{2}{x+1} + \frac{x}{2}$ на адрэзку $[0; 2{,}5]$.

29.2. Знайдзіце квадрат сумы найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x) = 2x^4 - 8x^3 + 1$ на адрэзку $[-1; 4]$.

29.3. Знайдзіце суму найбольшага і найменшага значэнняў функцыі $f(x) = 1 + 2\cos x$ на адрэзку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

29.4. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

а) $y = x^2 + \frac{16}{x}$ на адрэзку $[1; 9]$; б) $y = \frac{24}{x} + 1{,}5x$ на адрэзку $[2; 8]$.

29.5. Знайдзіце найбольшае і найменшае значэнні функцыі:

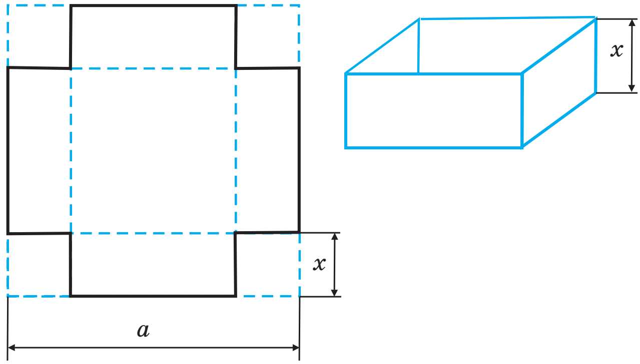
а) $y = \operatorname{tg} x$ на адрэзку $\left[-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{6}\right]$; б) $y = \operatorname{ctg} x$ на адрэзку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

29.6. Знайдзіце найбольшае значэнне функцыі $f(x) = \cos^2 x + \sin x$ на адрэзку $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

29.7. Вырашчаныя клубніцы адпраўляюць у магазін у скрынках, якія маюць форму правільнай чатырохвугольнай прызмы, перыметр бакавой грані якой роўны 56 см. Якімі павінны быць памеры скрынкі, каб яе ўмяшчальнасць была найбольшай?

29.8. Неабходна вырабіць пасудзіну ёмістасцю 8 л, якая мела б форму прамавугольнага паралелепіпеда з квадратнай асновай. Якая найменшая колькасць матэрыялу спатрэбіцца для вырабу такой пасудзіны без накрыўкі?

29.9. У раўнабедранай трапецыі меншая аснова і бакавая старана роўны па 4 см. Знайдзіце, пры якой даўжыні большай асновы плошча трапецыі будзе найбольшай.



Рыс. 72

29.10. З квадратнага ліста бляхі са стараной 1 м трэба вырабіць адкрытую зверху каробку прамавугольнай формы, выразаўшы па вуглах квадраты і загнуўшы ўтвораныя стораны (рыс. 72). Знайдзіце, якой павінна быць вышыня каробкі, каб яе аб'ём быў найбольшым.

§ 30. Прымяненне вытворнай для рашэння ўраўненняў, няроўнасцей і практычных задач

1. Рашэнне ўраўненняў з дапамогай вытворнай

Рашыць ураўненне — значыць знайсці ўсе карані ўраўнення або даказаць, што ўраўненне каранёў не мае. Адным з метадаў рашэння ўраўненняў з'яўляецца вызначэнне кораня так званым «падборам». Гэты метад выкарыстоўваецца ў выпадках, калі вылічэннем знаходзяць адзін або некалькі каранёў ураўнення, але рашыць ураўненне з дапамогай тоесных пераўтварэнняў не ўяўляецца магчымым ці рашэнне прыводзіць да грувасткіх пераўтварэнняў. Калі атрымліваецца даказаць, што ўраўненне не мае іншых каранёў, акрамя знойдзеных, то задача рэшана. Калі ж даказаць гэта не атрымліваецца, то задача застаецца нярэшанай і трэба шукаць іншы падыход да вызначэння каранёў.

Прыклад 1. Рашыце ўраўненне $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}} + 5x = 24.$

Рашэнне. Аналізуючы «зручныя» для вылічэння кораня значэнні зменнай x, можна вызначыць, што корань дадзенага ўраўнення $x = 4$.

Дакажам, што гэты корань адзіны, выкарыстаўшы ўласцівасці манатоннасці функцыі.

1. Запішам дадзенае ўраўненне ў выглядзе $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24=0.$

2. Няхай $f(x)=\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x-24.$

3. $D(f)=\boldsymbol{R}.$

4. $f'(x)=\frac{45}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)}+5;$ $\frac{45}{\sqrt{x^2+9}\left(x^2+9\right)}+5>0\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow f(x)$

нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

Паколькі функцыя $f(x)$ нарастае на $\boldsymbol{R}$, то ўраўненне $\frac{5x}{\sqrt{x^2+9}}+5x=24$ мае не больш за адзін корань. Значыць, падабраны корань — адзіны корань дадзенага ўраўнення.

Адказ: $x=4$.

Алгарытм* (I) *рашэння ўраўненняў з дапамогай вытворнай

① Вызначыць, аналізуючы «зручныя» для вылічэнняў значэнні зменнай, корань ураўнення.
② Прывесці ўраўненне да выгляду $f(x)=0$.
③ Знайсці абсяг вызначэння функцыі $f(x)$.
④ Даследаваць функцыю $f(x)$ на манатоннасць на $D(f)$ або прамежках, якія належаць $D(f)$.
⑤ Калі функцыя нарастае (спадае) на разглядаемым прамежку, то зрабіць выснову аб адзінасці знойдзенага кораня ўраўнення.

Алгарытм* (II) *вызначэння колькасці каранёў ураўнення

① Прывесці ўраўненне да выгляду $f(x)=0$.
② Знайсці абсяг вызначэння функцыі $f(x)$.
③ Даследаваць функцыю $f(x)$ на манатоннасць на $D(f)$ або прамежках, якія належаць $D(f)$.
④ Калі магчыма, праверыць знакі значэнняў функцыі $f(x)$ на канцах адрэзка $[a;\,b]$ з $D(f)$.

⑤ Зрабіць выснову:

- калі ўнутры інтэрвала $(a;\, b)$ $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$, то існуе не больш за адно значэнне c такое, што $f(c) = 0$;
- калі ўнутры інтэрвала $(a;\, b)$ вытворная $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ і $f(a)f(b) < 0$, то існуе адзінае значэнне c такое, што $f(c) = 0$.

Рэшым некалькі ўраўненняў, выкарыстаўшы алгарытм I.

Прыклад 2. Рашыце ўраўненне $2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$.

Рашэнне.

① Вызначаем, што корань дадзенага ўраўнення $x = 1$.

② Дадзенае ўраўненне прыводзім да выгляду
$2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 0$.

③ Няхай $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} - \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$.

Знойдзем абсяг вызначэння функцыі $D(f) = [1;\, +\infty)$.

④ $f'(x) = \dfrac{4x+2}{3\sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$. Паколькі $\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} > \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, то

$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае на ўсім абсягу вызначэння.

⑤ Паколькі функцыя $f(x)$ нарастае на $D(f)$, то знойдзены корань ураўнення
$2\sqrt[3]{x^2 + x - 1} = \sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}$ — адзіны.

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$,
дзе $n \in \boldsymbol{N},\ n > 1$

Адказ: $x = 1$.

Прыклад 3. Рашыце ўраўненне $\sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} = 4$.

Рашэнне.

① Вызначаем, што адзін з каранёў дадзенага ўраўнення $x = 2$.

② Дадзенае ўраўненне прыводзім да выгляду $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} - 4 = 0$.

Няхай $f(x) = \sqrt[4]{20x + 41} + \sqrt[4]{41 - 20x} - 4$.

③ $D(f) = \left[-\dfrac{41}{20};\, \dfrac{41}{20}\right]$.

Адзначым, што функцыя $f(x)$ з'яўляецца цотнай, таму $x = -2$ таксама з'яўляецца коранем дадзенага ўраўнення. Такім чынам, дастаткова даказаць, што функцыя $f(x)$ з'яўляецца манатоннай на паўінтэрвале $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$.

④ $f'(x) = \frac{5}{\sqrt[4]{(20x+41)^3}} - \frac{5}{\sqrt[4]{(41-20x)^3}} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ спадае на $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$.

⑤ Паколькі функцыя $f(x)$ спадае на паўінтэрвале $\left[0;\ \frac{41}{20}\right)$, то ўраўненне $\sqrt[4]{20x+41} + \sqrt[4]{41-20x} = 4$ з прычыны цотнасці функцыі $f(x)$ іншых каранёў, адрозных ад $x = \pm 2$, не мае.

Адказ: $x = \pm 2$.

Прыклад 4. Рашыце ўраўненне $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) = 4$.

Рашэнне.

① Заўважым, што каранямі дадзенага ўраўнення з'яўляюцца значэнні $x = \pm 1$.

② Дадзенае ўраўненне прыводзім да выгляду $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) - 4 = 0$. Няхай $f(x) = 3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) - 4$.

③ $D(f) = \boldsymbol{R}$.
Паколькі функцыя $f(x)$ з'яўляецца цотнай, дастаткова даказаць, што яна з'яўляецца манатоннай на паўінтэрвале $[0;\ +\infty)$.

④ $f'(x) = 18x^5 + 3x^2 - 6x + 3 = 3\left(6x^5 + x^2 - 2x + 1\right) = 3\left(5x^5 + (x-1)^2\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае на паўінтэрвале $[0;\ +\infty)$.

⑤ Паколькі функцыя $f(x)$ нарастае на паўінтэрвале $[0;\ +\infty)$, то ўраўненне $3x^2\left(x^4 - 1\right) + |x|\left(x^2 + 3\right) = 4$ з прычыны цотнасці функцыі $f(x)$ іншых каранёў, адрозных ад $x = \pm 1$, не мае.

Адказ: $x = \pm 1$.

Прыклад 5. Даказаць, што ўраўненне $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ мае адзіны корань.

Рашэнне. Выкарыстаем для доказу алгарытм II.

① Дадзенае ўраўненне запішам у выглядзе $\cos x - \frac{\pi}{2} + x = 0$,
$f(x) = \cos x - \frac{\pi}{2} + x$.

② $D(f(x)) = \boldsymbol{R}$. Заўважым, што $-1 \leqslant \frac{\pi}{2} - x \leqslant 1$, $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$, $\left[\frac{\pi}{2} - 1;\ \frac{\pi}{2} + 1\right] \subset \boldsymbol{R}$.

③ $f'(x) = -\sin x + 1$; $-\sin x + 1 \geqslant 0 \Rightarrow f(x)$ не спадае для x, якія задавальняюць няроўнасць $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$.

④ Паколькі вытворная ператвараецца ў нуль у адзіным пункце $\frac{\pi}{2}$ з $\frac{\pi}{2} - 1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 1$, то для $x \neq \frac{\pi}{2}$ маем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае.

⑤ $f\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - 1 < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) + 1 > 0$.

Такім чынам, ураўненне $\cos x = \frac{\pi}{2} - x$ мае адзіны корань. Можна заўважыць, што гэты корань роўны $\frac{\pi}{2}$.

Адказ: $\frac{\pi}{2}$.

2. Доказ няроўнасцей з дапамогай вытворнай

Прыклад 6. Даказаць, што $\sin x < x$ для $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказ. Разгледзім функцыю $f(x) = \sin x - x$. Даследуем яе на манатоннасць на прамежку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right] \in D(f)$; $f'(x) = \cos x - 1 < 0$ для $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і $\cos x - 1 = 0$ для $x = 0 \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, адкуль вынікае, што функцыя $f(x)$ спадае для $x \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Абазначым праз x_1 левую граніцу адрэзка: $x_1 = 0$, $f(0) = 0$. Тады з прычыны спадання функцыі $f(x) = \sin x - x$ на адрэзку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ па азначэнні спадальнай функцыі для любога x з гэтага адрэзка атрымаем $f(x) < f(0)$, г. зн. $\sin x - x < 0$, або $\sin x < x$.

Прыклад 7. Даказаць, што $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ пры $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Доказ. Перанясём усе складаемыя ў левую частку, каб атрымаць няроўнасць выгляду $f(x) > 0$, дзе $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Правядзём даследаванне функцыі $f(x)$ на манатоннасць для $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \in D(f)$. Знойдзем вытворную функцыі $f(x)$: $f'(x) = -\sin x + x$. У прыкладзе 6 паказана, што $\sin x - x < 0$, значыць, пры $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае. Функцыя $f(x)$ непарыўная на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а вытворная функцыі роўна нулю ў адным пункце гэтага адрэзка, значыць, функцыя нарастае на разглядаемым адрэзку.

Абазначым праз x_1 левую граніцу адрэзка: $x_1 = 0$, $f(0) = 0$.

Па азначэнні нарастальнай функцыі $f(x_1) < f(x_2)$, г. зн. $f(x) > 0$ для ўсіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Значыць, $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$, $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$.

Прыклад 8. Даказаць, што для $x \in \boldsymbol{R}$ выконваецца няроўнасць $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

Доказ.

① $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geqslant 0$. Няхай $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2$.

② $D(f(x)) = \boldsymbol{R}$.

③ $f'(x) = \frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; $\frac{x^3}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Калі $x < 0$, то $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ спадае пры $x < 0$. Для $x > 0$ маем: $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае пры $x > 0$. Значыць, $x = 0$ — пункт мінімуму функцыі, г. зн. пункт найменшага значэння функцыі $f(x)$ на $D(f)$.

④ Знойдзем значэнне функцыі $f(x)$ у пункце $x = 0$: $f(0) = 0$.

⑤ Такім чынам, $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} - 2 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geqslant 2$.

На падставе рашэння разгледжаных задач можна скласці алгарытм (III) доказу няроўнасцей з дапамогай вытворнай.

① Прывесці няроўнасць да выгляду $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

② Знайсці абсяг вызначэння функцыі $f(x)$.

③ Даследаваць функцыю $f(x)$ на манатоннасць і экстрэмумы на $D(f(x))$ або прамежку, які належыць $D(f(x))$.

④ Запісаць 0 (у правай частцы няроўнасці) як $f(a)$ $(f(b))$.

⑤ З няроўнасці $x > a$ $(x < b)$ зрабіць выснову:

- калі функцыя нарастае, то

$$f(x) > f(a) \Rightarrow f(x) > 0 \ (f(x) < f(b) \Rightarrow f(x) < 0);$$

- калі функцыя спадае, то

$$f(x) < f(a) \Rightarrow f(x) > 0 \ (f(x) > f(b) \Rightarrow f(x) < 0).$$

Прыклад 9. Ці правільная няроўнасць $\cos 2011 < 1 + \cos 2012$?

Рашэнне.

Перапішам дадзеную няроўнасць у выглядзе
$2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012$.

Разгледзім функцыю $f(x) = x + \cos x$. Даследуючы яе на манатоннасць $(f'(x) = -\sin x + 1 \geqslant 0)$, атрымаем, што функцыя нарастае для $x \in \boldsymbol{R}$.

Няхай $x_1 = 2011$, $x_2 = 2012$, $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$, $x_1 < x_2$, тады $f(x_1) < f(x_2)$, адкуль вынікае, што $2011 + \cos 2011 < 2012 + \cos 2012 \Leftrightarrow \cos 2011 < 1 + \cos 2012$.

Няроўнасць правільная.

Прыклад 10. Ці правільная няроўнасць $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$?

Рашэнне.

1. Выканаем некаторыя пераўтварэнні: $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} - 2\sqrt[3]{3} < 0$, $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1} - 2 < 0$.

2. Няхай $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} - 2$, тады

$f\left(\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}+1} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{3}}{3}-1} - 2$, паколькі $0 < \frac{\sqrt[3]{3}}{3} < 1$, то мэтазгодна разглядаць функцыю на адрэзку $[-1; 1]$.

3. $D(f(x)) = [-1; 1]$.

4. $f'(x) = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = 0 \Rightarrow x = 0, x \neq \pm 1.$$ Пры $x \in (-1;\ 0)$ маем $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ нарастае; пры $x \in (0;\ 1)$ маем $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ спадае; г. зн. пункт $x = 0$ — пункт максімуму, а паколькі дадзены пункт адзіны пункт экстрэмуму на адрэзку $[-1;\ 1]$, то ён з'яўляецца і пунктам, у якім функцыя $f(x)$ прымае найбольшае значэнне.

5. $f(0) = 0$: $f(x) < f(0) = 0$ для $x \in [-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$.

Такім чынам, няроўнасць $\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$ правільная.

На падставе разгледжаных практыкаванняў сфармулюем алгарытм (IV) доказу лікавых няроўнасцей з дапамогай вытворнай.

① Прывесці няроўнасць да выгляду $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

② Задаць функцыю $f(x)$ і даследаваць яе на манатоннасць і экстрэмумы.

③ Параўнаць значэнні функцыі ў пунктах x_1 і x_2.

Прыклад 11. Даказаць, што $4\mathrm{tg}5^\circ \mathrm{tg}9^\circ < 3\mathrm{tg}6^\circ \mathrm{tg}10^\circ$.

Доказ. Пераўтворым няроўнасць да выгляду

$$\frac{\mathrm{tg}5^\circ}{5^\circ} \cdot \frac{\mathrm{tg}9^\circ}{9^\circ} < \frac{\mathrm{tg}6^\circ}{6^\circ} \cdot \frac{\mathrm{tg}10^\circ}{10^\circ}.$$

Разгледзім функцыю $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$.

Няхай $x_1 = 5^\circ = \frac{\pi}{36}$, $x_2 = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$. Паколькі $x_1, x_2 \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то разгледзім функцыю на інтэрвале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

$f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \cos^2 x} - \dfrac{\mathrm{tg}x}{x^2}$, $f'(x) > 0$ для $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(x)$ нарастае.

$x_1, x_2 \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $x_1 < x_2$. На дадзеным прамежку функцыя $f(x)$ нарастае. Выкарыстаем азначэнне нарастальнай функцыі $f(x)$ на дадзеным інтэрвале: $f\left(\frac{\pi}{36}\right) < f\left(\frac{\pi}{30}\right) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{36}} < \dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{30}}{\frac{\pi}{30}}$. Таксама $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{20}} < \dfrac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{18}}{\frac{\pi}{18}}$. Перамножым гэтыя няроўнасці і атрымаем тое, што і трэба было даказаць.

3. Прымяненне вытворнай пры рашэнні практычных задач

Прыклад 12. Адкрыты кузаў грузавога аўтамабіля мае выгляд прамавугольнага паралелепіпеда з плошчай паверхні $2S$ і адносінай даўжыні да шырыні 5 : 2. Знайдзіце, якая даўжыня кузава, калі аб'ём кузава найбольшы.

Рашэнне. Плошча паверхні прамавугольнага паралелепіпеда роўна $2S$. Адносіна даўжыні да шырыні 5 : 2, таму няхай даўжыня кузава $a = 5x$, шырыня кузава $b = 2x$. І няхай вышыня кузава — c.

Плошча паверхні прамавугольнага паралелепіпеда:

$$2S = 2(5cx + 2cx) + 10x^2.$$

З атрыманага ўраўнення выразім c: $c = \frac{2S - 10x^2}{14x}$.

Складзём функцыю $V(x)$: $V(x) = 10x^2 \frac{2S - 10x^2}{14x} = \frac{10}{7}Sx - \frac{50}{7}x^3$.

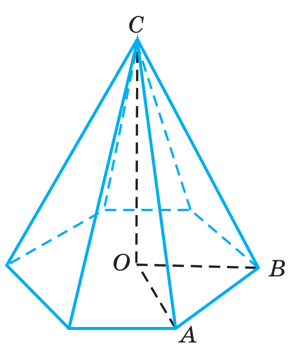
Знойдзем вытворную функцыі $V(x)$: $V'(x) = \frac{10}{7}S - \frac{150}{7}x^2$;

$\frac{10}{7}S - \frac{150}{7}x^2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{S}{15}}$.

$x = \sqrt{\frac{S}{15}}$ — максімальнае значэнне, паколькі пры $x < \sqrt{\frac{S}{15}}$ $V'(x) > 0 \Rightarrow V(x)$ нарастае; пры $x > \sqrt{\frac{S}{15}}$ $V'(x) < 0 \Rightarrow V(x)$ спадае.

Знойдзем даўжыню кузава a: $a = 5\sqrt{\frac{S}{15}} = \sqrt{\frac{5S}{3}}$.

Адказ: $a = \sqrt{\frac{5S}{3}}$.



Рыс. 73

Прыклад 13. У будане, які мае форму правільнай шасцівугольнай піраміды, даўжыня бакавога канта роўна 1 м (рыс. 73). Пры якой даўжыні стараны асновы будана яго ўмяшчальнасць будзе найбольшай?

Рашэнне. Па ўмове $CB = 1$. Няхай $AB = a$.

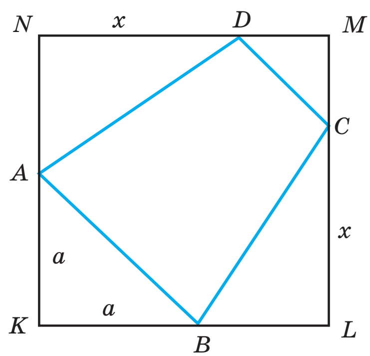
Аб'ём піраміды вылічваецца па наступнай формуле: $V = \frac{1}{3}Sh$. Правільны шасцівугольнік складаецца з шасці правільных трохвугольнікаў, таму $AB = OB = OA = a$. Знойдзем вышыню піраміды: $h = \sqrt{1 - a^2}$.

Плошча асновы шасцівугольнай піраміды $S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Складзём функцыю $V(a)$: $V(a) = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-a^2}$. Знойдзем вытворную функцыі $V(a)$: $V'(a) = a\sqrt{3-3a^2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{1-a^2}}$; $a\sqrt{3-3a^2} - \frac{a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{1-a^2}} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

$a = \sqrt{\frac{2}{3}}$ — максімальнае значэнне, якое прымае старана правільнай шасцівугольнай піраміды, паколькі пры $a < \sqrt{\frac{2}{3}}$ $V'(a) > 0 \Rightarrow V(a)$ нарастае; пры $a > \sqrt{\frac{2}{3}}$ $V'(a) < 0 \Rightarrow V(a)$ спадае.

Адказ: $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Прыклад 14. Пункты A і B размешчаны на сумежных старанах квадрата $KLMN$, на роўных адлегласцях ад агульнай вяршыні. У квадрат $KLMN$ упісана трапецыя $ABCD$ з асновай AB (рыс. 74). Якая найбольшая плошча трапецыі, калі плошча квадрата роўна 1?



Рыс. 74

Рашэнне. Няхай у дадзены квадрат $KLMN$ упісана трапецыя $ABCD$ так, што $A \in KN$, $B \in KL$, $AK = BK$.

З падобнасці трохвугольнікаў ABK і CDM вынікае, што $CM = DM$, таму $CL = DN$. Паколькі квадрат складаецца з трапецыі і чатырох прамавугольных трохвугольнікаў, то зручна абазначыць $KL = 1$, $AK = a$ і $CL = x$. Відавочна, што $0 < a < 1$; $0 < x < 1$.

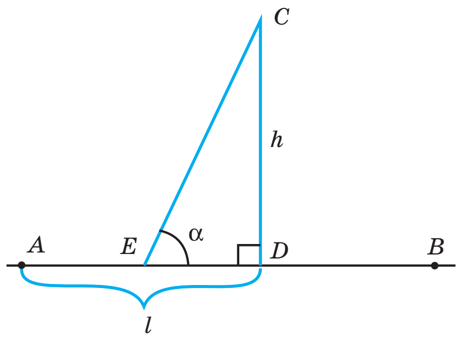
Няхай S — плошча трапецыі, а S_1 — сума плошчаў чатырох трохвугольнікаў, што адсякаюцца старанамі трапецыі. Тады

$$S_1 = \frac{1}{2}\left(a^2 + (1-x)^2 + 2(1-a)x\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2ax + a^2 + 1\right) = \frac{1}{2}\left((x-a)^2 + 1\right).$$

Складзём функцыю $S(x) = 1 - S_1$: $S(x) = 1 - \frac{1}{2}\left((x-a)^2 + 1\right)$. Даследуем атрыманую функцыю на манатоннасць: $S'(x) = -(x-a) \Rightarrow x = a$.

$x = a$ — найбольшае значэнне, паколькі пры $x < a$ $S'(x) > 0 \Rightarrow S(x)$ нарастае; пры $x > a$ $S'(x) < 0 \Rightarrow S(x)$ спадае. Такім чынам, пры $x = a$ $S_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ максімальная плошча трапецыі $S(x) = 1 - S_1 = \frac{1}{2}$.

Адказ: $\frac{1}{2}$.



Рыс. 75

Прыклад 15. Якім павінен быць вугал далучэння α (рыс. 75) дарогі (CE) да магістралі (AB), каб затраты часу на перавозкі па маршруце AEC былі найменшымі, калі скорасць руху аўтамабіляў па магістралі плануецца роўнай v_m, а па пад'язной дарозе — v_d ($v_m > v_d$)?

Рашэнне.

Правядзём з пункта C перпендыкуляр да прамой AB і абазначым даўжыню адрэзка CD праз h, а даўжыню адрэзка AD праз l. Тады атрымаем: $CE = \frac{h}{\sin\alpha}$, $DE = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Адсюль знаходзім час руху аўтамабіля па маршруце AEC:

$$t = \frac{(l - h \cdot \operatorname{ctg}\alpha)}{v_m} + \frac{h}{v_d \sin\alpha}.$$

Паколькі пункт A ў нашых разважаннях зафіксаваны ўмоўна і задае толькі напрамак руху па магістралі, то α можа змяняцца ў прамежку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Задача зводзіцца да адшукання найменшага значэння функцыі $t(\alpha)$ на азначаным прамежку.

Знойдзем вытворную: $t'(\alpha) = \frac{h}{v_d \sin^2\alpha}\left(\frac{v_d}{v_m} - \cos\alpha\right)$.

Паколькі $0 < \frac{v_d}{v_m} < 1$, то вытворная на разглядаемым прамежку ператвараецца ў нуль толькі ў адным пункце $\alpha_0 = \arccos\frac{v_d}{v_m}$, прычым $t'(\alpha) < 0$ пры $\alpha \in \left[0; \alpha_0\right]$ і $t'(\alpha) > 0$ пры $\alpha \in \left[\alpha_0; \frac{\pi}{2}\right]$. Гэта азначае, што на прамежку $\left[0; \alpha_0\right]$ функцыя $t(\alpha)$ спадае, а на прамежку $\left[\alpha_0, \frac{\pi}{2}\right]$ нарастае. Значыць, разглядаемая функцыя $t(\alpha)$ пры $\alpha = \alpha_0$ дасягае найменшага значэння.

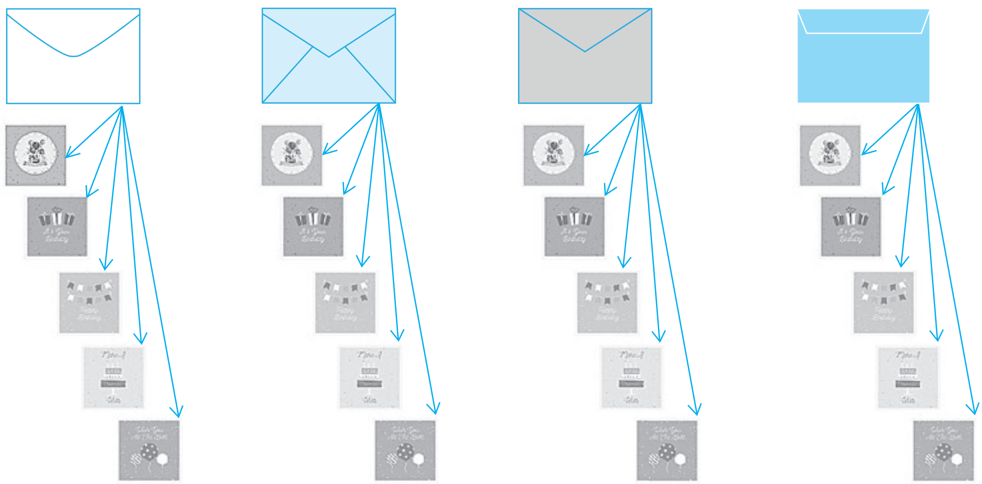
Адказ: вугал далучэння вызначаецца па формуле $\alpha_0 = \arccos\frac{v_d}{v_m}$.

§ 31. Правілы камбінаторнага складання і множання

Разгледзім задачу. Колькімі спосабамі можна выбраць паштоўку і канверт для віншавання, калі прапануюцца 4 розныя канверты і 5 розных паштовак?

Рашэнне. Адзін канверт з чатырох можна выбраць чатырма спосабамі. Пасля кожнага выбару канверта можна выбраць адну паштоўку з пяці. Гэта можна зрабіць пяццю спосабамі.

Значыць, ёсць усяго $4 \cdot 5 = 20$ спосабаў выбару паштоўкі і канверта для віншавання (рыс. 76).



4 спосабы выбару канверта
5 спосабаў выбару паштоўкі $\Big\}$ $4 \cdot 5 = 20$ спосабаў

Рыс. 76

Адказ: 20 спосабамі.

Разгледжаная задача адносіцца да раздзела матэматыкі, які называецца «камбінаторыка».

Камбінаторыка (ад лац. *combina* — спалучаць, злучаць) вывучае спосабы падліку разнастайных камбінацый з некаторых элементаў (аб'ектаў), складзеных па пэўных правілах.

Разгледжаную задачу можна рашыць па правіле камбінаторыкі, якое называецца ***правілам здабытку***.

Правіла здабытку
Калі
1) аб'ект $\boldsymbol{A}$ можа быць выбраны $\boldsymbol{m}$ рознымі спосабамі,
2) пасля кожнага такога выбару аб'ект $\boldsymbol{B}$ можна выбраць $\boldsymbol{n}$ рознымі спосабамі,

то выбраць **спачатку $\boldsymbol{A}$, а потым $\boldsymbol{B}$** можна $\boldsymbol{m \cdot n}$ спосабамі.

Прыклад 1. Колькі двухзначных лікаў можна скласці з лічбаў 1, 2, 3, 4?

Рашэнне.

Першую лічбу двухзначнага ліку (аб'ект A) можна выбраць чатырма спосабамі. Аб'ект B — другую лічбу двухзначнага ліку — таксама можна выбраць чатырма спосабамі.

Па правіле здабытку выбраць спачатку аб'ект A, затым аб'ект B можна $4 \cdot 4 = 16$ спосабамі.

Такім чынам, з лічбаў 1, 2, 3 і 4 можна скласці 16 двухзначных лікаў.

Адказ: 16 двухзначных лікаў.

Прыклад 2. Колькімі спосабамі можна выбраць адну зычную і адну галосную літару са слова «рамонт»?

Рашэнне.

Аб'ект A — зычная літара дадзенага слова. Зычных у слове 4. Аб'ект B — галосная літара дадзенага слова, іх у слове 2.

Па правіле здабытку выбар спачатку аб'екта A, а затым аб'екта B можа быць ажыццёўлены $4 \cdot 2 = 8$ спосабамі.

Адказ: 8 спосабамі.

Прыклад 3. Колькі розных варыянтаў абеду, які складаецца з адной першай, адной другой і адной трэцяй стравы, можна скласці, калі ў меню прадстаўлены 2 першыя, 6 другіх і 7 трэціх страў?

Рашэнне.

Аб'ект A — першая страва, аб'ект B — другая страва, аб'ект C — трэцяя страва. Па правіле здабытку выбар спачатку аб'екта A, а затым B і C можа быць ажыццёўлены $2 \cdot 6 \cdot 7 = 84$ спосабамі.

Адказ: 84 спосабамі.

Прыклад 4. Для афармлення двух гульнёвых пакояў у дзіцячым спартыўным комплексе ёсць 6 розных праектаў. Колькімі спосабамі можна выбраць два з іх, калі праекты павінны быць рознымі?

Рашэнне. Аб'ект A — праект для афармлення першага пакоя. Яго можна выбраць шасцю спосабамі. Аб'ект B — праект для афармлення другога пакоя. Пасля выбару праекта для першага пакоя яго можна выбраць пяццю спосабамі.

Па правіле здабытку выбар спачатку аб'екта A, а затым аб'екта B можа быць ажыццёўлены $6 \cdot 5 = 30$ спосабамі.

Адказ: 30 спосабамі.

Абагульненне правіла здабытку

Калі

1) аб'ект A_1 можа быць выбраны m_1 рознымі спосабамі,

2) пасля кожнага выбару аб'ектаў $A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ аб'ект A_k можа быць выбраны m_k рознымі спосабамі,

то выбраць спачатку A_1, потым $A_2, A_3, \ldots, A_{k-1}, A_k$ можна $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ спосабамі.

Прыклад 5. Колькімі спосабамі можна выбраць камплект з пары пальчатак, капелюша і парасона, калі ёсць 5 відаў пальчатак, 7 відаў капелюшоў і 10 відаў парасонаў?

Рашэнне. Пальчаткі могуць быць выбраны пяццю спосабамі. Пасля кожнага выбару пальчатак капялюш можна выбраць сямю спосабамі. Пасля кожнага выбару пальчатак і капелюша парасон можна выбраць дзесяццю спосабамі. Такім чынам, па правіле здабытку, набор з пальчатак, капелюша і парасона можна выбраць $5 \cdot 7 \cdot 10 = 350$ спосабамі (рыс. 77).

Рыс. 77

Адказ: 350 спосабамі.

Разгледзім задачу. Колькімі спосабамі можна выбраць адну экскурсію выхаднога дня, калі бюро падарожжаў прапануе 4 экскурсіі ў старажытныя замкі і 5 экскурсій ва ўнікальныя прыродныя запаведнікі?

Гэту задачу можна рашыць з дапамогай ***правіла сумы 1***.

Правіла сумы 1

Калі аб’ект A можа быць выбраны $\boldsymbol{m}$ рознымі спосабамі, а другі аб’ект B можна выбраць $\boldsymbol{n}$ рознымі спосабамі, прычым ніводзін са спосабаў выбару аб’екта A не супадае ні з адным са спосабаў выбару аб’екта B, то выбраць **або $\boldsymbol{A}$, або $\boldsymbol{B}$** можна $\boldsymbol{m + n}$ спосабамі.

У нашым выпадку аб’ект A — экскурсія ў старажытныя замкі, яе можна выбраць чатырма спосабамі, аб’ект B — экскурсія ва ўнікальныя прыродныя запаведнікі, яе можна выбраць пяццю спосабамі. Тады па правіле сумы выбраць або A, або B можна $4 + 5 = 9$ спосабамі.

Прыклад 6. Колькімі спосабамі можна выбраць адну кветку з 5 розных руж і 9 розных гваздзікоў?

Рашэнне. Адну ружу з пяці (аб’ект A) можна выбраць пяццю спосабамі. Аб’ект B — адзін гваздзік з дзевяці, можна выбраць дзевяццю спосабамі. Па правіле сумы выбраць або аб’ект A, або аб’ект B можна $5 + 9 = 14$ спосабамі.

Такім чынам, адну кветку з 5 розных руж і 9 розных гваздзікоў можна выбраць 14 спосабамі (рыс. 78).

5 + 9 = 14 спосабаў выбару адной кветкі

Рыс. 78

Адказ: 14 спосабамі.

Прыклад 7. Колькімі спосабамі можна выбраць адзін напой, калі прапануецца 3 цытрусавыя і 7 ягадных напояў?

Рашэнне. Аб’ект A — цытрусавы напой, аб’ект B — ягадны напой.

Аб’ект A можна выбраць трыма спосабамі, а аб’ект B — сямю спосабамі.

Па правіле сумы адзін напой (г. зн. або аб’ект A, або аб’ект B) можна выбраць $3 + 7 = 10$ спосабамі.

Адказ: 10 спосабамі.

Разгледзім задачу. На паказе мод у дэманстрацыі першай калекцыі ўдзельнічалі 14 мадэляў, а другой — 18, пры гэтым 5 мадэляў прынялі ўдзел у дэманстрацыі абедзвюх калекцый. Колькі ўсяго мадэляў прыняло ўдзел у паказе мод?

Паколькі пры падліку агульнай колькасці мадэляў складаннем ліку 14 з лікам 18 двойчы будуць падлічаны 5 мадэляў, якія прынялі ўдзел у дэманстрацыі абедзвюх калекцый, то рашэнне гэтай задачы прыводзіць да наступнага правіла.

Правіла сумы 2

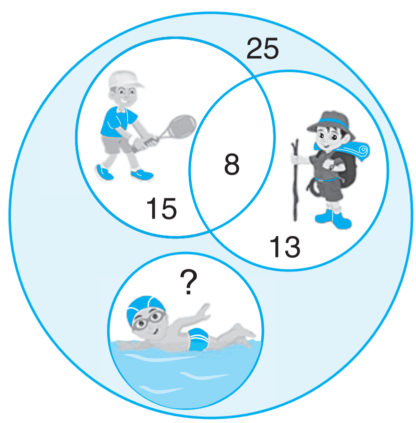
Калі некаторыя спосабы выбару аб'ектаў A і B супадаюць і колькасць супадзенняў роўна $\boldsymbol{k}$, то агульная колькасць розных спосабаў выбару або аб'екта A, або B роўна $\boldsymbol{m + n - k}$, **дзе** $\boldsymbol{m}$ ***— колькасць спосабаў выбару аб'екта*** A, $\boldsymbol{n}$ ***— колькасць спосабаў выбару аб'екта*** B.

У нашай задачы: $m = 14$, $n = 18$, $k = 5$, тады $m + n - k = 27$.

Адказ: 27.

Прыклад 8. У класе з 25 школьнікаў 15 чалавек займаюцца тэнісам, 13 — турызмам, 8 — тэнісам і турызмам. Астатнія — плаваннем. Колькі чалавек займаецца плаваннем?

Рашэнне. Аб'ект A — школьнік, які займаецца тэнісам. Аб'ект A можна выбраць 15 спосабамі. Аб'ект B — школьнік, які займаецца турызмам. Аб'ект B можна выбраць 13 спосабамі. Паколькі 8 школьнікаў займаюцца і тэнісам, і турызмам, то 8 спосабаў выбару аб'ектаў A і B супадаюць (рыс. 79).



Рыс. 79

Тады па правіле сумы 2 агульная колькасць розных спосабаў выбару або аб'екта A, або аб'екта B роўна $15 + 13 - 8 = 20$.

Такім чынам, 20 чалавек займаюцца або тэнісам, або турызмам.

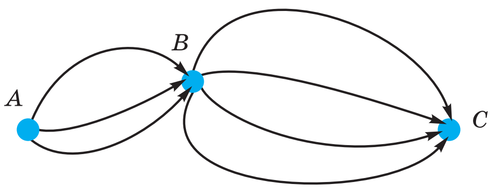
Па ўмове задачы астатнія школьнікі займаюцца плаваннем. Паколькі ў класе 25 чалавек, то плаваннем займаюцца $25 - 20 = 5$ чалавек.

Адказ: 5 чалавек.

Прыклад 9. Падчас канікулаў 15 вучняў аднаго класа наведалі мастацкі музей, а 14 — гістарычны, прычым 7 з гэтых аднакласнікаў наведалі абодва музеі. Колькі ўсяго чалавек у класе, калі вядома, што кожны наведаў прынамсі адзін з гэтых музеяў?

Рашэнне. Для рашэння задачы выкарыстаем правіла сумы 2. Аб'ект A — навучэнец, які наведаў мастацкі музей, яго можна выбраць 15 спосабамі. Аб'ект B — навучэнец, які наведаў гістарычны музей, яго можна выбраць 14 спосабамі. Паколькі 7 спосабаў выбару аб'ектаў A і B супадаюць, то маем: $15 + 14 - 7 = 22$ (чалавекі ў класе).

Адказ: 22 чалавекі.



Рыс. 80

31.1. З горада A ў горад B вядуць тры дарогі, а з горада B у горад C вядуць 4 дарогі (рыс. 80). Колькімі спосабамі можна праехаць з горада A ў горад C?

31.2. Кавярня прапануе ў меню 10 відаў кавы і 12 відаў дэсертаў. Колькімі спосабамі можна сфарміраваць заказ, які складаецца з кавы і дэсерту?

31.3. Колькімі спосабамі можна абклеіць два пакоі шпалерамі, калі ёсць тры розныя віды шпалер (пакоі могуць быць абклеены аднолькавымі шпалерамі)?

31.4. Колькімі спосабамі можна пафарбаваць сцены дзвюх выставачных зал, калі ёсць чатыры розныя віды фарбы (залы не могуць быць пафарбаваны аднолькава)?

31.5. Колькімі спосабамі можна выбраць розныя пары з зычнай і галоснай літар са слова «камбінаторыка»?

31.6. Колькі двухзначных лікаў можна скласці з лічбаў 7, 8, 9?

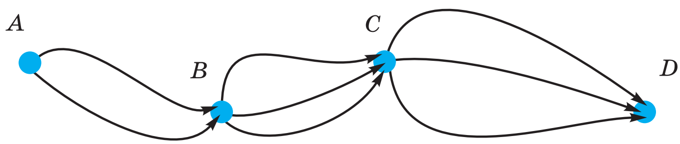
31.7. Колькі двухзначных лікаў можна скласці з лічбаў 4, 5, 6, выкарыстаўшы ў запісе ліку кожную з іх не больш за адзін раз?

31.8. Колькімі спосабамі можна скласці код, які ўтрымлівае адну з літар a, b, c, d і адну з лічбаў 1, 2, 3, 4, 5?

31.9. Колькі двухзначных лікаў можна скласці з лічбаў 0, 1, 2?

31.10. Колькі двухзначных лікаў можна скласці з лічбаў 0, 6, 7, выкарыстаўшы ў запісе ліку кожную з іх не больш за адзін раз? Колькі сярод іх цотных?

31.11. З горада A ў горад B вядуць дзве дарогі, з горада B у горад C вядуць 3 дарогі і з горада C у горад D вядуць тры дарогі (рыс. 81). Колькімі спосабамі можна праехаць з горада A ў горад D?



Рыс. 81

31.12. Колькімі спосабамі можна выбраць камплект са штаноў, кашулі і пінжака, калі ёсць 3 штаноў, 8 кашуль і 4 пінжакі?

31.13. Колькімі спосабамі можна выбраць набор з трох розных ручак, калі ёсць 4 віды шарыкавых, 5 відаў капілярных і 3 віды гелевых ручак?

31.14. Ёсць 6 відаў ягад. Для прыгатавання кампоту бяруць 3 віды ягад. Колькі розных варыянтаў кампоту можна прыгатаваць?

31.15. Колькі трохзначных лікаў можна скласці з лічбаў:

а) 1, 2, 3, 4; б) 0, 1, 2, 3?

31.16. Колькі трохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 1, 2, 3, 4, выкарыстаўшы ў запісе ліку кожную з іх не больш за адзін раз?

31.17. Колькі няўдалых спроб можна зрабіць, адкрываючы замок, код якога складаецца з чатырох розных лічбаў?

31.18. Колькі набораў з 4 літар можна скласці з 33 літар рускага алфавіта?

31.19. Колькімі спосабамі можна заказаць адзін напой у кафэ, калі ў меню ёсць 5 відаў соку і 4 віды морсу?

31.20. Колькімі спосабамі можна выбраць адзін фрукт, калі ў вазе ляжаць 5 розных яблыкаў, 4 розныя грушы і 2 розныя апельсіны?

31.21. У класе з 25 школьнікаў 15 чалавек займаюцца шахматамі, 13 — футболам, 6 — шахматамі і футболам. Астатнія — дзюдо. Колькі чалавек займаецца дзюдо?

31.22. У класе 25 чалавек, 15 з іх займаюцца спортам, а 13 чалавек займаюцца музыкай. Колькімі спосабамі можна выбраць спартсмена на спаборніцтва, калі ў гэты ж час адбываецца музыкальны конкурс?

31.23. На міжнароднай канферэнцыі сярод 300 удзельнікаў некалькі чалавек ведаюць кітайскую мову. Сярод усіх астатніх — 100 ведаюць англійскую і французскую, 150 — англійскую і рускую, 25 — рускую, французскую і англійскую. Колькі ўдзельнікаў канферэнцыі ведаюць кітайскую мову?

31.24. Колькі сярод першых 100 натуральных лікаў такіх, якія дзеляцца на 2, або на 3, або на 2 і на 3?

31.25. Колькі сярод першых 100 натуральных лікаў такіх, якія не дзеляцца ні на 2, ні на 3?

31.26. Колькі сярод першых 100 натуральных лікаў такіх, якія не дзеляцца ні на 2, ні на 3, ні на 5?

§ 32. Перастаноўкі. Размяшчэнні

Разгледзім задачу. Колькі розных чатырохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 3, 5, 6, 8 так, каб усе лічбы былі рознымі?

Рашэнне. На першае месца можна паставіць **любую з чатырох лічбаў** (першы слупок на рысунку 82), яе можна выбраць **чатырма** спосабамі.

На другое — любую **з трох лічбаў, што засталіся** (другі слупок), г. зн. другую лічбу можна выбраць **трыма** спосабамі.

На трэцяе — любую **з дзвюх лічбаў, што засталіся** (трэці слупок), г. зн. трэцюю лічбу можна выбраць **двума** спосабамі.

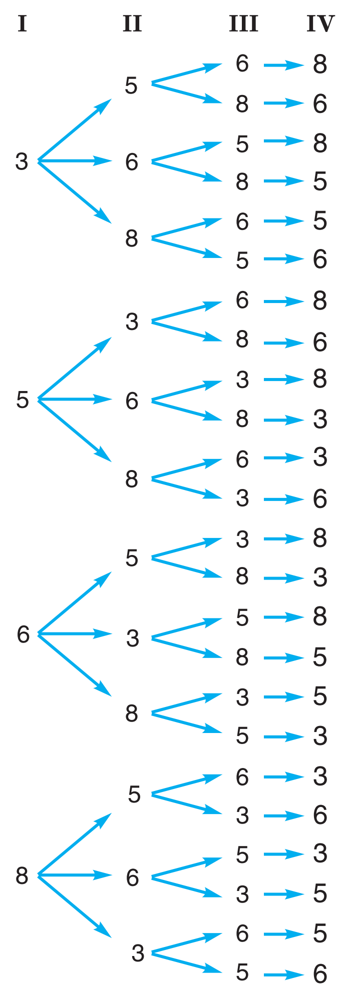
На чацвёртае — **адну лічбу, што засталася** (чацвёрты слупок).

Усяго будзе столькі розных чатырохзначных лікаў, колькі атрымалася «ланцужкоў» ад першай лічбы да чацвёртай:

$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ лікі.

Кожны з атрыманых чатырохзначных лікаў адрозніваецца ад іншых толькі парадкам размяшчэння лічбаў. У гэтым выпадку гавораць, што разглядаюцца перастаноўкі з чатырох розных элементаў.

> **Перастаноўкамі з n розных элементаў** называюцца наборы, кожны з якіх змяшчае ўсе гэтыя n элементаў, узятых у пэўным парадку.



Рыс. 82

Розныя перастаноўкі з n дадзеных элементаў адрозніваюцца адна ад адной толькі парадкам размяшчэння элементаў.

Колькасць усіх перастановак з n элементаў абазначаецца P_n (ад фр. *permutation* — перастаноўка).

Выведзем формулу для падліку колькасці перастановак з n элементаў.

Няхай ёсць n розных элементаў, якія трэба размеркаваць па n месцах. Выбар першага элемента можна ажыццявіць n спосабамі (інакш кажучы, на першае месца можна паставіць любы з гэтых n элементаў).

Пасля выбару першага элемента другі элемент можна выбраць $(n-1)$ спосабам (на другое месца можна паставіць любы з $(n-1)$ элементаў, што засталіся). Трэці элемент можна выбраць $(n-2)$ спосабамі і г. д.

Апошні элемент можна выбраць толькі адным спосабам.

Па правіле здабытку атрымаем, што n элементаў можна выбраць $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ спосабамі. Значыць, колькасць перастановак з n элементаў роўна здабытку ўсіх натуральных лікаў ад 1 да n, г. зн. $P_n=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n.$

Для здабытку першых n натуральных лікаў прымяняюць спецыяльнае абазначэнне $n!$ (чытаецца «n фактарыял»). Гэта назва паходзіць ад лацінскага слова *factorialis* — які дзейнічае, выраблае, памнажае.

$$\boxed{n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-2)\cdot(n-1)\cdot n}$$

$$\boxed{P_n=n!}$$

Напрыклад, $2!=1\cdot2=2$;

$3!=1\cdot2\cdot3=6$;

$10!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10=3\,628\,800.$

Па азначэнні: $1!=1,\ \ 0!=1.$

Паколькі колькасць перастановак з n элементаў роўна здабытку ўсіх натуральных лікаў ад 1 да n, то атрымаем формулу: $P_n=n!$.

У разгледжанай задачы колькасць розных чатырохзначных лікаў, складзеных з чатырох дадзеных лічбаў так, каб усе лічбы былі рознымі, роўна колькасці перастановак з чатырох элементаў: $P_4=4!=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$

Прыклад 1. Вылічыце: а) $5!-4!$; б) $\frac{12!}{10!}$.

Рашэнне.

а) $5!-4!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5-1\cdot2\cdot3\cdot4=120-24=96;$

б) $\frac{12!}{10!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}=11\cdot12=132.$

Прыклад 2. Колькі існуе прагнозаў размеркавання трох каманд на тры прызавыя месцы?

Рашэнне.

Паколькі кожны спосаб будзе адрознівацца ад іншага толькі парадкам размяшчэння каманд на п'едэстале, то колькасць такіх спосабаў роўна колькасці перастановак з трох элементаў: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Адказ: 6 прагнозаў.

Прыклад 3. Колькімі спосабамі 6 чалавек могуць сесці ў рад на 6 крэслаў?

Рашэнне.

Паколькі кожны са спосабаў будзе адрознівацца ад іншага толькі парадкам размяшчэння элементаў, то колькасць спосабаў рассаджвання будзе роўна колькасці перастановак з 6 элементаў. Па формуле колькасці перастановак з n элементаў атрымаем:

$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ спосабаў.

Прыклад 4. Колькімі спосабамі можна скласці расклад на адзін дзень з шасці ўрокаў па шасці розных прадметах, калі адзін з прадметаў — матэматыка — павінен быць першым урокам?

Рашэнне.

Паколькі першы ўрок павінен быць па прадмеце матэматыка, то застаецца скласці расклад на астатнія 5 урокаў па 5 прадметах. Кожны з раскладаў будзе адрознівацца ад іншага толькі парадкам вучэбных прадметаў, таму іх колькасць будзе роўна колькасці перастановак з 5 элементаў. Па формуле колькасці перастановак з n элементаў атрымаем: $P_5 = 5! = 120$ спосабаў скласці расклад.

У практычных задачах часта бывае трэба падлічыць колькасць набораў, якія складаюцца з m элементаў, выбраных з n розных элементаў гэтага віду. Напрыклад, разгледзім задачу: колькі розных трохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 1, 3, 5, 6, 8 так, каб усе лічбы былі рознымі?

Рашэнне.

На першае месца ў ліку можна паставіць любую з пяці лічбаў, яе можна выбраць пяццю спосабамі.

На другое — любую з чатырох лічбаў, што засталіся, г. зн. другую лічбу можна выбраць чатырма спосабамі.

На трэцяе — любую з трох лічбаў, што засталіся, трэцюю лічбу можна выбраць трыма спосабамі.

Па правіле здабытку атрымаем, што з лічбаў 1, 3, 5, 6, 8 можна скласці $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ розных трохзначных лікаў так, каб усе лічбы былі рознымі.

У гэтым выпадку гавораць, што разглядаюцца размяшчэнні з пяці элементаў па тры.

Размяшчэннямі з n розных элементаў па m называюцца наборы, кожны з якіх змяшчае m элементаў з n, узятых у пэўным парадку.

Размяшчэнні з n розных элементаў па m адрозніваюцца адно ад аднаго элементамі або парадкам іх размяшчэння.

Колькасць усіх размяшчэнняў з n элементаў па m абазначаецца A_n^m (ад фр. слова *arrangent* — размяшчэнне, прывядзенне ў парадак) і чытаецца «колькасць размяшчэнняў з n розных элементаў па m».

Выведзем формулу для падліку колькасці ўсіх размяшчэнняў з n розных элементаў па m. Выбар першага элемента можна ажыццявіць n спосабамі (на першае месца можна паставіць любы з гэтых n элементаў). Пасля выбару першага элемента другі элемент можна выбраць $(n-1)$ спосабам (на другое месца можна паставіць любы з $(n-1)$ элементаў, што засталіся). Трэці элемент можна выбраць $(n-2)$ спосабамі і г. д. Нарэшце, m-ы элемент можна выбраць $(n-(m-1)) = (n-m+1)$ спосабам.

Па правіле здабытку атрымаем, што m элементаў з n можна выбраць $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$ спосабамі.

Значыць, колькасць усіх размяшчэнняў з n розных элементаў па m можна вылічыць па формуле $A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$.

Гэту формулу можна пераўтварыць.

Памножым і падзелім здабытак

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)$$

на $(n-m)!$ і атрымаем:

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m)!}{(n-m)!}.$$

У лічніку дробу выраз $(n-m)!$ заменім на здабытак $(n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Тады

$$A_n^m = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) \cdot (n-m) \cdot (n-m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{(n-m)!}.$$

Лічнік атрыманага дробу ўяўляе сабой здабытак усіх натуральных лікаў ад 1 да n, г. зн. $n!$. Значыць, $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

Такім чынам, атрымалі формулу для вылічэння колькасці размяшчэнняў з n розных элементаў па m пры $m < n$.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

У разгледжанай задачы колькасць усіх магчымых трохзначных лікаў, складзеных з пяці дадзеных лічбаў, роўна колькасці размяшчэнняў з пяці элементаў па тры:

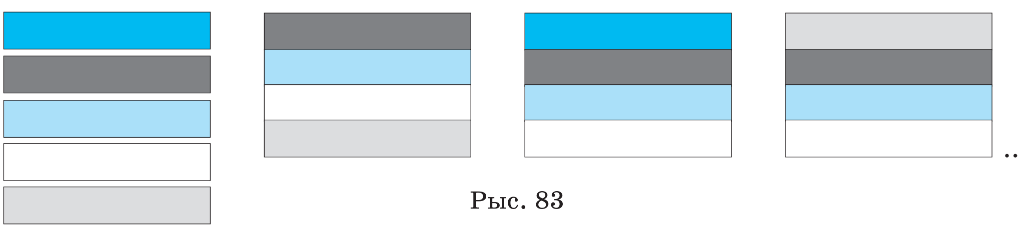
$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Прыклад 5. Колькі розных чатырохкаляровых сцяжкоў можна скласці з пяці розных гарызантальных каляровых палос?

Рашэнне.

Паколькі розныя сцяжкі будуць адрозніваца адзін ад аднаго або колерам палос, або парадкам размяшчэння палос (рыс. 83), то колькасць усіх чатырохкаляровых сцяжкоў з пяці розных каляровых палос роўна колькасці размяшчэнняў з пяці элементаў па чатыры:

$$A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$



Рыс. 83

Прыклад 6. Студэнтам трэба здаць 5 экзаменаў за 11 дзён сесіі. Колькі розных раскладаў экзаменаў можна скласці?

Рашэнне.

Паколькі трэба выбраць пяць дзён для здачы экзаменаў з 11, то кожны расклад экзаменаў адрозніваецца ад іншага выбранымі днямі і парадкам дысцыплін, таму трэба знайсці колькасць размяшчэнняў з 11 па 5.

$$A_{11}^5 = \frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 55\,440.$$

Прыклад 7. Колькі розных чатырохкаляровых сцяжкоў можна скласці з пяці розных гарызантальных каляровых палос, калі пры гэтым дзве з іх (сіняя і чырвоная) павінны быць побач?

Рашэнне.

Паколькі сіняя і чырвоная палосы павінны быць побач (суседзі), то гэту пару будзем разглядаць як адзін элемент («адзін колер»). Значыць, можна разглядаць сцяжкі, якія маюць не чатыры, а тры каляровыя палосы, і выкарыстоўваць ужо не 5, а 4 колеры. Такім чынам, трэба знайсці, колькі розных трохкаляровых сцяжкоў атрымаецца з чатырох розных гарызантальных каляровых палос. Гэта колькасць роўна колькасці размяшчэнняў з чатырох элементаў па тры: $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1} = 2\cdot3\cdot4 = 24.$

Сярод гэтых сцяжкоў будуць такія, у якіх няма сіняга і чырвонага колераў, іх колькасць роўна $P_3 = 6$. Аднімем іх: $24 - 6 = 18$.

Паколькі ў сцяжку як чырвоны колер можа ісці за сінім, так і сіні колер можа ісці за чырвоным, то атрыманую колькасць спосабаў трэба падвоіць. Такім чынам, колькасць розных сцяжкоў будзе роўна: $18\cdot2 = 36$.

32.1. Вылічыце: а) $\frac{15!}{13!}$; б) $6! - 5!$; в) $4!\cdot3!$; г) $\frac{5!}{8!}$.

32.2. Колькі розных трохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 3, 5, 7 так, каб усе лічбы ўдзельнічалі ў запісе кожнага ліку?

32.3. Колькімі спосабамі могуць размясціцца ў турнірнай табліцы 10 футбольных каманд, калі вядома, што ніякія дзве каманды не набралі роўнай колькасці ачкоў?

32.4. Колькі розных «слоў» можна скласці са слова «функцыя», перастаўляючы літары так, каб літара «ф» заставалася на першым месцы?

32.5. Колькі розных чатырохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 1, 3, 5, 0 так, каб усе лічбы ўдзельнічалі ў запісе?

32.6. Колькі розных «слоў» можна скласці са слова «перыяд», перастаўляючы літары так, каб галосныя стаялі побач?

32.7. Колькі розных «слоў» можна скласці са слова «прозвішча», перастаўляючы літары так, каб галосныя не стаялі побач?

32.8. Колькімі спосабамі можна расставіць на паліцы 10 розных кніг, калі сярод іх 3 даведнікі павінны стаяць побач?

32.9. Колькімі спосабамі можна выбраць 3 кнігі для прызоў за першае, другое і трэцяе месца ў алімпіядзе з 10 розных кніг?

32.10. Колькімі спосабамі можна выбраць старшыню, сакратара і аднаго члена журы з сямнаццаці навучэнцаў класа?

32.11. Колькі няўдалых спроб можна зрабіць, каб адкрыць замок, калі код змяшчае 4 лічбы з 10, пры гэтым лічбы не могуць паўтарацца?

32.12. Колькі можна скласці розных цотных пяцізначных нумароў з лічбаў 2, 3, 5, 7, 9, 1 (лічбы не паўтараюцца)?

32.13. Колькі розных чатырохкаляровых сцяжкоў можна атрымаць з шасці розных гарызантальных каляровых палос, калі пры гэтым дзве з іх (сіняя і чырвоная) не павінны быць побач?

§ 33. Спалучэнні. Рашэнне камбінаторных задач

Разгледзім дзве задачы.

Задача 1. Колькімі спосабамі можна выбраць траіх дзяжурных: дзяжурнага на першы паверх, на другі і на трэці — з 20 чалавек у класе?

Рашэнне. Паколькі кожны варыянт **адрозніваецца** ад іншага **або элементамі** (навучэнцамі), **або парадкам** іх размяшчэння (для траіх выбраных дзяжурных мае значэнне яшчэ выбар паверха), то колькасць спосабаў роўна колькасці размяшчэнняў з 20 элементаў па 3:

$$A_{20}^3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} =$$

$= 18 \cdot 19 \cdot 20 = 6840$ спосабаў.

Задача 2. Колькімі спосабамі можна выбраць траіх дзяжурных з 20 чалавек у класе?

Рашэнне. У гэтай задачы **парадак** выбару дзяжурных **не мае значэння**, таму колькасць размяшчэнняў з 20 элементаў па 3 $\left(A_{20}^3\right)$ трэба паменшыць у столькі разоў, колькімі спосабамі можна переставіць гэтыя 3 элементы (у P_3 разоў). Тады атрымаем:

$$\frac{A_{20}^3}{P_3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1140 \text{ спосабаў.}$$

У гэтым выпадку гавораць, што разглядаюцца спалучэнні з 20 элементаў па 3.

Спалучэннямі з n розных элементаў па m называюцца наборы, кожны з якіх змяшчае m элементаў з n.

Спалучэнні з n розных элементаў па m адрозніваюцца адно ад аднаго толькі элементамі. Парадак элементаў не ўлічваецца.

Колькасць усіх спалучэнняў з n элементаў па m абазначаецца C_n^m (ад фр. *combination* — спалучэнне).

Колькасць усіх спалучэнняў з n розных элементаў па m можна вылічыць па формуле $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$.

Пераўтворым гэту формулу, памножыўшы лічнік і назоўнік дробу на $(n-m)!$, і атрымаем: $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)!}{m!(n-m)!}$.

У лічніку дробу выраз $(n-m)!$ заменім на здабытак $(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$. Тады

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot(n-m-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{m!(n-m)!}.$$

Лічнік атрыманага дробу ўяўляе сабой здабытак усіх натуральных лікаў ад 1 да n, г. зн. $n!$. Значыць, $C_n^m = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

Прыклад 1. Колькімі спосабамі можна скласці набор з трох рознакаляровых шарыкаў, калі ёсць шарыкі пяці розных колераў?

Рашэнне.

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Паколькі спосабы выбару адрозніваюцца толькі элементамі і парадак іх размяшчэння ў наборы не істотны, то разглядаюцца спалучэнні з 5 элементаў па 3. Колькасць спалучэнняў вылічым па формуле: $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!2!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2} = 10$.

Адказ: 10.

Прыклад 2. Колькімі спосабамі можна выбраць 6 школьнікаў з 12 для ўдзелу ў першым этапе квэсту?

Рашэнне.

Паколькі розныя спосабы выбару каманды з 6 школьнікаў адрозніваюцца толькі элементамі, парадак не істотны, то колькасць усіх каманд роўна колькасці спалучэнняў з 12 элементаў па 6: $C_{12}^6 = \dfrac{12!}{6!(12-6)!} = \dfrac{12!}{6!6!} = 924$.

Адказ: 924 спосабамі.

Прыклад 3. У класе вучацца 25 чалавек. З іх 12 дзяўчынак. Для віншавання ветэранаў трэба выбраць трох хлопчыкаў і дваіх дзяўчынак. Колькімі спосабамі гэта можна зрабіць?

Рашэнне.

Паколькі ў класе 25 чалавек, сярод якіх 12 дзяўчынак, то ў класе вучацца 13 хлопчыкаў.

Паколькі розныя спосабы выбару трох хлопчыкаў з 13 адрозніваюцца толькі элементамі, парадак не істотны, то колькасць усіх спосабаў выбару хлопчыкаў роўна колькасці спалучэнняў з 13 элементаў па 3: $C_{13}^3 = \frac{13!}{3!(13-3)!} = \frac{13!}{3!10!} = \frac{11 \cdot 12 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 286.$

Колькасць усіх спосабаў выбару дваіх дзяўчынак з 12 роўна колькасці спалучэнняў з 12 элементаў па 2:

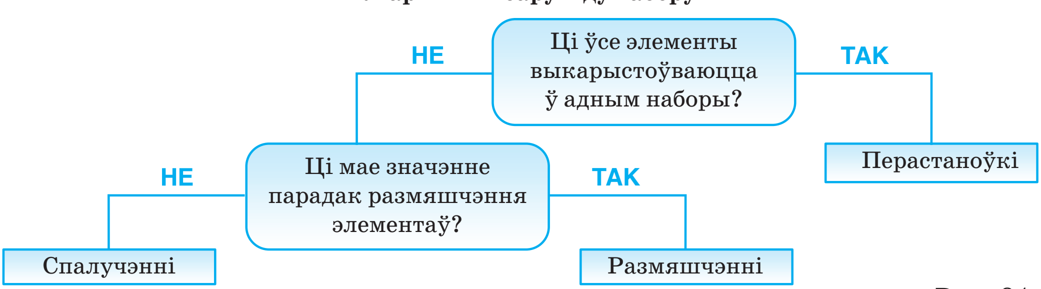
$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!(12-2)!} = \frac{12!}{2!10!} = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66.$$

Паколькі пры кожным выбары хлопчыка дзяўчынак можна выбраць C_{12}^2 спосабамі, то па правіле здабытку трох хлопчыкаў і дваіх дзяўчынак для віншавання можна выбраць $C_{13}^3 \cdot C_{12}^2 = 286 \cdot 66 = 18\,876$ спосабамі.

Адказ: 18 876 спосабамі.

Камбінаторныя задачы мы рашалі з дапамогай правілаў вылічэння колькасці перастановак, размяшчэнняў, спалучэнняў. Іх можна аб'яднаць у адзін клас — элементарных задач — і карыстацца наступным алгарытмам выбару віду набору (рыс. 84) (наборы, якія складаюцца з элементаў, што вызначаюцца ўмовай задачы, могуць яшчэ называцца камбінацыямі, спосабамі, злучэннямі).

Алгарытм выбару віду набору



Рыс. 84

Разгледзім прыклады карыстання алгарытмам пры рашэнні камбінаторных задач.

Прыклад 4. Колькі розных чатырохзначных лікаў можна скласці з лічбаў 1, 7, 8, 9 так, каб усе лічбы ўдзельнічалі ў запісе?

Рашэнне. У адпаведнасці з алгарытмам праверым, ці ўсе элементы ўдзельнічаюць у адным наборы. Так, усе, паколькі ўсяго лічбаў чатыры, і ўсе яны выкарыстоўваюцца ў запісе ліку. Значыць, розныя чатырохзначныя лікі ўяўляюць сабой перастаноўкі з чатырох элементаў. Прыменім формулу колькасці перастановак з n элементаў, атрымаем: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \times$ $\times\ 3 \cdot 4 = 24$.

Адказ: 24.

Прыклад 5. Колькімі спосабамі могуць размясціцца ў турнірнай табліцы 6 гандбольных каманд, калі вядома, што ніякія дзве каманды не набралі аднолькавай колькасці ачкоў?

Рашэнне. У адпаведнасці з алгарытмам праверым, ці ўсе элементы ўдзельнічаюць у адным наборы. Так, усе, паколькі кожны са спосабаў размяшчэння каманд у табліцы змяшчае ўсе 6 каманд і будзе адрозніваецца ад іншага толькі парадкам размяшчэння каманд у турнірнай табліцы. Колькасць спосабаў размяшчэння каманд будзе роўна колькасці перастановак з 6 элементаў. Па формуле колькасці перастановак з n элементаў атрымаем: $P_6 = 6! = 720$.

Адказ: 720 спосабамі.

Прыклад 6. У карцінную галерэю паступіла 9 новых карцін. Колькімі спосабамі можна выбраць чатыры з іх для выставы і змясціць іх на 4 месцы ў зале?

Рашэнне. У адпаведнасці з алгарытмам праверым, ці ўсе элементы ўдзельнічаюць у адным наборы. Паколькі ўсяго карцін 9, а выбраць трэба 4, то ў адным наборы выкарыстоўваюцца не ўсе дадзеныя элементы. Значыць, разглядаемыя камбінацыі — гэта спалучэнні або размяшчэнні. Паколькі вызначаны месцы размяшчэння карцін, то парадак размяшчэння элементаў у наборы мае значэнне. Такім чынам, для адказу на пытанне задачы прыменім формулу колькасці размяшчэнняў з 9 элементаў па 4:

$$A_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024.$$

Адказ: 3024 спосабамі.

Прыклад 7. Студэнты адной з груп вывучаюць 9 дысцыплін, па 3 пары штодзень. Колькімі спосабамі можна скласці расклад на адзін дзень?

Рашэнне. Паколькі ў раскладзе на адзін дзень будзе 3 дысцыпліны з 9, то па алгарытме разглядаемыя камбінацыі — гэта не перастаноўкі, а паколькі мае значэнне парадак пар у раскладзе, то колькасць спосабаў іх выбару роўна колькасці размяшчэнняў з 9 элементаў па 3: $A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Адказ: 504 спосабамі.

Прыклад 8. Колькімі спосабамі можна скласці каманду з чатырох чалавек для спаборніцтваў па плаванні з 7 плыўцоў?

Рашэнне.

Паколькі розныя каманды ўключаюць 4 плыўцы з сямі (не ўсе плыўцы будуць у адной камандзе) і каманды плыўцоў адрозніваюцца толькі элементамі (парадак выбару не мае значэння), то ў адпаведнасці з алгарытмам разглядаюцца спалучэнні з 7 элементаў па 4.

Колькасць спалучэнняў вылічым па формуле:

$$C_7^4 = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Адказ: 35 спосабамі.

Прыклад 9. У вакальным гуртку займаюцца 10 чалавек. Неабходна выбраць двух салістаў. Колькімі спосабамі гэта можна зрабіць?

Рашэнне.

Паколькі ў наборы будзе 2 элементы з 10, то па алгарытме разглядаемыя камбінацыі — гэта не перастаноўкі, а паколькі не мае значэння парадак выбару салістаў, то колькасць спосабаў іх выбару роўна колькасці спалучэнняў з 10 элементаў па 2: $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$.

Адказ: 45 спосабамі.

33.1. Колькі набораў з 5 піражных можна скласці з 7 відаў піражных?

33.2. У класе 25 навучэнцаў. Колькімі спосабамі можна выбраць з іх чатырох дэлегатаў на канферэнцыю?

33.3. З двухсот заявак, пададзеных для ўдзелу ў міжнародным кінафестывалі, арганізатарам трэба адабраць 30 фільмаў для конкурснага паказу. Колькімі спосабамі гэта можна зрабіць?

33.4. Колькі існуе рознастаронніх трохвугольнікаў, даўжыні старон якіх прымаюць наступныя значэнні: 4, 5, 6, 7?

33.5. У падраздзяленні 60 салдат і 5 афіцэраў. Колькімі спосабамі можна выбраць сярод іх чатырох салдат і двух афіцэраў для нясення варты?

33.6. Колькімі спосабамі 8 чалавек могуць сесці ў рад на 8 крэслаў?

33.7. Колькімі спосабамі з 8 удзельнікаў нарады можна выбраць старшыню і сакратара?

33.8. Колькімі спосабамі з 8 супрацоўнікаў кампаніі можна выбраць двух чалавек для службовай камандзіроўкі?

33.9. У краме пакупніку прапануюць 12 відаў кашуль і 10 відаў штаноў патрэбнага памеру. Колькімі спосабамі ён можа выбраць з іх 3 кашулі і 2 штаноў?

33.10. Шасцёра сяброў прыйшлі ў кінатэатр. Усе іх месцы размешчаны запар у адным радзе. Колькімі спосабамі яны могуць сесці так, каб Оля і Коля сядзелі побач?

33.11. Колькі розных акордаў можна ўзяць з дзесяці выбраных клавіш раяля, калі кожны акорд можа ўтрымліваць ад трох да дзесяці гукаў?

33.12. Колькі пяцізначных лікаў утрымліваюць у сваім запісе хаця б адзін нуль?

§ 34. Метад матэматычнай індукцыі

Сцверджанні тыпу «Для кожнага натуральнага n...» можна даказваць з дапамогай прымянення асаблівага метаду разважання, які называецца метадам матэматычнай індукцыі.

У аснове гэтага метаду ляжыць прынцып матэматычнай індукцыі (аксіёма):

калі сцверджанне $A(n)$, у якім n — натуральны лік, праўдзівае для $n = 1$, і з таго, што яно праўдзівае для $n = k$, вынікае, што яно праўдзівае для $n = k + 1$, то яно праўдзівае для любога натуральнага n.

Метад матэматычнай індукцыі, які прымяняецца для сцверджанняў тыпу «Для кожнага натуральнага n...», заключаецца ў:

1) праверцы базы індукцыі (пры $n = 1$ $A(1)$ — правільна);

2) індуктыўным пераходзе або кроку індукцыі: калі правільнае сцверджанне з нумарам k, то правільнае сцверджанне з нумарам $k + 1$ $(A(k) \Rightarrow A(k + 1))$;

3) вывадзе: на падставе прынцыпу матэматычнай індукцыі сцверджанне правільнае для любога натуральнага n.

Заўвага 1

Часам зручны індуктыўны спуск: калі сцверджанне з нумарам n, $n > 1$, можна звесці да аднаго або некалькіх сцверджанняў з меншымі нумарамі, то сцверджанне правільнае для ўсіх n.

Заўвага 2

Часам для доказу наступнага сцверджання трэба абапірацца на ўсе папярэднія сцверджанні, тады індуктыўны пераход мае наступны выгляд: «Калі правільныя ўсе сцверджанні з нумарамі ад 1 да n, то правільнае сцверджанне з нумарам $n + 1$».

Алгарытм прымянення метаду матэматычнай індукцыі

① Вылучыць ва ўмове задачы сцверджанне $A(n)$.

② Сфармуляваць сцверджанне $A(1)$ і праверыць яго праўдзівасць.

③ Запісаць сцверджанні $A(k)$ і $A(k+1)$.

④ Паказаць вынікание $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

⑤ Зрабіць выснову.

Прыклад 1. Дакажыце, што $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$, $n \in \boldsymbol{N}$.

Доказ.

1. Сцверджанне $A(n)$: сума кубоў n натуральных лікаў вылічваецца па формуле $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. «Сума», якая складаецца з аднаго складаемага, вылічваецца па формуле $\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$.

Гэта сцверджанне правільнае, паколькі $1^3 = \left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2$, $1 = 1$.

3. $A(k)$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

$A(k+1)$: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$.

4. Пакажам, што $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Абазначым $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = S_k$, тады $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = S_k + (k+1)^3 =$

$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2$ — правільна.

5. Выснова: на падставе прынцыпу матэматычнай індукцыі сцверджанне $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ правільнае для любога натуральнага n.

Прыклад 2. Дакажыце, што сума кубоў трох паслядоўных натуральных лікаў дзеліцца на 9.

Доказ.

① $A(n)\colon n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, дзе $n\in \boldsymbol{N}$.

② $A(1)$: $n=1$, $1^3+2^3+3^3=36$ дзеліцца на 9.

③ $A(k)\colon k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ дзеліцца на 9,

$A(k+1)\colon (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ дзеліцца на 9.

④ Калі $k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$ дзеліцца на 9, то $(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$ дзеліцца на 9.

$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3+k^3-k^3=k^3+(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3-k^3=$

$=\left(k^3+(k+1)^3+(k+2)^3\right)+\left(9k^2+27k+27\right)$ — дзеліцца на 9, паколькі першае складаемае сумы дзеліцца на 9 па меркаванні, а другое — змяшчае множнік 9.

⑤ Выснова: на падставе прынцыпу матэматычнай індукцыі сцверджанне правільнае для любога натуральнага n.

Прыклад 3. Дакажыце, што 7^n-1 дзеліцца на 6 пры любым натуральным n.

Доказ.

$n=1$, 7^1-1 дзеліцца на 6.

Пакажам, што калі 7^k-1 дзеліцца на 6, то і $7^{k+1}-1$ дзеліцца на 6.

$7^{k+1}-1=(6+1)\cdot 7^k-1=\left(7^k-1\right)+6\cdot 7^k$ — дзеліцца на 6, паколькі першае складаемае сумы дзеліцца на 6 па меркаванні, а другое — змяшчае множнік 6.

Выснова: на падставе прынцыпу матэматычнай індукцыі сцверджанне правільнае для любога натуральнага n.

Прыклад 4. Даказаць, што:

$$(P_1+P_2+\ldots+P_n)^2=P_1^2+P_2^2+\ldots+P_n^2+2P_1P_2+\ldots+$$

$$+2P_1P_n+2P_2P_3+\ldots+2P_2P_n+2P_3P_4+\ldots+2P_3P_n+\ldots+2P_{n-1}P_n.$$

Доказ.
Выкарыстаем метад матэматычнай індукцыі.

1) Пры $n = 2$ маем $(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + 2P_1P_2 + P_2^2$ — правільна.

2) Будзем меркаваць, што сцверджанне правільнае для $n = k$, г. зн.

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_k)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_k^2 + 2P_1P_2 + \ldots +$$
$$+ 2P_1P_k + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_k + \ldots + 2P_{k-1}P_k.$$

3) Дакажам, што яно правільнае для $n = k + 1$, г. зн.

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_{k+1})^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{k+1}^2 + 2P_1P_2 + \ldots +$$
$$+ 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_{k+1} + \ldots + 2P_kP_{k+1}.$$

Разгледзім

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_{k+1})^2 = ((P_1 + P_2 + \ldots + P_k) + P_{k+1})^2 =$$
$$= (P_1 + P_2 + \ldots + P_k)^2 + 2(P_1 + P_2 + \ldots + P_k) \cdot P_{k+1} + P_{k+1}^2 =$$
$$= (P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_k^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_k + \ldots + 2P_{k-1}P_k) +$$
$$+ 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_{k+1} + \ldots + 2P_kP_{k+1} + P_{k+1}^2 =$$
$$= P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_{k+1}^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_{k+1} + 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_{k+1} +$$
$$+ \ldots + 2P_kP_{k+1}.$$

Такім чынам, формула

$$(P_1 + P_2 + \ldots + P_n)^2 = P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 + 2P_1P_2 + \ldots + 2P_1P_n +$$
$$+ 2P_2P_3 + \ldots + 2P_2P_n + 2P_3P_4 + \ldots + P_3P_n + \ldots + 2P_{n-1}P_n$$

правільная для любога $n \in \boldsymbol{N}$.

Прыклад: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

34.1. Калі A_n мае выгляд $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, то A_{k+1}:

а) $1 + 2 + 3 + \ldots + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+1)}{2}$;

б) $1 + 2 + 3 + \ldots + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{3}$;

в) $1+2+3+\ldots+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$;

г) $2+3+4+\ldots+k+1=\frac{(k+1)(k+2)}{3}$.

Выберыце правільны адказ.

34.2. Калі A_n мае выгляд $\left(9^{n+1}-8n-9\right):16$, то A_{k+1}:

а) $\left(9^{k+1}-8k-8\right):16$;

б) $\left(9^{k+2}-8k+1\right):16$;

в) $\left(9^{k+2}-8k-17\right):16$;

г) $\left(9^{k+2}-8k+17\right):16$.

Выберыце правільны адказ.

34.3. Калі A_n мае выгляд $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$, то A_{k+1}:

а) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+2)}{3}$;

б) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2k)^2=\frac{(k+1)(2k+2)(2k+3)}{3}$;

в) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(2k)(2k+2)}{3}$;

г) $1^1+3^2+5^2+\ldots+(2k+1)^2=\frac{(k+1)(2k+1)(2k+3)}{3}$.

Выберыце правільны адказ.

34.4. Калі A_n мае выгляд $\left(n^3+5n\right):6$, то A_{k+1}:

а) $\left(k^3+5k+1\right):6$;

б) $\left(k^3+5k+2\right):6$;

в) $\left((k+1)^3+5(k+1)\right):6$;

г) $\left((k+1)^3+5k+1\right):6$.

Выберыце правільны адказ.

34.5. Калі A_n мае выгляд $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$, то A_{k+1}:

а) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=k^2\left(2k^2+1\right)$;

б) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=(k+1)^2\left(2k^2+1\right)$;

в) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k)^3=(k+1)^2\left(2k^2+2\right)$;

г) $1^3+3^3+5^3+\ldots+(2k+1)^3=(k+1)^2\left(2(k+1)^2+1\right)$.

Выберыце правільны адказ.

34.6. Калі A_n мае выгляд $\left(4^n + 15n - 1\right) \vdots 9$, то A_{k+1}:

а) $\left(4^{k+1} + 15k + 1\right) \vdots 9$; б) $\left(4^{k+2} + 15k + 14\right) \vdots 9$;

в) $\left(4^{k+2} + 15k + 2\right) \vdots 9$; г) $\left(4^{k+2} + 15k + 11\right) \vdots 9$.

Выберыце правільны адказ.

34.7. Калі A_n мае выгляд

$$1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n(n+1)}{2},$$

то A_{k+1}:

а) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot k^2 + 1 = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

б) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot k^2 + 1 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

в) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot \left(k^2 + 1\right) = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$;

г) $1^1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^k \cdot (k+1)^2 = \frac{(-1)^{k+2} \cdot (k+1)(k+2)}{2}$.

Выберыце правільны адказ.

34.8. Калі A_n мае выгляд $\left(5^{2n+1} + 1\right) \vdots 6$, то A_{k+1}:

а) $\left(5^{k+2} + 2\right) \vdots 6$; б) $\left(5^{2k+2} + 2\right) \vdots 6$;

в) $\left(5^{2k+2} + 1\right) \vdots 6$; г) $\left(5^{2k+3} + 1\right) \vdots 6$.

Выберыце правільны адказ.

34.9. Калі A_n мае выгляд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^n - 1} < n$ для $n > 2$, то A_{k+1}:

а) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$;

б) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k - 1} < k$;

в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 2^k - 1} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$;

г) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2 \cdot 2^k - 2} + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < k + 1$.

Выберыце правільны адказ.

34.10. Калі A_n мае выгляд $2^n > 2n + 7$, то A_{k+1}:

а) $2 \cdot 2^k > 2k + 8$; б) $2^{k+1} > 2k + 8$;

в) $2^{k+1} > 2k + 9$; г) $2 \cdot 2^{k+1} > 2k + 9$.

Выберыце правільны адказ.

34.11. Дакажыце роўнасць:

а) $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}$;

б) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n + 1) = n(n + 1)^2$;

в) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n+2}$;

г) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2 + \ldots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$;

д) $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}$;

е) $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

ж) $\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1(2n+3))}$;

з) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$;

і) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

к) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n + 1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$;

л) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$;

м) $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{n^{n+1} - 1}{x - 1}$, дзе $x \neq 1$.

34.12. Дакажыце сцверджанне:

а) $(6^{2n} - 1) \vdots 35$; б) $(4^n + 15n - 1) \vdots 9$;

в) $(2^{5a+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}) \vdots 17$; г) $(3^{n+2} - 8n - 9) \vdots 64$;

д) $(2^{n+3} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}) \vdots 37$; е) $(7^{n+2} + 8^{2n+1}) \vdots 57$;

ж) $(2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4) \vdots 25$; з) $(3^{n+2} \cdot 5^{2n} - 3^{n+2} \cdot 2^{2n}) \vdots 1053$.

§ 35. Бiном Ньютана

Пры любым натуральным n справядлiвая формула

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

якая называецца формулай Ньютана ў гонар англiйскага фiзiка i матэматыка Iсака Ньютана (1642—1727).

Правую частку гэтай формулы называюць раскладаннем ступенi бiнома.

Доказ.

Доказ правядзём метадам матэматычнай iндукцыi.

Праверым справядлiвасць формулы пры $n = 1$.

$(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + 1a^0 b^1 = a + b$, сцверджанне правiльнае.

Пакажам, што з $A(k)$ вынiкае $A(k+1)$, дзе

$A(k)$: $(a+b)^k = C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k$.

Маем: $(a+b)^{k+1} = (a+b)^k (a+b) =$

$$= \left(C_k^0 a^k b^0 + C_k^1 a^{k-1} b^1 + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k a^0 b^k\right) \cdot (a+b) =$$

$$= C_k^0 a^{k+1} b^0 + \left(C_k^1 + C_k^0\right) a^k b^1 + \ldots + \left(C_k^m + C_k^{m+1}\right) a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_k^k a^0 b^{k+1} =$$

$$= C_{k+1}^0 a^{k+1} b^0 + C_{k+1}^1 a^k b^1 + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m-1} b^{m+1} + \ldots + C_{k+1}^{k+1} a^0 b^{k+1}.$$

На падставе прынцыпу матэматычнай iндукцыi сцверджанне правiльнае для любога натуральнага n.

Трохвугольнiк Паскаля

Каэфiцыенты ў раскладаннi бiнома Ньютана можна вылiчыць, выкарыстаўшы трохвугольнiк Паскаля.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 **3** **3** 1
4	1 4 **6** 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 **15** **20** 15 6 1
7	1 7 21 **35** 35 21 7 1

Каб знайсці лік у якімсьці радку табліцы, дастаткова знайсці суму двух лікаў, што стаяць у папярэднім радку над гэтым лікам справа і злева.

Напрыклад, для вызначэння каэфіцыента ў чацвёртым радку выканалі складанне: $6 = 3 + 3$; у сёмым радку — $35 = 15 + 20$.

Прыклад 1. Знайдзіце раскладанне ступені бінома $(a + b)^6$.

Рашэнне.

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Каэфіцыенты ў раскладанні ўзяты з 6-га радка трохвугольніка Паскаля. Паказчык ступені a памяншаецца ад 6 да 0, а паказчык ступені b павялічваецца ад 0 да 6.

Асноўныя вынікі з формулы бінома Ньютана

1. У раскладанні бінома Ньютана змяшчаецца $n + 1$ складаемае.

Напрыклад, колькасць складаемых у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^{11}$ роўна $n + 1 = 11 + 1 = 12$.

2. У формуле Ньютана паказчык a спадае ад n да 0, а паказчык b нарастае ад 0 да n.

3. Бінамныя каэфіцыенты, роўнааддаленыя ад канцоў раскладання, роўныя.

Прыклад 2. Сёмы бінамны каэфіцыент у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^k$ роўны m, знайдзіце нумар члена раскладання з такім жа каэфіцыентам.

Рашэнне.

Сёмы бінамны каэфіцыент у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^k$ роўны m, тады ёсць яшчэ адзін член з такім жа каэфіцыентам у гэтым раскладанні.

Гэты член аддалены ад канца раскладання на столькі ж, на колькі член з каэфіцыентам m аддалены ад пачатку раскладання, яго нумар $k + 1 - 7 = k - 6$. Значыць, шуканы член раскладання мае нумар $k - 6$ (лічачы ад нулявога члена).

4. Бінамныя каэфіцыенты спачатку нарастаюць, а затым спадаюць. Калі паказчык ступені бінома цотны, то бінамны каэфіцыент сярэдняга складаемага найбольшы, калі паказчык ступені бінома няцотны, то бінамныя каэфіцыенты двух сярэдніх складаемых роўныя паміж сабой і з'яўляюцца найбольшымі.

Прыклад 3. Знайдзіце нумар члена з найбольшым біномным каэфіцыентам у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^{2015}$.

Рашэнне.

Паколькі лік членаў раскладання цотны, то найбольшы бінромны каэфіцыент у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^{2015}$ будзе ў двух сярэдніх членаў раскладання. Вызначым іх нумары: паколькі ўсяго членаў у раскладанні $2015 + 1 = 2016$, то сярэднімі членамі будуць члены з нумарамі 1008 і 1009 (1007 членаў да 1008-га і 1007 членаў пасля 1009-га).

5. Сума паказчыкаў ступеней a і b у раскладанні бінома Ньютана роўна ступені бінома.

Прыклад 4. Знайдзіце суму ўсіх каэфіцыентаў членаў мнагачлена ў раскладанні $(14x^{20} - 13x)^{44}$.

Рашэнне. Кожны член мнагачлена змяшчае ступень зменнай і каэфіцыент, роўны значэнню гэтага члена пры $x = 1$. Значыць, шуканая сума каэфіцыентаў будзе роўна значэнню мнагачлена пры $x = 1$, г. зн.

$$(14 \cdot 1^{20} - 13 \cdot 1)^{44} = 1.$$

6. Агульны член раскладання, абазначым яго T_m, мае выгляд

$$T_m = C_n^m a_n^{n-m} \cdot b^m.$$

Прыклад 5. Знайдзіце дзявяты член раскладання $\left(a^2 + 1\right)^{12}$ бінома Ньютана.

Рашэнне. Паколькі $T_m = C_n^m a_n^{n-m} b^m$, то

$$T_9 = C_{12}^9 a^{12-9} b^9 = C_{12}^9 a^{(12-m)\cdot 2} = 220a^{24-2m} = 220a^6.$$

Заўвага

Каб запісаць у агульным выглядзе складаемыя ў раскладанні бінома Ньютана, зручна $(m+1)$-е складаемае лічыць m-м членам. Напрыклад, пятае складаемае ў раскладанні $(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$ ёсць адначлен $15a^2b^4$, а ўлічваючы, што бінромныя каэфіцыенты пачынаюцца з ліку $C_6^0 = 1$, адначлен $15a^2b^4$ з'яўляецца чацвёртым членам гэтага раскладання.

7. ***Сума бінромных каэфіцыентаў раскладання бінома роўна*** $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

Доказ. Падставім $a = b = 1$ у формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n,$$

атрымаем $C_k^0 + C_k^1 + \ldots + C_k^k = 2^k$.

8. ***Сума бiномных каэфіцыентаў членаў раскладання бінома, якія стаяць на цотных месцах, роўна суме каэфіцыентаў членаў раскладання бінома, якія стаяць на няцотных месцах.***

Доказ. Падставім $a = 1$, $b = -1$ у формулу

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n a^0 b^n.$$

Будзем мець:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n,$$

адкуль атрымаем $C_n^0 + C_n^2 \ldots = C_n^1 + C_n^3 \ldots$.

35.1. Знайдзіце ў трохвугольніку Паскаля каэфіцыент пятага члена ў раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^8$.

35.2. З дапамогай формулы $T_5 = 70a^{n-m} b^m$ запішыце пяты член у раскладанні бінома Ньютана $(a + b)^8$.

35.3. Мнагачлен

$a^8 + 8a^7 \cdot 2 + 28a^6 \cdot 2^2 + 56a^5 \cdot 2^3 + 70a^4 \cdot 2^4 + 56a^3 \cdot 2^5 + 28a^2 \cdot 2^6 + 8a \cdot 2^7 + 2^8$

тоесна роўны:

а) $(a + 2)^7$; б) $(a + 2)^9$; в) $(a - 2)^8$; г) $(a + 2)^8$.

Выберыце правільны адказ.

35.4. Знайдзіце каэфіцыент пятага члена ў раскладанні бінома Ньютана $(a - 1)^{10}$.

35.5. Пяты член у раскладанні бінома Ньютана $(a - b)^{10}$ роўны:

а) $120a^5b^5$; б) $252\, a^5b^5$; в) $120a^8b^2$; г) $210a^6b^4$.

Выберыце правільны адказ.

35.6. Мнагачлен $a^8 - 8a^7 + 28a^6 - 56a^5 + 70a^4 - 56a^3 + 28a^2 - 8a + 1$ тоесна роўны:

а) $(a + 1)^7$; б) $(a + 1)^9$; в) $(a - 1)^8$; г) $(a + 1)^8$.

Выберыце правільны адказ.

35.7. Вызначце нумар члена раскладання $\left(\sqrt{x} - \sqrt[4]{x}\right)^{20}$, які змяшчае x^7.

35.8. Знайдзіце колькасць членаў у раскладанні бінома $(a + x)^{2k-1}$.

35.9. Вызначце нумар члена раскладання $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^6$, які не змяшчае x.

35.10. Вызначце нумар члена раскладання $\left(x - \sqrt[4]{x}\right)^{40}$, які змяшчае x^{13}.

35.11. Знайдзіце колькасць членаў у раскладанні бінома $(4a + x)^{4k-5}$.

35.12. Знайдзіце суму ўсіх каэфіцыентаў у раскладанні бінома $\left(12x^{20}-13x^{12}\right)^{144}$.

35.13. Знайдзіце суму ўсіх каэфіцыентаў членаў мнагачлена ў раскладанні $\left(14x^{20}-3x^{12}-11x^{10}\right)^{144}$.

35.14. У раскладанні $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^p$ адносіна каэфіцыента чацвёртага члена да каэфіцыента другога члена раскладання роўна $7:2$. Тады член раскладання, які змяшчае x у першай ступені, роўны:

а) $35x$; б) $84x$; в) $32x$; г) $6x$.

Выберыце правільны адказ.

35.15. Вызначце каэфіцыент пры x^{12} у раскладанні $\left(x^7+x^5+1\right)^{20}$.

Тэст 1. Уласцівасці лікавых мностваў

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце пару лікаў, якая складаецца толькі з ірацыянальных лікаў: 1) π; 0,(12); 2) −0,5; $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{3}$; π; 4) 0,8; $\sqrt{3}$; 5) −4; 0,2 (52).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Акругліце лік 547,698 да сотых.	а) 500; б) 547,7; в) 548; г) 547,70; д) 547,6.
3. Выберыце дроб, які нельга запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу: 1) $\frac{7}{50}$; 2) $\frac{31}{32}$; 3) $\frac{2}{15}$; 4) $\frac{9}{125}$; 5) $\frac{3}{160}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
4. Знайдзіце найбольшы просты двухзначны дзельнік ліку 2184.	а) 91; б) 21; в) 13; г) 24; д) 39.
5. Знайдзіце суму найменшага двухзначнага простага ліку і найбольшага простага ліку пятага дзясятка.	а) 70; б) 60; в) 49; г) 58; д) 39.
6. Знайдзіце найменшае агульнае кратнае ўсіх адназначных натуральных лікаў.	а) 2520; б) 1260; в) 5040; г) 630; д) 3780.
7. Вядома, што $\frac{2}{3}$ аднаго ліку роўны $\frac{5}{6}$ другога. Знайдзіце адносіну гэтых лікаў.	а) 5 : 2; б) 10 : 9; в) 3 : 4; г) 5 : 8; д) 5 : 4.
8. Знайдзіце значэнне выразу $\left(4\frac{2}{3}\cdot 3{,}5-3\frac{1}{2}\cdot 3{,}(6)\right):0{,}014.$	а) 2,5; б) 0,25; в) 25; г) 250; д) 2500.
9. Лік павялічылі на 60 %. Знайдзіце, на колькі працэнтаў трэба паменшыць атрыманы лік, каб атрымаць зыходны лік.	а) 37,5; б) 30; в) 40; г) 20; д) 60.
10. Знайдзіце НАД (475; 570; 741).	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
11. Знайдзіце найбольшы натуральны лік, які пры дзяленні з астачай на 19 дае дзель, роўную 43.	
12. Знайдзіце НАК $(a;\ b;\ c)$, дзе $a = 2\cdot 3^3\cdot 5$; $b = 3^2\cdot 5\cdot 7$; $c = 2^2\cdot 3\cdot 3\cdot 5^2$.	
13. Запішыце лік 968 у выглядзе сумы чатырох дадатных лікаў, прапарцыянальных лікам, адваротным дадзеным: $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ і $\frac{8}{3}$. У адказ запішыце найменшы з лікаў.	
14. Інтэрвалы руху прыгарадных аўтобусаў па трох маршрутах, якія пачынаюцца на аўтавакзале, складаюць 10, 15 і 18 мін адпаведна. Знайдзіце, колькі разоў з 7 г 10 мін да 12 г 10 мін таго ж дня на аўтавакзале адначасова сустракаюцца аўтобусы ўсіх трох маршрутаў, калі адна з такіх сустрэч адбываецца ў 10 г 25 мін.	
15. Знайдзіце значэнне выразу $\big\|\,\lvert 223^2+3\rvert-\lvert 1-224^2\rvert-\lvert -5\rvert\,\big\|$.	

Тэст 2. Пераўтварэнні рацыянальных выразаў

Умовы	Варыянты адказаў
1. Вядома, што $s-t=-5{,}2$. Выберыце выраз, значэнне якога роўна 10,4: 1) $(t-s)^2$; 2) $\frac{t-s}{2}$; 3) $2(t-s)$; 4) $s-t-5{,}2$; 5) $2(t+s)$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выканайце дзяленне адначленаў $0{,}21a^{n+1}c^7y^9$ и $7a^nc^7y^7$, дзе $n\in \boldsymbol{N}$.	а) $0{,}3\cdot ay^2$; б) $0{,}03\cdot acy^2$; в) $0{,}03\cdot a^{\frac{n+1}{n}}cy^{\frac{9}{7}}$; г) $0{,}3\cdot acy^2$; д) $0{,}03\cdot ay^2$.
3. Выканайце адніманне: $\frac{3x-9}{x-2}-\frac{x-5}{x-2}$.	а) $\frac{2x-14}{x-2}$; б) $\frac{4x-14}{x-2}$; в) 1; г) 2; д) $\frac{4x-4}{x-2}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
4. Спрасціце выраз $\frac{15a}{5-a}+\frac{6a}{a^2-25}\cdot\frac{7a+35}{3}$.	а) $\frac{29a}{5-a}$; б) $\frac{a}{a-5}$; в) 15; г) $\frac{a}{5-a}$; д) $\frac{1}{5-a}$.
5. Раскладзіце на множнікі мнагачлен $2bc+a^2-b^2-c^2$.	а) $(a-b+c)(a+b-c)$; б) $(a+b+c)(a-b-c)$; в) $a(a+b-c)$; г) $(b+c)(a-c)$; д) $(b+c)(a+b-c)$.
6. Скараціце дроб $\frac{x^3+5x^2-4x-20}{x^2+3x-10}$.	а) $\frac{(x+5)(x-2)}{x-5}$; б) -2; в) $x+2$; г) $x-2$; д) $\frac{x-5}{x+5}$.
7. Спрасціце выраз $\left(m-(1-m)^{-1}\right)\cdot\frac{\frac{m-2}{m^{-1}}+m^0}{m^2-m+1}$.	а) $m+1$; б) $1-m$; в) $m-1$; г) m; д) 1.
8. Спрасціце выраз $\left(4x^{-4}-x^{-2}+6x^{-1}-9\right):\left(2x^{-4}+x^{-3}-3x^{-2}\right)$.	а) $3x^{-2}-x^{-1}+2$; б) $2-x^{-1}+3$; в) $3x^2-x+2$; г) $-x+2$; д) $3x^2-x$.
9. Раскладзіце на множнікі выраз $\left(x^2+x+1\right)^2+3x\left(x^2+x+1\right)-18x^2$.	а) $\left(x^2-5x+1\right)\left(x^2+4x+1\right)$; б) $x^2\left(x^2+7x+1\right)$; в) $x^2\left(x^2+x+1\right)$; г) $54x^2$; д) $(x-1)^2\left(x^2+7x+1\right)$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
10. Спрасціце выраз $\left(\left(\frac{6}{n+1}-\frac{5n+30}{n^2+5n+6}\right):\frac{n-2}{n^2+3n+2}\right)^{-1}$ і знайдзіце яго значэнне пры $n = 9$.	
11. Спрасціце выраз $\left(\frac{y}{xy-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}\right):\frac{x^2+2xy+y^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ і знайдзіце яго значэнне пры $x = -\frac{1}{7}$, $y = \frac{1}{3}$.	
12. Знайдзіце значэнне выразу $16x^2+9x^{-2}+3$, калі $4x-3x^{-1}=-6$.	
13. Знайдзіце найменшае значэнне выразу $8x^2+2y^2-4xy+4x+2y-12$.	
14. Спрасціце выраз, выканаўшы пераўтварэнні: $\left(3ab^{-1}-\frac{ba^{-1}}{3}\right):\left(3ab^{-1}+\frac{ba^{-1}}{3}+0{,}5^{-1}\right):\left(\left(1-\frac{ba^{-1}}{3}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)$.	
15. Спрасціце выраз $A=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$ і знайдзіце значэнне выразу $16A$ пры $x = 0{,}(3)$.	

Тэст 3. Рацыянальныя ўраўненні

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няправільнае сцверджанне: 1) калі біквадратнае ўраўненне мае карані, то сума яго каранёў роўна нулю; 2) няпоўнае квадратнае ўраўненне можа не мець каранёў; 3) любое лінейнае ўраўненне мае адзіны корань;	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
4) калі прыведзенае квадратнае ўраўненне мае карані, то сума яго каранёў роўна другому каэфіцыенту, узятаму з процілеглым знакам; 5) калі дыскрымінант квадратнага ўраўнення роўны нулю, то яго корань можна вылічыць па формуле $x = -\frac{b}{2a}$.	
2. Выберыце ўраўненне, не раўназначнае ўраўненню $x^2 + 5 = 0$: 1) $\frac{3}{x-6} = 0$; 2) $x^2 - 7x + 13 = 0$; 3) $\lvert x - 2\rvert + 9 = 8$; 4) $\frac{x}{8} = 0$; 5) $5x - 12 = 3(x + 4) + 2x$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Рашыце ўраўненне $0{,}2\left(1{,}5x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{15} = 0{,}3x$.	а) $\frac{1}{30}$; б) 0; в) 1; г) няма каранёў; д) любы рэчаісны лік.
4. Рашыце ўраўненне $\frac{1}{2-x} - 1 = \frac{1}{x-2} - \frac{6-x}{3x^2-12}$.	а) -2; 2; б) -3; $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{2}{3}$; 3; г) 6; д) $-2\frac{2}{3}$.
5. Знайдзіце значэнне выразу $x_1^2x_2^4 + x_1^4x_2^2$, калі x_1 і x_2 — карані ўраўнення $3x^2 + 5x - 1 = 0$.	а) -1; б) $\frac{31}{9}$; в) $\frac{31}{81}$; г) 25; д) $\frac{31}{27}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
6. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\frac{x+3}{4x^2-9}+\frac{x-3}{4x^2+12x+9}+\frac{4}{6-4x}=0.$	а) -4; б) 0; в) -6; г) -3; д) -2.
7. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $(6x-14)^9=(x-1)^{18}$.	а) 2; б) -15; в) 8; г) -8; д) 15.
8. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{x^2}{7}$.	а) -28; б) 14; в) -14; г) -2; д) 28.
9. Знайдзіце ўсе карані ўраўнення $\frac{1}{3x-2-x^2}=\frac{3}{7x-4-3x^2}$.	а) 1; б) $-1\frac{1}{3}$; 1; 2; в) няма каранёў; г) любы лік; д) -4.
10. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $3x+x^2=\left(\frac{x^2+3x}{2}\right)^2$.	
11. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\left(x^2-2x+6\right)^2=9x^2$.	
12. Знайдзіце здабытак каранёў ураўнення $\left(x^2+2x\right)^2-(x+1)^2=55$.	
13. Знайдзіце суму каранёў (корань, калі ён адзіны) ураўнення $\frac{5x^2-4x-1}{x-1}=x^2+5$.	
14. Знайдзіце колькасць цэлых каранёў ураўнення $\frac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\frac{x+3}{4-x}$ на прамежку $[2;15]$.	
15. Знайдзіце суму каранёў ураўнення $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8}$.	

Тэст 4. Рацыянальныя няроўнасці. Сістэмы і сукупнасці няроўнасцей

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце няроўнасць, раўназначную няроўнасці $5x \leqslant 1$: 1) $5x^2 \leqslant x$; 2) $5x + \frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{x} + 1$; 3) $x \leqslant 1{,}5$; 4) $x - 0{,}2 \leqslant 0$; 5) $\frac{5x}{x-3} \leqslant \frac{1}{x-3}$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. Выберыце няроўнасць, якая не мае рашэнняў: 1) $3x - 2(x+1) \leqslant 2 + x$; 2) $-3x \geqslant 0$; 3) $3x - 2(x+1) \leqslant x - 5$; 4) $3x \leqslant -2 + x$; 5) $3x \leqslant x$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
3. Рашыце няроўнасць $\frac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \frac{1-x}{2} - \frac{2x-7}{6}$.	а) $(-\infty; 2]$; б) $(-\infty; 0{,}2]$; в) $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right]$; г) $[2; +\infty)$; д) $[0{,}2; +\infty)$.
4. Знайдзіце колькасць цэлых рашэнняў няроўнасці $0{,}5x^2 - x - 1{,}5 \leqslant 0$.	а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.
5. Рашыце сістэму няроўнасцей $\begin{cases} \frac{x+12}{5} + \frac{9+x}{6} \geqslant x + 2, \\ \frac{x+5}{2} + \frac{15-x}{7} < x. \end{cases}$	а) $(-\infty; 3]$; б) $\left(7\frac{2}{9}; +\infty\right)$; в) $(-\infty; +\infty)$; г) $(-\infty; 3] \cup \left(7\frac{2}{9}; +\infty\right)$; д) няма рашэнняў.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
6. Рашыце няроўнасць $\frac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2.$	а) $(-\infty;\ -2] \cup (-1;\ +\infty)$; б) $[-2; -1)$; в) $[-2;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -2] \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$; д) $(-1; 2]$.
7. Знайдзіце абсяг вызначэння функцыі $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$.	а) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right)$; б) $(-\infty;\ -1]$; в) $\left(-\infty;\ \frac{2}{3}\right) \cup [7;\ +\infty)$; г) $(-\infty;\ -1] \cup [7;\ +\infty)$; д) $[7;\ +\infty)$.
8. Знайдзіце ўсе значэнні аргумента, пры якіх графік функцыі $$y = x^4 + x^2 - 6$$ размешчаны вышэй восі абсцыс.	а) $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; б) $(-\infty;\ -\sqrt{2}) \cup (-\sqrt{2}; -1) \cup$ $\cup (1;\ \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$; в) $(-\infty; -2) \cup (2;\ +\infty)$; г) $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$; д) $(-\infty;\ -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$.
9. Рашыце двайную няроўнасць $-3 \leqslant 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}$.	а) $(-\infty;\ +\infty)$; б) $(-\infty; -4] \cup [1; +\infty)$; в) $[-4; 1]$; г) $(-\infty;\ -1{,}5) \cup (-1{,}5;\ +\infty)$; д) $[-4; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 1]$.
10. Знайдзіце колькасць цэлых адмоўных рашэнняў няроўнасці $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 3.$	

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
11. Знайдзіце колькасць цэлых значэнняў аргумента з прамежку $\left[-18; 1\right]$, пры якіх графік функцыі $y = (x+2)^2$ размешчаны ніжэй графіка функцыі $y = 2x(x+3)+7$.	
12. Вядома, што $2,5 \leqslant a \leqslant 4$ і $3 \leqslant b < 8$. Знайдзіце найбольшае значэнне выразу $2a - \frac{b}{3}$.	
13. Знайдзіце найменшае цэлае рашэнне няроўнасці $$\frac{\left(x^2+2x+1\right)\left(x^2-6x+9\right)}{x-3} \geqslant 0.$$	
14. Знайдзіце найбольшае цэлае адмоўнае рашэнне няроўнасці $$\left(0,3x^2+0,5x-5\right)^2 \leqslant \left(0,3x^2+0,5x+5\right)^2.$$	
15. Знайдзіце здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці $$\left(x^2-4x\right)^2+8(x-2)^2 \leqslant 17.$$	

Тэст 5. Арыфметычная прагрэсія

Умовы	Варыянты адказаў
1. З дадзеных паслядоўнасцей выберыце арыфметычную прагрэсію: 1) $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}; \frac{1}{8}; \ldots;$ 2) $-5; -4; -2; 1; \ldots;$ 3) $2; 6; 18; 54; \ldots;$ 4) $0,1;\ 0,3;\ 0,5;\ 0,7; \ldots;$ 5) $-8;\ 8;\ -8;\ 8; \ldots.$	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).
2. З дадзеных арыфметычных прагрэсій выберыце тую, сярод членаў якой ёсць лік -10: 1) $a_n = 2n+10$; 2) $a_n = -3n$; 3) $a_n = -3n+2$; 4) $a_n = -4n-8$; 5) $a_n = -2n+11$.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
3. Знайдзіце першы член і рознасць арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_7 = 21$, $a_9 = 29$.	а) $a_1 = -3,\ d = 4$; б) $a_1 = 3,\ d = 4$; в) $a_1 = 4,\ d = -3$; г) $a_1 = -27,\ d = 8$; д) $a_1 = -3,\ d = -4$.
4. Знайдзіце сярэдняе арыфметычнае лікаў 4; 7; 10; ...; 100.	а) 52; б) 48; в) 858; г) 64; д) 100.
5. Знайдзіце, колькі членаў, большых за -1, змяшчаецца ў арыфметычнай прагрэсіі 92; 88; 84;	а) 21; б) 22; в) 23; г) 24; д) 25.
6. Знайдзіце натуральны лік, роўны $\frac{1}{21}$ сумы натуральных лікаў, якія яму папярэднічаюць.	а) 54; б) 45; в) 21; г) 43; д) 47.
7. Знайдзіце суму першых дваццаці членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.	а) 80; б) 120; в) 90; г) 110; д) 100.
8. Складзіце формулу n-га члена арыфметычнай прагрэсіі (a_n), калі $a_1 + a_2 + a_3 = 66$, $a_2 \cdot a_3 = 528$.	а) $a_n = 20n$; б) $a_n = 2n + 20$; в) $a_n = 2n + 18$; г) $a_n = 20n + 2$; д) $a_n = 4n + 16$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
9. Сума членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выражаецца формулай $S_n = 2n^2 - 3n$. Знайдзіце $\frac{a_2}{a_1}$.	а) 0,5; б) 2; в) 1; г) −1; д) −3.
10. Няхай у арыфметычнай прагрэсіі $a_1 = -3, d = 5$. Знайдзіце $S_{15} - S_{14}$.	
11. У арыфметычнай прагрэсіі $a_7 = 9$. Знайдзіце значэнне выразу $20d$, дзе d — значэнне рознасці арыфметычнай прагрэсіі, пры якім здабытак $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7$ прымае найменшае значэнне.	
12. Крайнія члены арыфметычнай прагрэсіі, якая мае сем членаў, роўны 11 і 35. Знайдзіце, колькі членаў мае іншая спадальная арыфметычная прагрэсія, крайнія члены якой 38 і 13, калі чацвёртыя члены абедзвюх прагрэсій аднолькавыя.	
13. Цана тавару зніжалася некалькі разоў на адну і тую ж колькасць рублёў. Пасля трэцяга зніжэння тавар каштаваў 2460 р., а пасля адзінаццатага зніжэння —1980 р. Знайдзіце, пасля колькіх зніжэнняў цана тавару складзе 50 % першапачатковай цаны.	
14. Арыфметычная прагрэсія змяшчае 8 членаў. Сума членаў, якія стаяць на цотных месцах, роўна 28, а сума членаў, якія стаяць на няцотных месцах, роўна 16. Знайдзіце першы член прагрэсіі.	
15. Сума першых пятнаццаці членаў арыфметычнай прагрэсіі, якая складаецца з натуральных лікаў, большая за 337, але меншая за 393. Знайдзіце восьмы член гэтай прагрэсіі, калі вядома, што ён кратны чатыром.	

Тэст 6. Геаметрычная прагрэсія

Умовы	Варыянты адказаў
1. Выберыце лік, які не можа з'яўляцца членам геаметрычнай прагрэсіі: 1) 3; 2) 1; 3) $-\sqrt{2}$; 4) 0; 5) −1.	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
2. Дадзены тры паслядоўныя члены геаметрычнай прагрэсіі: 7; x; 63. Знайдзіце x, калі $x < 0$.	а) -9; б) -21; в) -18; г) -27; д) -42.
3. Знайдзіце другі член геаметрычнай прагрэсіі, калі яе першы член роўны $\frac{1}{8}$, а восьмы член роўны $\frac{1}{1024}$.	а) $\frac{1}{4}$; б) 4; в) $\frac{1}{16}$; г) 16; д) $\frac{1}{2}$.
4. Геаметрычная прагрэсія зададзена формулай n-га члена $b_n = 3 \cdot 2^n$. Знайдзіце суму першых пяці членаў гэтай прагрэсіі.	а) 186; б) 234; в) 148; г) 236; д) 214.
5. Знайдзіце нумар члена геаметрычнай прагрэсіі 0,1; 0,3; ..., роўнага 218,7.	а) 5; б) 8; в) 7; г) 6; д) 9.
6. У геаметрычнай прагрэсіі (b_n) вядома, што $b_{43} \cdot b_{36} = 57$. Знайдзіце значэнне выразу $b_{33} \cdot b_{46}$.	а) 114; б) 26,5; в) 19; г) 76; д) 57.
7. Знайдзіце першы член бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі, калі сума членаў гэтай прагрэсіі роўна 12,6, а адносіна 20-га члена да 17-га роўна $-\frac{8}{125}$.	а) 16,2; б) 17,64; в) 15,4; г) 2,51; д) 13.
8. Знайдзіце назоўнік геаметрычнай прагрэсіі (b_n), калі $b_7 - b_5 = 48$; $b_6 + b_5 = 48$.	а) 2; б) -2; в) 0,5; г) $-0,5$; д) 3.
9. У роўнастаронні трохвугольнік са стараной 8 упісаны другі трохвугольнік, вяршынямі якога з'яўляюцца сярэдзіны старон першага трохвугольніка. У другі трохвугольнік такім самым чынам упісаны трэці трохвугольнік і г. д. Знайдзіце перыметр восьмага трохвугольніка.	а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{3}{32}$; в) $\frac{3}{48}$; г) $\frac{3}{16}$; д) $\frac{3}{8}$.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
10. У геаметрычнай прагрэсіі $S_n = \frac{6\cdot(2^n-1)}{5}$. Знайдзіце значэнне выразу $5b_5$, дзе b_5 — пяты член гэтай прагрэсіі.	
11. Сума дзесяці членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 64, здабытак першага і дзясятага членаў роўны 16. Знайдзіце суму лікаў, адваротных членам геаметрычнай прагрэсіі.	
12. Знайдзіце (у градусах) найменшае дадатнае значэнне зменнай x, пры якім лікі $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{\cos x}$ у дадзеным парадку з'яўляюцца паслядоўнымі членамі геаметрычнай прагрэсіі.	
13. Знайдзіце значэнне выразу $30S$, дзе $S = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \ldots - \ldots$.	
14. Тры лікі ўтвараюць нарастальную геаметрычную прагрэсію. Калі другі лік павялічыць на 2, то прагрэсія стане арыфметычнай, а калі пасля гэтага апошні лік павялічыць на 9, то прагрэсія зноў стане геаметрычнай. Знайдзіце найменшы з зыходных лікаў.	
15. Дадзены арыфметычная і геаметрычная прагрэсіі. Сума іх першых членаў роўна −3, сума трэціх членаў роўна 1, а сума пятых членаў роўна 5. Знайдзіце рознасць арыфметычнай прагрэсіі.	

Тэст 7. Тэкставыя задачы

Умовы	Варыянты адказаў
1. Банк налічвае па ўкладзе 14 % гадавых. Укладчык паклаў на рахунак 900 р. Колькі грошай будзе на рахунку праз год? Выберыце правільную роўнасць для рашэння задачы: 1) $900\cdot 14 = 12\,600$ (р.); 2) $900 + 14 = 914$ (р.); 3) $900\cdot 0{,}14 = 126$ (р.); 4) $900\cdot 1{,}14 = 1026$ (р.); 5) $900\cdot 1{,}4 = 1260$ (р.).	а) 1); б) 2); в) 3); г) 4); д) 5).

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
2. У некаторым горадзе адбыліся выбары ў гарадскі савет, у якіх прынялі ўдзел 75 % выбаршчыкаў. Толькі 10 % ад колькасці ўзяўшых удзел у выбарах аддалі галасы партыі зялёных. Знайдзіце, колькі жыхароў прагаласавалі за гэту партыю, калі ў горадзе 1 млн выбаршчыкаў.	а) 100 000; б) 750 000; в) 25 000; г) 75 000; д) 50 000.
3. Некаторы лік павялічылі на 200 %, а затым атрыманы лік павялічылі ў 6 разоў. Знайдзіце, колькі працэнтаў апошні лік складае ад першапачатковага.	а) 1200 %; б) 1500 %; в) 1800 %; г) 600 %; д) 1000 %.
4. Знайдзіце, на колькі працэнтаў павялічыцца плошча квадрата, калі яго перыметр павялічыць на 10 %.	а) 10 %; б) 100 %; в) 21 %; г) 121 %; д) 50 %.
5. У краме прададзена за першы дзень 50 % атрыманага тавару, а за другі дзень — 25 % астачы. Знайдзіце, колькі працэнтаў атрыманага тавару засталося непрададзеным.	а) 25 %; б) 75 %; в) 22,5 %; г) 12,5 %; д) 37,5 %.
6. У адным горадзе Канады 70 % жыхароў ведаюць французскую мову і 80 % — англійскую мову. Знайдзіце, колькі працэнтаў жыхароў ведаюць абедзве мовы, калі вядома, што кожны жыхар горада ведае прынамсі адну з гэтых моў.	а) 50; б) 10; в) 20; г) 75; д) 40.
7. Сасна на 25 % вышэйшая за елку. Калі кожнае дрэва падрасце на 1,8 м, то сасна будзе на 10 % вышэйшай за елку. Знайдзіце (у метрах) першапачатковую вышыню елкі.	а) 1; б) 1,2; в) 0,8; г) 2,2; д) 1,5.
8. Цана тавару спачатку павялічылася на 10 %, а затым паменшылася на 25 % у параўнанні з павялічанай цаной. У выніку тавар патаннеў на 7 р. Знайдзіце (у рублях), колькі каштаваў тавар першапачаткова.	а) 10; б) 40; в) 20; г) 25; д) 50.

Працяг

Умовы	Варыянты адказаў
9. Два прадметы ў суме каштуюць 40 р. Калі кошт першага паменшыць на 10 %, а другога — на 40 %, то разам яны будуць каштаваць 33 р. Знайдзіце (у рублях) дадатную розніцу паміж коштамі прадметаў да змянення цэн.	а) 10; б) 17; в) 20; г) 22; д) 26.
10. На працягу года завод двойчы павялічваў выпуск прадукцыі на адну і тую ж колькасць працэнтаў. Знайдзіце гэту колькасць, калі вядома, што ў пачатку года завод штомесяц выпускаў 600 вырабаў, а ў канцы года стаў штомесяц выпускаць 726 вырабаў.	
11. Знайдзіце, якая найменшая колькасць работнікаў можа быць у фірме, калі вядома, што мужчыны складаюць у ёй менш за 50 %, але больш за 40 %.	
12. Для перавозкі 90 т грузу патрабуецца некаторая колькасць аднолькавых грузавікоў. У сувязі з тым, што на кожную машыну пагрузілі на 0,75 т грузу менш, дадаткова спатрэбіліся яшчэ 4 грузавікі. Знайдзіце, на колькі працэнтаў павялічылася колькасць грузавікоў у параўнанні з першапачатковай заяўкай.	
13. Ёсць два сплавы. Адзін змяшчае 2,8 кг золата і 1,2 кг прымесей, другі — 2,7 кг золата і 0,3 кг прымесей. Адрэзаўшы па кавалку ад кожнага сплаву і сплавіўшы іх, атрымалі 2 кг сплаву з утрыманнем золата 85 %. Знайдзіце, колькі грамаў металу адрэзалі ад другога кавалка.	
14. На велатрэку, які мае форму акружнасці, з дыяметральна процілеглых пунктаў адначасова стартуюць два веласіпедысты са скарасцямі 775 $\frac{\text{м}}{\text{мін}}$ і 800 $\frac{\text{м}}{\text{мін}}$ адпаведна. Знайдзіце, колькі поўных кругоў праедзе першы веласіпедыст да моманту, калі яго дагоніць другі, ведаючы, што даўжыня велатрэка роўна чвэрці кіламетра.	
15. У скрынцы знаходзяцца чырвоныя і сінія шары, прычым сінія шары складаюць 1 % ад агульнай колькасці шароў. Пасля таго як са скрынкі ўзялі частку чырвоных шароў, доля сініх шароў ад агульнай колькасці шароў, што засталіся ў скрынцы, склала 2 %. Знайдзіце, у колькі разоў першапачатковая колькасць шароў большая за колькасць узятых чырвоных шароў.	

Адказы да тэматычных тэстаў

Тэст 1

1. в). **2.** г). **3.** в). **4.** в). **5.** г). **6.** а). **7.** д). **8.** г). **9.** а). **10.** 19. **11.** 835. **12.** 18 900. **13.** 120. **14.** 4. **15.** 448.

Тэст 2

1. в). **2.** д). **3.** г). **4.** г). **5.** а). **6.** в). **7.** в). **8.** в). **9.** д). **10.** 2. **11.** 441. **12.** 63. **13.** −14. **14.** 1. **15.** 45.

Тэст 3

1. в). **2.** г). **3.** д). **4.** б). **5.** в). **6.** г). **7.** в). **8.** д). **9.** в). **10.** −6. **11.** 5. **12.** −8. **13.** 4. **14.** 13. **15.** 4.

Тэст 4

1. г). **2.** в). **3.** а). **4.** д). **5.** д). **6.** г). **7.** б). **8.** г). **9.** д). **10.** 36. **11.** 20. **12.** 7. **13.** −1. **14.** −2. **15.** 6.

Тэст 5

1. г). **2.** в). **3.** а). **4.** а). **5.** г). **6.** г). **7.** д). **8.** в). **9.** д). **10.** 67. **11.** 33. **12.** 6. **13.** 22. **14.** −5. **15.** 24.

Тэст 6

1. г). **2.** б). **3.** в). **4.** а). **5.** б). **6.** д). **7.** б). **8.** а). **9.** г). **10.** 96. **11.** 4. **12.** 45°. **13.** 5. **14.** 4. **15.** 2.

Тэст 7

1. г). **2.** г). **3.** в). **4.** в). **5.** д). **6.** а). **7.** б). **8.** б). **9.** в). **10.** 10. **11.** 7. **12.** 20. **13.** 1500. **14.** 15. **15.** 2.

Рэкамендацыі па выкананні тэматычных тэстаў

Тэст 1

1. Лікі 0,(12); −0,5; 0,8; −4; 0,2(52) з'яўляюцца рацыянальнымі, паколькі іх можна запісаць у выглядзе дробу $\frac{m}{n}$, дзе $m \in \boldsymbol{Z}$, $n \in \boldsymbol{N}$. Такім чынам, пара лікаў $\sqrt{3}$ і π складаецца толькі з ірацыянальных лікаў.

2. $547{,}698 \approx 547{,}70$.

Нуль у разрадзе сотых паказвае, да якога разраду выканана акругленне.

3. Нескарачальны звычайны дроб можна запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу у тым выпадку, калі назоўнік гэтага дробу не змяшчае іншых простых множнікаў, акрамя 2 і 5. Раскладзём назоўнікі кожнага дробу на простыя множнікі.

$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$; $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; $15 = 3 \cdot 5$;
$125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$; $160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Назоўнік дробу $\frac{2}{15}$ змяшчае множнікі, адрозныя ад 2 і 5, значыць, гэты дроб нельга запісаць у выглядзе канечнага дзесятковага дробу.

4. Раскладзём лік 2184 на простыя множнікі:

$$\begin{array}{r|l} 2184 & 2 \\ 1092 & 2 \\ 546 & 2 \\ 273 & 3 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Найбольшым простым двухзначным дзельнікам дадзенага ліку з'яўляецца лік 13.

5. Найменшым двухзначным простым лікам з'яўляецца лік 11, а найбольшым простым лікам пятага дзясятка з'яўляецца лік 47. Сума гэтых лікаў роўна 58.

6. Шуканы лік з'яўляецца здабыткам лікаў 9, 8, 7 і 5.

$$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520.$$

Паколькі атрыманы лік кратны 9, то ён кратны і 3.

Паколькі лік 2520 кратны 8, то ён кратны і 4, і 2.

Паколькі атрыманы лік дзеліцца і на 9, і на 8, то ён дзеліцца і на 6.

7. Няхай x — першы лік, а y — другі. Па ўмове задачы $\frac{2}{3}x = \frac{5}{6}y$, тады $\frac{x}{y} = \frac{5}{6} : \frac{2}{3}$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2}$; $\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$, г. зн. $x : y = 5 : 4$.

8. 1) Перавядзём бясконцы перыядычны дроб 3,(6) у звычайны. Няхай $3{,}(6) = x$, тады $36{,}(6) = 10x$. Аднімем ад другой роўнасці першую і атрымаем $36{,}(6) - 3{,}(6) = 10x - x$; $33 = 9x$; $x = 3\frac{2}{3}$.

2) $\left(4\frac{2}{3} \cdot 3{,}5 - 3\frac{1}{2} \cdot 3{,}(6)\right) : 0{,}014 = \left(4\frac{2}{3} \cdot 3{,}5 - 3{,}5 \cdot 3\frac{2}{3}\right) : 0{,}014 =$

$= 3{,}5 \cdot \left(4\frac{2}{3} - 3\frac{2}{3}\right) : 0{,}014 = 3{,}5 \cdot 1 : 0{,}014 = 3{,}5 : 0{,}014 = \frac{3{,}5}{0{,}014} = \frac{3500}{14} = 250.$

9. Няхай x — выходны лік. Пасля таго як выходны лік павялічылі на 60 %, атрымалі лік $(1{,}6x)$. Высветлім, на колькі працэнтаў неабходна паменшыць $(1{,}6x)$, каб атрымаць x:

$$\frac{1{,}6x - x}{1{,}6x} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}6x}{1{,}6x} \cdot 100\,\% = \frac{6}{16} \cdot 100\,\% = 37{,}5\,\%.$$

10. Раскладзём лікі 475, 570 і 741 на простыя множнікі і знойдзем НАД$(475; 570; 741)$.

$$\begin{array}{r|l} 475 & 5 \\ 95 & 5 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 570 & 5 \\ 114 & 2 \\ 57 & 3 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 741 & 3 \\ 247 & 13 \\ 19 & 19 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{НАД}(475;\ 570;\ 741) = 19.$$

11. Шуканы лік можна запісаць у выглядзе $x = 43 \cdot 19 + r$, дзе r — астача. Найбольшая магчымая астача пры дзяленні на 19 роўна 18, г. зн. шуканы лік $x = 43 \cdot 19 + 18 = 835$.

12. Калі $a = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$; $b = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $c = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, то

$$\text{НАК}(a; b; c) = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 18\,900.$$

13. Лікі $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{5}$ і $\frac{3}{8}$ з’яўляюцца лікамі, адваротнымі лікам $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{5}{2}$ і $\frac{8}{3}$ адпаведна.

Тады $\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}x + \frac{3}{8}x = 968.$

Памножым абедзве часткі атрыманага ўраўнення на 40 і атрымаем $60x + 30x + 16x + 15x = 968 \cdot 40;$ $121x = 968 \cdot 40;$ $x = \frac{968 \cdot 40}{121};$ $x = 320.$

Знойдзем найменшую з частак, на якія падзялілі лік 968: $\frac{3}{8} \cdot 320 = 120.$

14. Высветлім, праз колькі мінут пасля сустрэчы аўтобусы трох маршрутаў адначасова апынуцца на станцыі, для гэтага знойдзем $\text{НАК}(10; 15; 18) = 90.$ Такім чынам, аўтобусы трох маршрутаў будуць адначасова аказвацца на станцыі кожныя 90 мінут.

Вядома, што адна з сустрэч адбылася ў 10 г 25 мін.

Перыяд часу з 7 г 10 мін да 10 г 25 мін роўны 195 мінутам, а з 10 г 25 мін да 12 г 10 мін роўны 105 мінутам. Значыць, з 7 г 10 мін да 10 г 25 мін аўтобусы сустрэліся двойчы, а з 10 г 25 мін да 12 г 10 мін яшчэ адзін раз. Такім чынам, у азначаны прамежак часу адбылося чатыры сустрэчы.

15. $\left||223^2 + 3| - |1 - 224^2| - |-5|\right| = \left|223^2 + 3 - (224^2 - 1) - 5\right| =$

$= \left|223^2 + 3 - 224^2 + 1 - 5\right| = \left|223^2 - 224^2 - 1\right| =$

$= \left|(223 - 224)(223 + 224) - 1\right| = \left|-1 \cdot 447 - 1\right| = |-448| = 448.$

Тэст 2

1. $2(t - s) = -2(s - t) = -2 \cdot (-5{,}2) = 10{,}4.$

2. $\left(0{,}21a^{n+1}c^7y^9\right) : \left(7a^nc^7y^7\right) = 0{,}03 \cdot a^{n+1-n}c^{7-7}y^{9-7} = 0{,}03 \cdot a^1c^0y^2 =$

$= 0{,}03 \cdot ay^2.$

3. $\frac{3x - 9}{x - 2} - \frac{x - 5}{x - 2} = \frac{3x - 9 - (x - 5)}{x - 2} = \frac{3x - 9 - x + 5}{x - 2} = \frac{2x - 4}{x - 2} = \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2.$

4. $\frac{15a}{5 - a} + \frac{6a}{a^2 - 25} \cdot \frac{7a + 35}{3} = \frac{15a}{5 - a} + \frac{6a \cdot 7(a + 5)}{3(a + 5)(a - 5)} = \frac{15a}{5 - a} + \frac{14a}{a - 5} =$

$= \frac{15a}{5 - a} - \frac{14a}{5 - a} = \frac{15a - 14a}{5 - a} = \frac{a}{5 - a}.$

5. $2bc + a^2 - b^2 - c^2 = a^2 - \left(b^2 - 2bc + c^2\right) = a^2 - (b - c)^2 =$

$= (a - b + c)(a + b - c).$

6. $\dfrac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{x^2(x+5) - 4(x+5)}{x^2 + 3x - 10} = \dfrac{(x+5)(x^2-4)}{x^2 + 3x - 10}.$

Па формуле $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ раскладзём на множнікі квадратны трохчлен у назоўніку дробу:

$$x^2 + 3x - 10 = 0;\ x_1 = -5;\ x_2 = 2.$$

Тады $x^2 + 3x - 10 = (x+5)(x-2)$ і дроб прымае выгляд

$$\frac{(x+5)(x^2-4)}{x^2+3x-10} = \frac{(x+5)(x-2)(x+2)}{(x+5)(x-2)} = x + 2.$$

7. $\left(m - (1 - m)^{-1}\right) \cdot \dfrac{\dfrac{m-2}{m^{-1}} + m^0}{m^2 - m + 1} = \left(m - \dfrac{1}{1-m}\right) \cdot \dfrac{m(m-2)+1}{m^2 - m + 1} =$

$= \dfrac{m(1-m) - 1}{1 - m} \cdot \dfrac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - m + 1} = \dfrac{m - m^2 - 1}{1 - m} \cdot \dfrac{(m-1)^2}{m^2 - m + 1} =$

$= -\dfrac{m^2 - m + 1}{1 - m} \cdot \dfrac{(1-m)^2}{m^2 - m + 1} = -(1 - m) = m - 1.$

8. $\left(4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9\right) : \left(2x^{-4} + x^{-3} - 3x^{-2}\right) = \dfrac{4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9}{2x^{-4} + x^{-3} - 3x^{-2}} =$

$= \dfrac{4x^{-4} - \left(x^{-2} - 6x^{-1} + 9\right)}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} = \dfrac{4x^{-4} - \left(x^{-1} - 3\right)^2}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} =$

$= \dfrac{\left(2x^{-2} - x^{-1} + 3\right)\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)}{x^{-2}\left(2x^{-2} + x^{-1} - 3\right)} = \dfrac{2x^{-2} - x^{-1} + 3}{x^{-2}} = 3x^2 - x + 2.$

9. $A = \left(x^2 + x + 1\right)^2 + 3x\left(x^2 + x + 1\right) - 18x^2.$

Няхай $x^2 + x + 1 = t$, тады $A = t^2 + 3xt - 18x^2$. Разгледзім атрыманы выраз як квадратны трохчлен адносна t і раскладзём яго на множнікі:

$$A = t^2 + 3xt - 18x^2 = (t + 6x)(t - 3x)\Big|_{t = x^2 + x + 1} =$$

$$= \left(x^2 + x + 1 + 6x\right)\left(x^2 + x + 1 - 3x\right) =$$

$$= \left(x^2 + 7x + 1\right)\left(x^2 - 2x + 1\right) = (x-1)^2\left(x^2 + 7x + 1\right).$$

10. Няхай $A = \left(\left(\frac{6}{n+1} - \frac{5n+30}{n^2+5n+6}\right) : \frac{n-2}{n^2+3n+2}\right)^{-1}.$

1) $\frac{6}{n+1} - \frac{5n+30}{(n+2)(n+3)} = \frac{6(n+2)(n+3) - (5n+30)(n+1)}{(n+1)(n+2)(n+3)} =$

$$= \frac{6\left(n^2+5n+6\right) - \left(5n^2+35n+30\right)}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^2-5n+6}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

2) $\frac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} : \frac{n-2}{n^2+3n+2} = \frac{(n-2)(n-3)}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{n-2} = \frac{n-3}{n+3}.$

3) Пры $n = 9$ $A = \left(\frac{9-3}{9+3}\right)^{-1} = 2.$

11. $\left(\frac{y}{xy-x^2} + \frac{x}{xy-y^2}\right) : \frac{x^2+2xy+y^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \left(\frac{y}{x(y-x)} + \frac{x}{y(x-y)}\right) : \frac{x^2+2xy+y^2}{\frac{y+x}{xy}} =$

$$= \left(\frac{y}{x(y-x)} - \frac{x}{y(y-x)}\right) \cdot \frac{\frac{y+x}{xy}}{x^2+2xy+y^2} = \frac{y^2-x^2}{xy(y-x)} \cdot \frac{y+x}{xy} : \left(x^2+2xy+y^2\right) =$$

$$= \frac{(y-x)(y+x)}{xy\cdot(y-x)} \cdot \frac{y+x}{xy\cdot(y+x)^2} = \frac{(y+x)}{xy} \cdot \frac{1}{xy\cdot(y+x)} = \frac{1}{x^2y^2}\Bigg|_{x=-\frac{1}{7};\ y=\frac{1}{3}} = 49\cdot 9 = 441.$$

12. Узвядзём абедзве часткі роўнасці $4x - 3x^{-1} = -6$ у квадрат:

$$\left(4x - 3x^{-1}\right)^2 = 36;\ 16x^2 + 9x^{-2} - 2\cdot 4x\cdot 3x^{-1} = 36;$$

$$16x^2 + 9x^{-2} - 24 = 36;\ 16x^2 + 9x^{-2} = 60,$$

тады $16x^2 + 9x^{-2} + 3 = 60 + 3 = 63$.

13. Вылучым поўныя квадраты ў выразе

$$8x^2 + 2y^2 - 4xy + 4x + 2y - 12 =$$

$$= 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x^2 + 4x + 1 + y^2 + 2y + 1 - 14 =$$

$$= (2x-y)^2 + (2x+1)^2 + (y+1)^2 - 14.$$

Паколькі $(2x-y)^2 \geqslant 0$; $(2x+1)^2 \geqslant 0$; $(y+1)^2 \geqslant 0$ пры любых рэчаісных значэннях x і y (роўнасць нулю дасягаецца пры $x=-\frac{1}{2}$, $y=-1$), то $(2x-y)^2+(2x+1)^2+(y+1)^2-14 \geqslant -14$.

Такім чынам, найменшым значэннем дадзенага выразу з'яўляецца лік -14.

14. $$\left(3ab^{-1}-\frac{ba^{-1}}{3}\right):\left(3ab^{-1}+\frac{ba^{-1}}{3}+0{,}5^{-1}\right):\left(\left(1-\frac{ba^{-1}}{3}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\left(\frac{3a}{b}-\frac{b}{3a}\right):\left(\frac{3a}{b}+\frac{b}{3a}+2\right):\left(\left(1-\frac{b}{3a}\right)\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\frac{9a^2-b^2}{3ab}:\left(\frac{9a^2+b^2+6ab}{3ab}\right):\left(\frac{3a-b}{3a}\cdot\frac{3a}{3a+b}\right)=$$

$$=\frac{(3a-b)(3a+b)}{3ab}\cdot\frac{3ab}{(3a+b)^2}:\left(\frac{3a-b}{3a+b}\right)=\frac{3a-b}{3a+b}\cdot\frac{3a+b}{3a-b}=1.$$

15. Заўважым, што $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$; $\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ і г. д.

Тады зыходны выраз прымае выгляд

$$A=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}=$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)}.$$

Знойдзем значэнне выразу $16A$ пры $x=0{,}(3)$:

$$16\cdot\frac{5}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+5\right)}=16\cdot\frac{5}{\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{3}}=16\cdot\frac{45}{16}=45.$$

Тэст 3

1. Няправільным з'яўляецца сцверджанне 3), паколькі лінейнае ўраўненне можа мець адзіны корань, можа мець бясконца многа каранёў або не мець каранёў.

2. Ураўненне $x^2+5=0$ не мае каранёў. Ураўненні, якія не маюць каранёў, лічацца раўназначнымі.

З прапанаваных у варыянтах адказаў ураўненняў не маюць каранёў ураўненні $\frac{3}{x-6}=0$; $x^2-7x+13=0$; $|x-2|+9=8$ і $5x-12=3(x+4)+2x$.

Коранем ураўнення $\frac{x}{8}=0$ з'яўляецца лік 0.

Такім чынам, ураўненне $\frac{x}{8}=0$ не раўназначна ўраўненню $x^2+5=0$.

3. $0{,}2\left(1{,}5x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{15}=0{,}3x$; $0{,}3x-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=0{,}3x$; $0{,}3x-0{,}3x=\frac{1}{15}-\frac{1}{15}$; $0\cdot x=0$; $x\in \boldsymbol{R}$.

4. $\frac{1}{2-x}-1=\frac{1}{x-2}-\frac{6-x}{3x^2-12}$; $\frac{1}{2-x}-1-\frac{1}{x-2}+\frac{6-x}{3x^2-12}=0$;

$\frac{1}{2-x}-1+\frac{1}{2-x}+\frac{6-x}{3(x-2)(x+2)}=0$; $\frac{2}{2-x}-1-\frac{6-x}{3(2-x)(x+2)}=0$;

$\frac{6(x+2)-3(2-x)(x+2)-(6-x)}{3(2-x)(x+2)}=0$; $\frac{6x+12-12+3x^2-6+x}{3(2-x)(x+2)}=0$;

$\frac{3x^2+7x-6}{3(2-x)(x+2)}=0$; $\begin{cases}3x^2+7x-6=0,\\ x\neq -2;\ 2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x=-3,\end{array}\right.\\ x\neq -2;\ 2;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{2}{3},\\ x=-3.\end{array}\right.$

5. Квадратнае ўраўненне $3x^2+5x-1=0$ мае карані, паколькі $D>0$, тады $x_1+x_2=-\frac{5}{3}$; $x_1x_2=-\frac{1}{3}$.

Знойдзем значэнне шуканага выразу:

$$x_1^2x_2^4+x_1^4x_2^2=x_1^2x_2^2\left(x_2^2+x_1^2\right)=\left(x_1x_2\right)^2\left(\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\left(\left(-\frac{5}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{25}{9}+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{31}{9}=\frac{31}{81}.$$

6. $\frac{x+3}{4x^2-9}+\frac{x-3}{4x^2+12x+9}+\frac{4}{6-4x}=0$; $\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{4}{2(2x-3)}=0$;

$\frac{x+3}{(2x-3)(2x+3)}+\frac{x-3}{(2x+3)^2}-\frac{2}{2x-3}=0$; $\frac{(x+3)(2x+3)+(x-3)(2x-3)-2(2x+3)^2}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$;

$\frac{2x^2+3x+6x+9+2x^2-3x-6x+9-8x^2-24x-18}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$; $\frac{-4x^2-24x}{(2x-3)(2x+3)^2}=0$;

$$\begin{cases} x^2+6x=0, \\ x \neq -1{,}5;\,1{,}5; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=0, \\ &x=-6, \end{aligned}\right. \\ x \neq -1{,}5;\ 1{,}5; \end{cases} \quad \left[\begin{aligned} &x=0, \\ &x=-6. \end{aligned}\right.$$

Сярэдняе арыфметычнае каранёў дадзенага ўраўнення роўна

$$\frac{-6+0}{2}=-3.$$

7. Ураўненне $(6x-14)^9=(x-1)^{18}$ раўназначна ўраўненню

$$6x-14=(x-1)^2.$$

$x^2-2x+1-6x+14=0;\ x^2-8x+15=0.$ Атрыманае ўраўненне мае карані $(D>0)$. Выкарыстаем тэарэму Віета і атрымаем суму каранёў ураўнення, роўную 8.

8. $\frac{x^2-4}{x^2-9}=\frac{x^2}{7};\ 7\left(x^2-4\right)=x^2\left(x^2-9\right)$ пры $x\neq\pm3;\ x^4-9x^2-7x^2+28=0;$ $x^4-16x^2+28=0.$

Няхай $x^2=t$, тады ўраўненне прымае выгляд $t^2-16t+28=0;$ $\left[\begin{aligned} &t=2, \\ &t=14. \end{aligned}\right.$

Адкуль $\left[\begin{aligned} &x^2=2, \\ &x^2=14; \end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned} &x=\pm\sqrt{2}, \\ &x=\pm\sqrt{14}. \end{aligned}\right.$

Здабытак каранёў зыходнага ўраўнення роўны

$$-\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{14}\right)\cdot\sqrt{14}=28.$$

9. $\frac{1}{3x-2-x^2}=\frac{3}{7x-4-3x^2};$ $\begin{cases} 7x-4-3x^2=3\left(3x-2-x^2\right), \\ 7x-4-3x^2\neq0, \\ 3x-2-x^2\neq0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 7x-4-3x^2=9x-6-3x^2, \\ 3x^2-7x+4\neq0, \\ x^2-3x+2\neq0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ x\neq1;\,1\frac{1}{3}, \\ x\neq1;\,2; \end{cases} \quad x\in\varnothing.$$

Ураўненне не мае каранёў.

10. Няхай $3x + x^2 = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $t = \left(\frac{t}{2}\right)^2$; $t^2 - 4t = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = 4. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x = 0, \\ x^2 + 3x = 4; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x(x+3) = 0, \\ x^2 + 3x - 4 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -3, \\ x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$

Сума каранёў ураўнення роўна -6.

11. $(x^2 - 2x + 6)^2 = 9x^2$; $(x^2 - 2x + 6)^2 - 9x^2 = 0$;

$(x^2 - 2x + 6 - 3x)(x^2 - 2x + 6 + 3x) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x^2 + x + 6 = 0. \end{array}\right.$ Другое ўраўненне сукупнасці не мае каранёў $(D < 0)$.

Сума каранёў зыходнага ўраўнення роўна 5.

12. $(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2 = 55$; $(x^2 + 2x)^2 - (x^2 + 2x + 1) = 55$.

Няхай $x^2 + 2x = t$, тады ўраўненне прымае выгляд $t^2 - (t+1) = 55$; $t^2 - t - 56 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -7, \\ t = 8. \end{array}\right.$

Адкуль $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x = -7, \\ x^2 + 2x = 8; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 7 = 0, \\ x^2 + 2x - 8 = 0. \end{array}\right.$ Першае ўраўненне сукупнасці не мае каранёў. Здабытак каранёў другога ўраўнення роўны -8.

13. Па формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ раскладзём на множнікі квадратны трохчлен у лічніку дробу.

$$5x^2 - 4x - 1 = 0;\ D = 16 + 20 = 36;$$
$$x_1 = \frac{4-6}{10} = -\frac{1}{5};\ x_2 = \frac{4+6}{10} = 1.$$

Тады $5x^2 - 4x - 1 = 5\left(x + \frac{1}{5}\right)(x-1) = (5x+1)(x-1)$ і зыходнае ўраўненне прымае выгляд $\frac{(5x+1)(x-1)}{x-1} = x^2 + 5$. Рэшым атрыманае ўраўненне:

$\left\{\begin{array}{l} 5x + 1 = x^2 + 5, \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 0, \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 1, \end{array}\right. \\ x \neq 1; \end{array}\right.$ $x = 4.$

14. $\dfrac{3x^2+11x+6}{8+10x-3x^2}=\dfrac{x+3}{4-x}$; $\dfrac{3x^2+11x+6}{3x^2-10x-8}=\dfrac{x+3}{x-4}$.

Па формуле $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ раскладзём на множнікі квадратныя трохчлены ў лічніку і назоўніку дробу і атрымаем:

$$\frac{3(x+3)\left(x+\frac{2}{3}\right)}{3(x-4)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{x+3}{x-4};\quad \begin{cases}\dfrac{x+3}{x-4}=\dfrac{x+3}{x-4},\\ x\neq-\dfrac{2}{3};\end{cases}\quad \begin{cases}x\in\boldsymbol{R},\\ x\neq4,\\ x\neq-\dfrac{2}{3}.\end{cases}$$

Каранямі ўраўнення з'яўляюцца ўсе рэчаісныя лікі, акрамя лікаў $-\frac{2}{3}$ і 4.

Прамежку $\left[2;\,15\right]$ належаць 13 цэлых каранёў ураўнення.

15. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}=2x-\dfrac{1}{4x-8}$;

$$\frac{x(x-1)+1}{x-1}+\frac{x(x-3)+1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8};$$

$$x+\frac{1}{x-1}+x+\frac{1}{x-3}=2x-\frac{1}{4x-8};$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-3}=-\frac{1}{4x-8};\quad \frac{x-3+x-1}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8};$$

$$\frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4x-8};\quad \frac{2(x-2)}{(x-1)(x-3)}=-\frac{1}{4(x-2)};$$

$$\begin{cases}8(x-2)^2=-(x-1)(x-3),\\ x\neq1;\,2;\,3;\end{cases}\quad \begin{cases}9x^2-36x+35=0,\\ x\neq1;\,2;\,3.\end{cases}$$

Рэшым ураўненне $9x^2-36x+35=0$; $9x^2-36x+36-1=0$;

$(3x-6)^2-1=0$; $(3x-6)^2=1$; $\left[\begin{array}{l}3x-6=1,\\ 3x-6=-1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=2\frac{1}{3},\\ x=1\frac{2}{3}.\end{array}\right.$ Атрыманыя лікі задавальняюць умову $x\neq1;\ 2;\ 3$.

Такім чынам, сума каранёў ураўнення роўна $2\frac{1}{3}+1\frac{2}{3}=4$.

Тэст 4

1. Няроўнасці называюцца раўназначнымі, калі мноствы іх рашэнняў супадаюць. Калі няроўнасці не маюць рашэнняў, то яны таксама лічацца раўназначнымі.

Рашэннем няроўнасці $5x \leqslant 1$ з'яўляецца прамежак $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right]$.

Знойдзем рашэнні прапанаваных няроўнасцей:

1) $5x^2 \leqslant x;\ 5x^2 - x \leqslant 0;\ x(5x-1) \leqslant 0;\ x \in \left[0; \frac{1}{5}\right];$

2) $5x + \frac{2}{x} \leqslant \frac{2}{x} + 1;\ \begin{cases} 5x \leqslant 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leqslant \frac{1}{5}, \\ x \neq 0; \end{cases}\ x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{5}\right];$

3) $x \leqslant 1{,}5;\ x \in (-\infty; 1{,}5];$

4) $x - 0{,}2 \leqslant 0;\ x \leqslant 0{,}2;\ x \in \left(-\infty; \frac{1}{5}\right];$

5) $\frac{5x}{x-3} \leqslant \frac{1}{x-3};\ \frac{5x-1}{x-3} \leqslant 0;\ x \in \left[\frac{1}{5}; 3\right).$

Такім чынам, зыходная няроўнасць раўназначна няроўнасці

$$x - 0{,}2 \leqslant 0.$$

2. Рэшым прапанаваныя няроўнасці:

1) $3x - 2(x+1) \leqslant 2 + x;\ 3x - 2x - 2 \leqslant 2 + x;\ 0 \cdot x \leqslant 4;\ x \in \boldsymbol{R};$

2) $-3x \geqslant 0;\ x \leqslant 0;\ x \in (-\infty; 0];$

3) $3x - 2(x+1) \leqslant x - 5;\ 3x - 2x - 2 \leqslant x - 5;\ 0 \cdot x \leqslant -3;$ няма рашэнняў;

4) $3x \leqslant -2 + x;\ 2x \leqslant -2;\ x \leqslant -1;\ x \in (-\infty; -1];$

5) $3x \leqslant x;\ 2x \leqslant 0;\ x \in (-\infty; 0].$

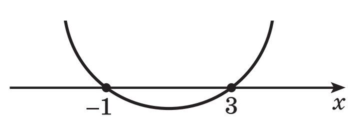
3. Памножым абедзве часткі няроўнасці $\frac{7x-2}{3} \leqslant 3 - \frac{1-x}{2} - \frac{2x-7}{6}$ на 6 і атрымаем: $2(7x-2) \leqslant 18 - 3(1-x) - (2x-7);$

$14x - 4 \leqslant 18 - 3 + 3x - 2x + 7;\ 13x \leqslant 26;\ x \leqslant 2;\ x \in (-\infty; 2].$

4. Памножым абедзве часткі няроўнасці $0{,}5x^2 - x - 1{,}5 \leqslant 0$ на 2 і атрымаем няроўнасць $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

Рэшым яе:

$x^2 - 2x - 3 \leqslant 0;\ x_1 = -1;\ x_2 = 3.$



$x \in [-1; 3].$

Няроўнасць мае пяць цэлых рашэнняў.

5. $\begin{cases} \dfrac{x+12}{5} + \dfrac{9+x}{6} \geqslant x+2, \\ \dfrac{x+5}{2} + \dfrac{15-x}{7} < x; \end{cases}$ $\begin{cases} 6(x+12)+5(9+x) \geqslant 30(x+2), \\ 7(x+5)+2(15-x) < 14x; \end{cases}$

$\begin{cases} 6x+72+45+5x \geqslant 30x+60, \\ 7x+35+30-2x < 14x; \end{cases}$ $\begin{cases} -19x \geqslant -57, \\ -9x < -65; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x > 7\frac{2}{9}; \end{cases}$ $x \in \varnothing.$

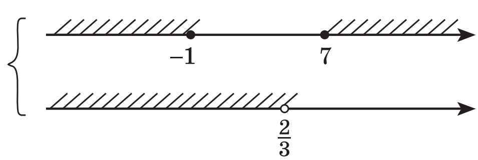
6. $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} \leqslant 2;$ $\dfrac{1}{\frac{x+1}{x}} \leqslant 2;$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} \leqslant 2, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x}{x+1} - 2 \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x-2(x+1)}{x+1} \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{-x-2}{x+1} \leqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1} \geqslant 0, \\ x \neq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (-\infty; -2] \cup (-1; +\infty), \\ x \neq 0; \end{cases}$

$x \in (-\infty; -2] \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$

7. Абсяг вызначэння функцыі $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x - 7} - \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ супадае з мноствам рашэнняў сістэмы няроўнасцей:

$\begin{cases} x^2 - 6x - 7 \geqslant 0, \\ 2 - 3x > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-7)(x+1) \geqslant 0, \\ x < \frac{2}{3}; \end{cases}$



$x \in (-\infty; -1].$

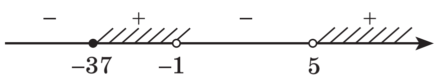
8. Графік функцыі $y = x^4 + x^2 - 6$ размешчаны вышэй восі абсцыс пры $x^4 + x^2 - 6 > 0$. Няхай $x^2 = t$, тады няроўнасць прымае выгляд $t^2 + t - 6 > 0$; $(t+3)(t-2) > 0$, г. зн. $(x^2+3)(x^2-2) > 0$. Паколькі $x^2 + 3 > 0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$, то $x^2 - 2 > 0$; $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$; $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$

9. Двайная няроўнасць $-3 \leqslant 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}$ раўназначна сістэме няроўнасцей $\begin{cases} 1 - 3x - x^2 < \frac{13}{4}, \\ 1 - 3x - x^2 \geqslant -3; \end{cases}$ $\begin{cases} 4 - 12x - 4x^2 < 13, \\ 4 - 3x - x^2 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 + 12x + 9 > 0, \\ x^2 + 3x - 4 \leqslant 0; \end{cases}$

$\begin{cases} (2x + 3)^2 > 0, \\ (x + 4)(x - 1) \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq -1{,}5, \\ x \in [-4;\ 1]; \end{cases}$ $x \in [-4; -1{,}5) \cup (-1{,}5; 1]$.

10. $\frac{3x^2 - 11x + 22}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 3;$ $\frac{3x^2 - 11x + 22 - 3(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0;$ $\frac{x + 37}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0;$

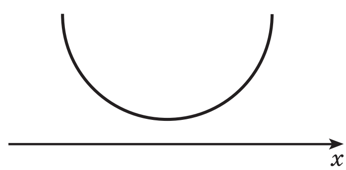
$\frac{x + 37}{(x - 5)(x + 1)} \geqslant 0.$ Выкарыстаем метад інтэрвалаў:



$x \in [-37; -1) \cup (5; +\infty)$.

Няроўнасць мае 36 цэлых адмоўных рашэнняў.

11. Графік функцыі $y = (x + 2)^2$ размешчаны ніжэй графіка функцыі $y = 2x(x + 3) + 7$, калі $(x + 2)^2 < 2x(x + 3) + 7;$ $x^2 + 4x + 4 < 2x^2 + 6x + 7;$ $x^2 + 2x + 3 > 0;$ $D = 4 - 12 < 0$.



$x \in \boldsymbol{R}$.

Такім чынам, графік функцыі $y = (x + 2)^2$ размешчаны ніжэй графіка функцыі $y = 2x(x + 3) + 7$ пры любых значэннях аргумента. Значыць, на прамежку $[-18; 1]$ размешчана 20 цэлых лікаў, якія задавальняюць умову задачы.

12. Калі $2{,}5 \leqslant a \leqslant 4$, то $5 \leqslant 2a \leqslant 8$.

Паколькі $3 \leqslant b < 8$, то $1 \leqslant \frac{b}{3} < \frac{8}{3}$, тады $-1 \geqslant -\frac{b}{3} > -\frac{8}{3}$; $-2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \leqslant -1$.

Складзём атрыманыя няроўнасці:

$$+\begin{array}{r} 5 \leqslant 2a \leqslant 8 \\ -2\frac{2}{3} < -\frac{b}{3} \leqslant -1 \\ \hline 2\frac{1}{3} < 2a - \frac{b}{3} \leqslant 7. \end{array}$$

Найбольшае значэнне выразу $2a - \frac{b}{3}$ роўна 7.

13. $\frac{(x^2+2x+1)(x^2-6x+9)}{x-3} \geqslant 0;$ $\frac{(x+1)^2(x-3)^2}{x-3} \geqslant 0.$

Выкарыстаем метад інтэрвалаў:

$x \in \{-1\} \cup (3;\ +\infty).$

Найменшым цэлым рашэннем няроўнасці з'яўляецца лік -1.

14. Запішам няроўнасць $(0{,}3x^2+0{,}5x-5)^2 \leqslant (0{,}3x^2+0{,}5x+5)^2$ у выглядзе $(0{,}3x^2+0{,}5x-5)^2-(0{,}3x^2+0{,}5x+5)^2 \leqslant 0$ і выкарыстаем формулу рознасці квадратаў

$$(0{,}3x^2+0{,}5x-5-(0{,}3x^2+0{,}5x+5))(0{,}3x^2+0{,}5x-5+(0{,}3x^2+0{,}5x+5)) \leqslant 0;$$

$$(0{,}3x^2+0{,}5x-5-0{,}3x^2-0{,}5x-5)(0{,}3x^2+0{,}5x-5+0{,}3x^2+0{,}5x+5) \leqslant 0;$$

$$-10(0{,}6x^2+x) \leqslant 0;\ \ 0{,}6x^2+x \geqslant 0;\ \ x(0{,}6x+1) \geqslant 0;$$

$$x \in \left(-\infty;\ -1\frac{2}{3}\right] \cup [0;\ +\infty).$$

Найбольшым цэлым адмоўным рашэннем няроўнасці з'яўляецца лік -2.

15. $(x^2-4x)^2+8(x-2)^2 \leqslant 17;$ $(x^2-4x)^2+8(x^2-4x+4) \leqslant 17.$

Няхай $x^2-4x=t$, тады няроўнасць прымае выгляд $t^2+8(t+4) \leqslant 17;$ $t^2+8t+15 \leqslant 0;$ $(t+3)(t+5) \leqslant 0.$ Паколькі $t=x^2-4x$, то атрымаем $(x^2-4x+3)(x^2-4x+5) \leqslant 0.$ Паколькі дыскрымінант квадратнага трохчлена x^2-4x+5 адмоўны, а першы каэфіцыент дадатны, то $x^2-4x+5>0$ пры $x \in \boldsymbol{R}$. Такім чынам, $x^2-4x+3 \leqslant 0;$ $(x-1)(x-3) \leqslant 0;$ $x \in [1;\ 3].$

Здабытак цэлых рашэнняў няроўнасці роўны $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Тэст 5

1. Арыфметычнай прагрэсіяй з'яўляецца паслядоўнасць
$0{,}1;\ 0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}7;\ \ldots;$.

2. Высветлім, у якой з арыфметычных прагрэсій ёсць $a_n=-10$.

1) $-10=2n+10;$ $2n=-20;$ $n=-10$. Паколькі -10 не з'яўляецца натуральным лікам, то сярод членаў дадзенай прагрэсіі няма ліку -10.

2) $-10=-3n;$ $n=\frac{10}{3} \notin \boldsymbol{N};$

3) $-10 = -3n + 2$; $3n = 12$; $n = 4$ — натуральны лік, значыць, лік -10 з'яўляецца чацвёртым членам дадзенай прагрэсіі.

4) $-10 = -4n - 8$; $4n = 2$; $n = \frac{1}{2} \notin \boldsymbol{N}$;

5) $-10 = -2n + 11$; $2n = 21$; $n = \frac{21}{2} \notin \boldsymbol{N}$.

3. Паколькі $a_7 = 21$, $a_9 = 29$, то $d = \frac{a_9 - a_7}{2} = \frac{29 - 21}{2} = 4$.

Тады $a_1 = a_7 - 6d = 21 - 24 = -3$.

4. Разгледзім паслядоўнасць 4, 7, 10, ..., 100 як арыфметычную прагрэсію, у якой $a_1 = 4$; $d = 3$; $a_n = 100$. Па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі $a_n = a_1 + d(n-1)$ знойдзем колькасць членаў гэтай прагрэсіі: $100 = 4 + 3(n-1)$; $96 = 3(n-1)$; $n - 1 = 32$; $n = 33$. Тады сума членаў дадзенай прагрэсіі роўна $S_{33} = \frac{a_1 + a_{33}}{2} \cdot 33 = \frac{4 + 100}{2} \cdot 33 = 52 \cdot 33$.

Знойдзем сярэдняе арыфметычнае дадзеных лікаў: $\frac{S_{33}}{33} = \frac{52 \cdot 33}{33} = 52$.

5. Складзём формулу n-га члена дадзенай арыфметычнай прагрэсіі.

Паколькі $a_1 = 92$; $d = -4$, то $a_n = 92 - 4(n-1)$; $a_n = 96 - 4n$.

Рэшым няроўнасць $96 - 4n > -1$; $-4n > -97$; $n < 24{,}25$.

Дадзеная прагрэсія змяшчае 24 члены, большыя за -1.

6. Няхай n — шуканы лік. Тады сума $(n-1)$ натуральных лікаў, якія яму папярэднічаюць, роўна $S_{n-1} = \frac{1 + n - 1}{2} \cdot (n-1) = \frac{n}{2} \cdot (n-1)$.

Паколькі лік n роўны $\frac{1}{21}$ сумы натуральных лікаў, якія яму папярэднічаюць, то складзём ураўненне $n = \frac{1}{21} \cdot S_{n-1}$; $n = \frac{1}{21} \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1)$; $42n = n(n-1)$; $n = 43$.

7. Паколькі $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$, то
$a_1 + 5d + a_1 + 8d + a_1 + 11d + a_1 + 14d = 20$; $4a_1 + 38d = 20$; $2a_1 + 19d = 10$.

Знойдзем $S_{20} = \frac{2a_1 + 19d}{2} \cdot 20 = \frac{10}{2} \cdot 20 = 100$.

8. Па ўмове $a_1 + a_2 + a_3 = 66$, $a_2 \cdot a_3 = 528$.

Складзём сістэму ўраўненняў і знойдзем a_1 і d:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 66, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 528; \end{cases} \begin{cases} a_1 + d = 22, \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 528; \end{cases} \begin{cases} a_1 + d = 22, \\ 22(a_1 + 2d) = 528; \end{cases}$$

$\begin{cases} a_1 + d = 22, \\ a_1 + 2d = 24; \end{cases} \begin{cases} d = 2, \\ a_1 = 20. \end{cases}$ Тады $a_n = 20 + 2(n-1)$; $a_n = 2n + 18$.

9. Сума членаў арыфметычнай прагрэсіі (a_n) выражаецца формулай $S_n = 2n^2 - 3n$, тады $S_1 = 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1$; $S_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 2$, атрымаем $a_1 = S_1 = -1$; $a_2 = S_2 - S_1 = 2 - (-1) = 3$. Такім чынам, $\frac{a_2}{a_1} = -3$.

10. $S_{15} - S_{14} = a_{15} = a_1 + 14d = -3 + 14 \cdot 5 = 67$.

11. Выразім a_1 і a_2 праз a_7 і d і атрымаем $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 = (a_7 - 6d)(a_7 - 5d)a_7$. Паколькі $a_7 = 9$, то $a_1 \cdot a_2 \cdot a_7 = (9 - 6d)(9 - 5d) \cdot 9$. Знойдзем, пры якім значэнні d атрыманы выраз прымае найменшае значэнне:

$$9 \cdot (9 - 6d)(9 - 5d) = 27 \cdot (3 - 2d)(9 - 5d) =$$
$$= 27 \cdot (27 - 15d - 18d + 10d^2) = 27 \cdot (10d^2 - 33d + 27).$$

Квадратычная функцыя $y = 27 \cdot (10d^2 - 33d + 27)$ прымае сваё найменшае значэнне ў вяршыні парабалы. Знойдзем абсцысу вяршыні парабалы $d = \frac{33}{20}$.

Тады значэнне шуканага выразу роўна $20 \cdot \frac{33}{20} = 33$.

12. Няхай (a_n) — першая арыфметычная прагрэсія, а (b_n) — другая. Тады $a_1 = 11$; $a_7 = 35$ і $a_4 = \frac{a_1 + a_7}{2} = \frac{11 + 35}{2} = 23$. Па ўмове задачы чацвёртыя члены абедзвюх прагрэсій аднолькавыя, г. зн. $b_4 = 23$. Паколькі $b_1 = 38$, то $d = (b_4 - b_1) : 3 = -5$.

Паколькі $b_n = 13$, то па формуле n-га члена арыфметычнай прагрэсіі знойдзем колькасць членаў другой прагрэсіі: $b_n = b_1 + d(n-1)$; $13 = 38 - 5(n-1)$; $n = 6$.

13. Няхай a_1 — першапачатковая цана тавару, d — колькасць рублёў, на якую цана тавару зніжалася кожны раз.

Паколькі пасля трэцяга зніжэння тавар каштаваў 2460 р., а пасля адзінаццатага зніжэння — 1980 р., то $a_4 = 2460$, а $a_{12} = 1980$. Складзём сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2460, \\ a_1 + 11d = 1980; \end{cases} \begin{cases} a_1 + 3d = 2460, \\ 8d = -480; \end{cases} \begin{cases} a_1 = 2640, \\ d = -60. \end{cases}$$

Такім чынам, тавар першапачаткова каштаваў 2640 р. Тады 50 % ад першапачатковага кошту роўны 1320 р., г. зн. $a_n = 1320$.

Паколькі $a_n = a_1 + d(n-1)$, то

$$1320 = 2640 - 60(n-1); \ -1320 = -60(n-1); \ n = 23.$$

Такім чынам, пасля 22-га зніжэння цана тавару складзе 50 % ад першапачатковай цаны.

14. Паколькі сума членаў, якія стаяць на цотных месцах дадзенай прагрэсіі, роўна 28, а сума членаў, якія стаяць на няцотных месцах, роўна 16, то $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 28$ і $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 16$.

Аднімем ад першай роўнасці другую і атрымаем
$(a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + (a_8 - a_7) = 28 - 16$. Адкуль $4d = 12$; $d = 3$.

Паколькі $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 16$, то $a_1 + a_1 + 2d + a_1 + 4d + a_1 + 6d = 16$; $4a_1 + 12d = 16$; $a_1 + 3d = 4$. Паколькі $d = 3$, то $a_1 = -5$.

15. Вядома, што $337 < S_{15} < 393$.

Па формуле сумы n першых членаў арыфметычнай прагрэсіі атрымаем $S_{15} = \frac{2a_1 + 14d}{2} \cdot 15 = (a_1 + 7d) \cdot 15 = 15a_8$.

Адкуль $337 < 15a_8 < 393$; $\frac{337}{15} < a_8 < \frac{393}{15}$; $22\frac{7}{15} < a_8 < 26\frac{1}{5}$. Паколькі прагрэсія складаецца з натуральных лікаў і восьмы член прагрэсіі кратны чатыром, то $a_8 = 24$.

Тэст 6

1. Лік 0 не можа з’яўляцца членам геаметрычнай прагрэсіі.

2. Па ўласцівасці геаметрычнай прагрэсіі атрымаем $x^2 = 7 \cdot 63$; $x^2 = 7 \cdot 7 \cdot 9$; $x = -21$ або $x = 21$. Паколькі $x < 0$, то $x = -21$.

3. Знойдзем назоўнік дадзенай прагрэсіі:

$$b_8 = b_1 \cdot q^7; \ \frac{1}{1024} = \frac{1}{8} \cdot q^7; \ q^7 = \frac{8}{1024} = \frac{2^3}{2^{10}} = \frac{1}{2^7}; \ q = \frac{1}{2}.$$

Тады $b_2 = b_1 \cdot q$; $b_2 = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$.

4. Знойдзем першы член і назоўнік прагрэсіі:

$b_1 = 3 \cdot 2^1 = 6$; $b_2 = 3 \cdot 2^2 = 12$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$. Па формуле сумы n першых членаў геаметрычнай прагрэсіі знойдзем суму першых пяці членаў дадзенай прагрэсіі:

$$S_5 = \frac{b_1\left(q^5 - 1\right)}{q - 1}; \quad S_5 = \frac{6 \cdot \left(2^5 - 1\right)}{2 - 1} = 6 \cdot 31 = 186.$$

5. Знойдзем назоўнік прагрэсіі: $b_1 = 0{,}1$; $b_2 = 0{,}3$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 3$.

Вядома, што $b_n = 218{,}7$. Па формуле n-га члена геаметрычнай прагрэсіі атрымаем: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $218{,}7 = 0{,}1 \cdot 3^{n-1}$; $3^{n-1} = 2187$; $3^{n-1} = 3^7$; $n - 1 = 7$; $n = 8$.

6. $b_{43} \cdot b_{36} = b_1 \cdot q^{42} \cdot b_1 \cdot q^{35} = b_1^2 \cdot q^{77}$, г. зн. $b_1^2 \cdot q^{77} = 57$.

Тады $b_{33} \cdot b_{46} = b_1 \cdot q^{32} \cdot b_1 \cdot q^{45} = b_1^2 \cdot q^{77} = 57$.

7. Знойдзем назоўнік прагрэсіі: $q^3 = \frac{b_{20}}{b_{17}} = -\frac{8}{125}$; $q = -\frac{2}{5}$.

Сума бясконца спадальнай геаметрычнай прагрэсіі роўна $S = \frac{b_1}{1 - q}$; $b_1 = S(1 - q)$; $b_1 = 12{,}6 \cdot (1 + 0{,}4) = 17{,}64$.

8. Выразім b_7 і b_6 праз b_5 і q і рэшым сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} b_5 q^2 - b_5 = 48, \\ b_5 q + b_5 = 48; \end{cases} \begin{cases} b_5\left(q^2 - 1\right) = 48, \\ b_5\left(q + 1\right) = 48; \end{cases} \begin{cases} b_5\left(q + 1\right)\left(q - 1\right) = 48, \\ b_5\left(q + 1\right) = 48; \end{cases} \begin{cases} 48\left(q - 1\right) = 48, \\ b_5\left(q + 1\right) = 48; \end{cases}$$

$q - 1 = 1$; $q = 2$.

9. Кожны наступны трохвугольнік падобны папярэдняму з каэфіцыентам падобнасці, роўным $\frac{1}{2}$. Іх перыметры з'яўляюцца членамі геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой роўны 24, а назоўнік роўны $\frac{1}{2}$. Знойдзем перыметр восьмага трохвугольніка: $b_8 = b_1 \cdot q^7$; $b_8 = 24 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7$; $b_8 = \frac{3}{16}$.

10. $b_5 = S_5 - S_4$; $S_5 = \frac{6 \cdot \left(2^5 - 1\right)}{5} = \frac{6 \cdot 31}{5} = \frac{186}{5}$; $S_4 = \frac{6 \cdot \left(2^4 - 1\right)}{5} = \frac{6 \cdot 15}{5} = \frac{90}{5}$;

$b_5 = \frac{186}{5} - \frac{90}{5} = \frac{96}{5}$. Значэнне шуканага выразу роўна 96.

11. Паколькі сума дзесяці членаў геаметрычнай прагрэсіі роўна 64, то $\frac{b_1(q^{10}-1)}{q-1} = 64.$ Паколькі здабытак першага і дзясятага членаў роўны 16, то $b_1 \cdot b_1 \cdot q^9 = 16$; $b_1^2 \cdot q^9 = 16.$

Сума лікаў, адваротных членам дадзенай геаметрычнай прагрэсіі, уяўляе сабой суму дзесяці першых членаў геаметрычнай прагрэсіі, першы член якой роўны $\frac{1}{b_1}$, а назоўнік роўны $\frac{1}{q}$. Тады

$$S'_{10} = \frac{\frac{1}{b_1}\left(\frac{1}{q^{10}}-1\right)}{\frac{1}{q}-1};$$

$$S'_{10} = \frac{\frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}}}{\frac{1-q}{q}} = \frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}} : \frac{1-q}{q} = \frac{1}{b_1}\cdot\frac{1-q^{10}}{q^{10}}\cdot\frac{q}{1-q} = \frac{1-q^{10}}{1-q}\cdot\frac{1}{b_1 q^9};$$

$$S'_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q}\cdot\frac{1}{b_1^2 q^9} = \frac{S_{10}}{b_1 b_{10}} = \frac{64}{16} = 4.$$

12. Па ўласцівасці геаметрычнай прагрэсіі $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}$, $n \geqslant 2$, атрымаем: $\mathrm{tg}^2 x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$; $\mathrm{tg}^2 x = \mathrm{tg}\, x$; $\mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\, x = 0$; $\mathrm{tg}\, x(\mathrm{tg}\, x - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\, x = 1,\\ \mathrm{tg}\, x = 0.\end{array}\right.$

Паколькі членам геаметрычнай прагрэсіі не можа быць нуль, то $\mathrm{tg}\, x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найменшым дадатным коранем дадзенага ўраўнення з'яўляецца $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

13. Запішам шуканую суму ў выглядзе $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \ldots - \ldots = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$ і па формуле $S = \frac{b_1}{1-q}$ знойдзем сумы бясконца спадальных геаметрычных прагрэсій: $\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \ldots$ і $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots$.

$$S' = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad S'' = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Шуканая сума роўна $S' - S'' = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Тады значэнне шуканага выразу роўна 5.

14. Няхай b_1; b_1q; b_1q^2 — тры зыходныя лікі, якія ўтвараюць геаметрычную прагрэсію. Тады b_1; b_1q+2; b_1q^2 — арыфметычная прагрэсія, а b_1; b_1q+2; b_1q^2+9 — геаметрычная прагрэсія.

Выкарыстаем уласцівасці арыфметычнай і геаметрычнай прагрэсій і складзём сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} b_1q+2=\dfrac{b_1+b_1q^2}{2}, \\ \left(b_1q+2\right)^2=b_1\cdot\left(b_1q^2+9\right); \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ b_1^2q^2+4b_1q+4=b_1^2q^2+9b_1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 4b_1q+4=9b_1; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-2b_1q-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1+b_1q^2-\left(4{,}5b_1-2\right)-4=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1+b_1q^2-4{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q=4{,}5b_1-2; \end{cases}$$

$\begin{cases} b_1q^2-3{,}5b_1-2=0, \\ 2b_1q-4{,}5b_1+2=0. \end{cases}$ Складзём першае і другое ўраўненні сістэмы і атрымаем: $b_1q^2+2b_1q-8b_1=0$; $b_1\left(q^2+2q-8\right)=0$.

Паколькі лік 0 не можа з'яўляцца членам геаметрычнай прагрэсіі, то $q^2+2q-8=0$; $\left[\begin{array}{l} q=-4, \\ q=2. \end{array}\right.$ Паколькі геаметрычная прагрэсія з'яўляецца нарастальнай, то $q=2$. З роўнасці $2b_1q-4{,}5b_1+2=0$ знойдзем шуканы лік $4b_1-4{,}5b_1+2=0$; $-0{,}5b_1=-2$; $b_1=4$.

15. Няхай $\left(a_n\right)$ — арыфметычная прагрэсія, а $\left(b_n\right)$ — геаметрычная прагрэсія.

Няхай $a_1=a$; $a_3=a+d$; $a_5=a+2d$, дзе d — падвоеная рознасць зыходнай арыфметычнай прагрэсіі.

Няхай $b_1=b$; $b_3=b\cdot q$; $b_5=b\cdot q^2$, дзе q — квадрат назоўніка зыходнай геаметрычнай прагрэсіі. Па ўмове задачы $b_1=-3-a_1$; $b_3=1-a_3$; $b_5=5-a_5$.

Тады па ўласцівасці геаметрычнай прагрэсіі $\left(1-a_3\right)^2=\left(-3-a_1\right)\left(5-a_5\right)$, г. зн. $(1-a-d)^2=\left(-3-a\right)(5-a-2d)$; $d^2-8d+16=0$; $d=4$.

Тады шуканая рознасць зыходнай арыфметычнай прагрэсіі роўна 2.

Тэст 7

1. Правільнай з'яўляецца роўнасць $900\cdot1{,}14=1026$ (р.).

2. 1) $1\,000\,000\cdot0{,}75=750\,000$ чалавек узялі ўдзел у выбарах.

2) $750\,000\cdot0{,}1=75\,000$ чалавек аддалі галасы партыі зялёных.

3. Няхай x — шуканы лік.

Пасля павелічэння ліку x на $200\ \%$ атрымаем лік $(3x)$.

Павялічым лік $(3x)$ у шэсць разоў і атрымаем лік $(18x)$.

Знойдзем, колькі працэнтаў апошні лік складае ад першапачатковага: $\frac{18x}{x}\cdot100\ \%=1800\ \%$.

4. Няхай a — даўжыня стараны квадрата. Тады яго плошча $S=a^2$.

Пасля таго як перыметр квадрата павялічылі на $10\ \%$, кожная яго старана павялічылася на $10\ \%$, г. зн. стала роўнай $1{,}1a$. Тады плошча квадрата роўна $S_1=(1{,}1a)^2=1{,}21a^2=1{,}21S$. Значыць, плошча квадрата павялічыцца на $21\ \%$.

5. За першы дзень прадалі $50\ \%=\frac{1}{2}$ усяго тавару, а за другі дзень — $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ усяго тавару. Такім чынам, непрададзеным засталося $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$ атрыманага тавару.

$$\frac{3}{8}=37{,}5\ \%.$$

6. Паколькі $70\ \%$ жыхароў ведаюць французскую мову, то $100\ \%-70\ \%=30\ \%$ не ведаюць французскую мову, а валодаюць толькі англійскай мовай. Тады $80\ \%-30\ \%=50\ \%$ жыхароў ведаюць абедзве мовы.

7. Няхай x м — першапачатковая вышыня елкі, тады $(1{,}25x)$ м — першапачатковая вышыня сасны. Пасля таго як дрэвы падрастуць на 1,8 м, вышыня елкі стане роўнай $(x+1{,}8)$ м, а вышыня сасны — $(1{,}25x+1{,}8)$ м. Вядома, што сасна аказваецца на $10\ \%$ вышэйшай за елку. Складзём і рэшым ураўненне:

$1{,}25x+1{,}8=1{,}1(x+1{,}8)$; $1{,}25x-1{,}1x=1{,}1\cdot1{,}8-1{,}8$; $0{,}15x=0{,}1\cdot1{,}8$;

$x=\frac{0{,}1\cdot1{,}8}{0{,}15}$; $x=\frac{18}{15}$; $x=\frac{6}{5}$; $x=1{,}2$ (м).

8. Няхай x р. — першапачатковая цана тавару. Пасля павелічэння цаны тавар стаў каштаваць $(1{,}1x)$ р., а пасля зніжэння цаны — $(0{,}75 \cdot 1{,}1x)$ р. Паколькі тавар патаннеў на 7 р. у параўнанні з першапачатковай цаной, то складзём ураўненне: $x - 0{,}75 \cdot 1{,}1x = 7$; $x - 0{,}825x = 7$; $0{,}175x = 7$; $x = 40$ р.

9. Няхай x р. — першапачатковы кошт першага прадмета, y р. — другога. Пасля таго як кошт першага прадмета паменшылі на $10\ \%$, а другога — на $40\ \%$, яны сталі каштаваць $(0{,}9x)$ р. і $(0{,}6y)$ р. адпаведна. Складзём і рэшым сістэму ўраўненняў:

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 0{,}9x + 0{,}6y = 33; \end{cases} \begin{cases} x + y = 40, \\ 9x + 6y = 330; \end{cases} \begin{cases} x + y = 40, \\ 3x + 2y = 110; \end{cases} \begin{cases} -2x - 2y = -80, \\ 3x + 2y = 110; \end{cases} \begin{cases} x = 30, \\ y = 10. \end{cases}$$

Дадатная рознасць паміж коштамі прадметаў да змянення цэн роўна 20 р.

10. Няхай завод двойчы павялічваў выпуск прадукцыі на p працэнтаў. Тады складзём і рэшым ураўненне: $600 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = 726$; $\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{726}{600}$;

$\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2 = \frac{121}{100}$; $1 + \frac{p}{100} = \frac{11}{10}$; $\frac{p}{100} = \frac{11}{10} - 1$; $\frac{p}{100} = \frac{1}{10}$; $p = 10$.

11. Няхай у фірме n работнікаў, і з іх m мужчын. Паколькі вядома, што мужчыны складаюць менш за $50\ \%$, але больш за $40\ \%$ работнікаў фірмы, то $0{,}4 < \frac{m}{n} < 0{,}5$; $0{,}4n < m < 0{,}5n$.

Паколькі n і m — цэлыя лікі, то найменшым значэннем n, пры якім m будзе цэлым лікам, з'яўляецца лік 7.

Пры $n = 7$ атрымаем: $0{,}4 \cdot 7 < m < 0{,}5 \cdot 7$; $2{,}8 < m < 3{,}5$; $m = 3$.

12. Няхай першапачаткова было патрэбна x грузавікоў, тады на кожную машыну пагрузілі б $\frac{90}{x}$ т грузу. Паколькі дадаткова спатрэбілася яшчэ 4 грузавікі, то на кожны з іх пагрузілі $\frac{90}{x+4}$ т грузу. Вядома, што на кожную машыну пагрузілі на 0,75 т менш, чым планавалася. Складзём і рэшым ураўненне:

$$\frac{90}{x} - \frac{90}{x+4} = \frac{3}{4};\quad \frac{30}{x} - \frac{30}{x+4} = \frac{1}{4};\quad \frac{30(x+4) - 30x}{x(x+4)} = \frac{1}{4};\quad \frac{120}{x(x+4)} = \frac{1}{4};$$

$$x^2 + 4x - 480 = 0;\quad \left[\begin{array}{l} x = -24, \\ x = 20. \end{array}\right.$$

Такім чынам, першапачаткова было патрэбна 20 грузавікоў. Але пасля заказу яшчэ 4 грузавікоў іх стала 24.

Знойдзем, на колькі працэнтаў павялічылася колькасць грузавікоў у параўнанні з першапачатковай заяўкай: $\frac{24-20}{20}\cdot 100\ \% = 20\ \%$.

13. Знойдзем працэнтнае ўтрыманне золата ў кожным сплаве:

$\frac{2{,}8}{2{,}8+1{,}2}\cdot 100\ \% = 70\ \%$ золата ў першым сплаве.

$\frac{2{,}7}{2{,}7+0{,}3}\cdot 100\ \% = 90\ \%$ золата ў другім сплаве.

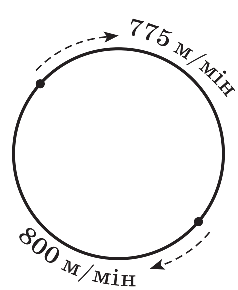
	Маса адрэзанага кавалка, кг	Маса золата, кг
Першы сплаў	x	$0{,}7x$
Другі сплаў	y	$0{,}9y$
Новы сплаў	2	$0{,}85\cdot 2 = 1{,}7$

Саставім і рэшым сістэму ўраўненняў:

$\begin{cases} x+y=2, \\ 0{,}7x+0{,}9y=1{,}7; \end{cases}$ $\begin{cases} -7x-7y=-14, \\ 7x+9y=17; \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=3, \\ 7x+9y=17; \end{cases}$ $\begin{cases} y=1{,}5, \\ 7x+9y=17. \end{cases}$

Такім чынам, ад другога кавалка адрэзалі 1,5 кг = 1500 г металу.

14. Няхай t мін — час ад моманту старта да моманту сустрэчы веласіпедыстаў. Тады першы веласіпедыст за гэты час праехаў $775t$ м, а другі — $800t$ м. Паколькі першапачатковая адлегласць паміж імі была роўна палове даўжыні велатрэку, то $800t - 775t = \frac{250}{2}$; $t = 5$ мін.



За пяць мінут першы веласіпедыст праехаў $775\cdot 5 = 3875$ м, або $3875 : 250 = 15{,}5$ круга. Такім чынам, да моманту сустрэчы першы веласіпедыст праехаў 15 поўных кругоў.

15. Па ўмове задачы складзём табліцу:

	Было	Узялі	Засталося
Усяго шароў	x	y	$x-y$
Сініх шароў	$0{,}01x$		$0{,}01x$
Чырвоных шароў	$0{,}99x$	y	$0{,}99x-y$

Паколькі доля сініх шароў ад агульнай колькасці шароў, што засталіся ў скрынцы, склала 2 %, то складзём і рэшым ураўненне: $0{,}01x = 0{,}02(x-y)$; $x = 2x - 2y$; $x = 2y$. Першапачатковая колькасць шароў у 2 разы большая за колькасць узятых чырвоных шароў.

ЗМЕСТ

Раздзел 6. Элементы камбінаторыкі

(Назва ўстановы адукацыі)

Навучальны год	Імя і прозвішча навучэнца	Стан вучэбнага дапаможніка пры атрыманні	Адзнака навучэнцу за карыстанне вучэбным дапаможнікам
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			
20 /			

Вучэбнае выданне

Арэф'ева Ірына Глебаўна

Пірутка Вольга Мікалаеўна

Зборнік задач па алгебры

Вучэбны дапаможнік для 10 класа
ўстаноў агульнай сярэдняй адукацыі
з беларускай мовай навучання
(базавы і павышаны ўзроўні)

Заг. рэдакцыі *Г. А. Бабаева*. Рэдактар *Л. А. Шапялевіч*.
Мастацкія рэдактары *А. А. Жданоўская*, *А. А. Праваловіч*. Мастак *В. У. Рута*.
Тэхнічнае рэдагаванне і камп'ютарная вёрстка *А. Ю. Агафонавай*.
Карэктары *В. С. Бабеня*, *В. С. Казіцкая*, *А. П. Тхір*, *Г. В. Алешка*.

Падпісана да друку 25.02.2020. Фармат 70 x 90 $^{1}/_{16}$. Папера афсетная. Гарнітура школьная. Друк афсетны. Ум. друк. арк. 16,38. Ул.-выд. арк. 12,0. Тыраж 6370 экз. Заказ 85.

Выдавецкае рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Народная асвета» Міністэрства інфармацыі Рэспублікі Беларусь. Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 1/2 ад 08.07.2013. Пр. Пераможцаў, 11, 220004, Мінск, Рэспубліка Беларусь.

Адкрытае акцыянернае таварыства «Паліграфкамбінат імя Я. Коласа». Пасведчанне аб дзяржаўнай рэгістрацыі выдаўца, вытворцы, распаўсюджвальніка друкаваных выданняў № 2/3 ад 10.09.2018. Вул. Каржанеўскага, 20, 220024, Мінск, Рэспубліка Беларусь.